# Задачи к Лекции 2

В этом листке Вы найдёте не только все задачи из Лекции 2, но и несколько новых задач — чтобы не было скучно. Решайте только то, что Вам нравится.

**Задача 2.e.1.** (**Лайнландия**) Рассмотрим проблему домино на прямой. *Спичкой Вана* назовём единичный отрезок с раскрашенными вершинами, а конечное множество спичек — *коробком спичек*. Для коробка $B$, одномерное замощение множества точек $S \subseteq \mathbb{Z}$ — это функция $S \to B$. Замощение всей дискретной прямой $\mathbb{Z}$ называется *замощением прямой*. Конечно, спички Вана тоже имеют цветовые ограничения: замощение называется *правильным*, если любые две соседние спички имеют касающиеся вершины одинаковых цветов. Например, следующие две спички могут быть соседями: .
А вот пример правильного замощения прямой:

$\dots$  $\dots$

Спичечный коробок называется *разрешимым* (solvable), если для него существует хоть одно замощение прямой.

Замощение прямой $T$ является *периодическим*, если существует целое $p \neq 0$ (называемое *периодом*), такое, что замощение переходит в себя при сдвиге на $p$: $T(x+p) = T(x)$ для любого $x$ из $\mathbb{Z}$.

(a) Докажите следующее утверждение (одномерную теорему Компактности). Пусть $B$ — коробок; если для любого натурального $n > 0$ существует замощение множества $\{-n, \dots, +n\}$ спичками из $B$, то существует и замощение всей прямой $\mathbb{Z}$.

(b) Покажите, что Гипотеза Вана верна в одномерном случае: если спичечный коробок разрешим, то существует хотя бы одно периодическое замощение прямой спичками из этого коробка.

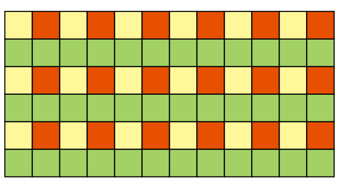
(c) Придумайте алгоритм, решающий одномерную проблему домино

**Обратно во Флатландию:** только в задаче 2.e.1 мы работаем со спичками на прямой. Во всех остальных задачах мы рассматриваем двумерные плитки Вана.

**Задача 2.e.2.** ( ) Пусть $A$ — разрешимое множество плиток. Докажите, что если для $A$ есть периодическое замощение $T$, то для него найдётся и замощение (возможно, отличное от $T$) с двумя неколлинеарными периодами.

**Задача 2.e.3.** Придумайте множество из трёх плиток Вана, для которого все замощения с точностью до сдвигов выглядят следующим образом:

$$\vdots$$

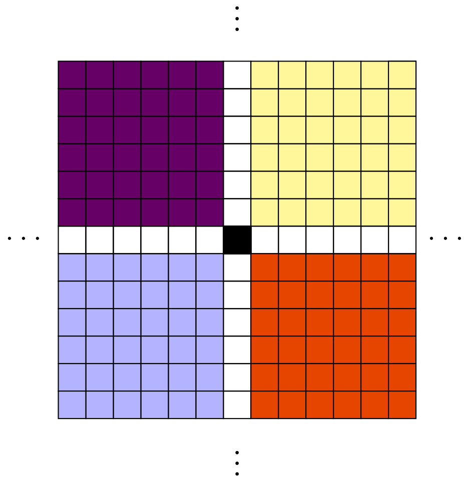
$\dots$  $\dots$

$$\vdots$$

Здесь квадратики разных цветов обозначают плитки Вана разных типов.

**Задача 2.е.4.**

(a) Придумайте множество $A$ из девяти плиток Вана, для которого одно из замощений плоскости выглядит так:



Квадраты разных цветов обозначают плитки Вана разных видов. (Один цвет может соответствовать нескольким плиткам, но одна плитка соответствует единственному цвету). (Вы можете начать с множества с большим количеством плиток, а затем уменьшить его).

(b) Объясните, почему набор плиток из Вашего решения пункта (a) также может собираться в замощение, в котором все плитки “оранжевые” (то же самое верно для “голубых”, “фиолетовых” и “жёлтых”).

**Задача 2.е.5.** Придумайте алгоритм, который по **направленному** графу $G$ генерирует множество $A$ плиток Вана такое, что $G$ содержит цикл тогда и только тогда, когда $A$ разрешимо. Память алгоритма ограничена. **Сам по себе алгоритм не должен отвечать, содержит ли граф цикл или нет,** он просто должен превращать граф в набор плиток.

**Задача 2.е.6.** Почему из Леммы 2.4.11 (из записок лекций) нельзя убрать условие “has at least one cell with $\mathcal{H}$ on its south color” — “имеет хотя бы одну плитку с $\mathcal{H}$ на южной стороне” ?

**Задача 2.е.7.** ( ) Изменим определение машины Тьюринга и конфигурации (§1.2.4) так, чтобы лента (memory) стала бесконечной в обе стороны (biinfinite); то есть, мы рассматриваем функцию $\mathbb{Z} \to \mathbb{I}$ вместо $\mathbb{N} \to \mathbb{I}$. Докажите, что любая функция, вычислимая на $\mathbb{N}$-машине Тьюринга, вычислима и на $\mathbb{Z}$-машине Тьюринга и наоборот.

**Задача 2.е.8.** ( ) Напишите на Python программу, которая по машине Тьюринга строит набор плиток, как это описано в Секции 2.4.

### Contacts


- Daria Pchelina (dpchelina@clipper.ens.fr)
- Guilhem Gamard (guilhem.gamard@normale.fr)