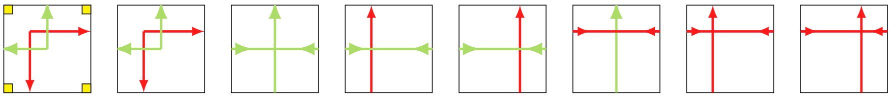
Задачи к Лекции 3

В этом листке Вы найдёте не только все задачи из Лекции 3, но и несколько новых задач — чтобы не было скучно. Решайте только то, что Вам нравится.

Плитки Робинсона

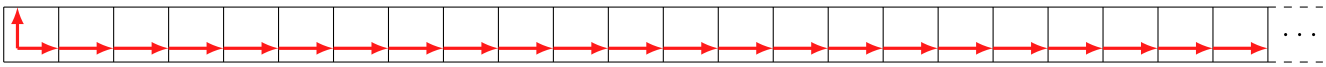
$R =$ 

Задача 2.e.1. (a) Докажите, что существует бесконечное число замощений Робинсона.

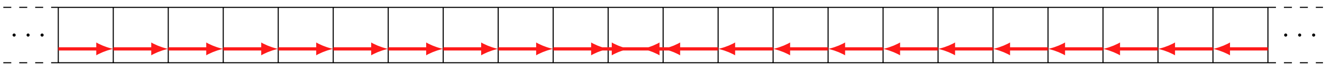
(b) Докажите, что существует *несчётное* число замощений Робинсона.

(c) Докажите, что не существует замощения Робинсона с периодом: то есть, набор плиток Робинсона является апериодическим.

(d) Покажите, что существует замощение Робинсона с бесконечной в одну сторону красной стрелкой:



(e) Покажите, что существует замощение Робинсона с бесконечной в обе стороны красной стрелкой:



Задача 2.e.2. *Эмуляцией* замощения R плитками Вана называется пара (W, f), где W — набор плиток Вана, а f — отображение $W \to R$ такое, что для любого правильного замощения T плитками из W, замощение $f(T)$ плитками из R тоже является правильным. (Чтобы получить $f(T)$, нужно применить f к каждой плитке из T). Постройте эмуляцию замощения R набором плиток Вана, в котором

(a) ≤ 64 плиток;

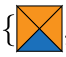
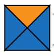
(b) 56 плиток.

Иерархия

Для любых двух заполненных плитками прямоугольников X и Y равной высоты, мы определяем $\obar$ как $X \obar Y := \begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{X} & \mathrm{Y} \\ \hline\end{array}$. Для любых двух заполненных плитками прямоугольников X и Y равной ширины, мы определяем $\ominus$ как: $X \ominus Y := \begin{array}{|c|}\hline \mathrm{X} \\ \hline \mathrm{Y} \\ \hline\end{array}$.

Для набора плиток A, $(n \times m)$-*подстановкой* называется функция $s : A \to A^{n \times m}$, каждой плитке сопоставляющая правильный блок размера $n \times m$ так, что для любых плиток x, y из A:

- $x \ominus y$ правильный тогда и только тогда, когда $s(x) \ominus s(y)$ является правильным;
- $x \obar y$ правильный тогда и только тогда, когда $s(x) \obar s(y)$ является правильным.

Задача 2.e.3. Рассмотрим набор плиток $T = \{$, , , $\}$:

(a) найдите (1×3)-подстановку для T;

(b) найдите $(n \times 3)$-подстановку для T, для любого $n \geq 2$.

Задача 2.e.4. Пусть A — набор плиток, s — подстановка $s : A \to A^{n \times m}$, а T — замощение плоскости плитками из A. Мы называем T *подстановочным замощением* для s, если и только если для любого блока C в T, найдётся $n \in \mathbb{N}$ и плитка a такие, что C является частью $s^n(a)$.

(a) Постройте подстановочное замощение для (2×3)-подстановки из Задачи 2.e.3.

(b) Докажите, что не существует подстановочных замощений для (1×3)-подстановки из Задачи 2.e.3.

(c) Докажите, что для любого набора плиток A и любой подстановки $s : A \to A^{1 \times n}$, не найдётся ни одного подстановочного замощения. То же самое для $s : A \to A^{n \times 1}$.

Задача 2.e.5. Пусть A — набор плиток, s —подстановка, а T — подстановочное замощение плитками из A с подстановкой s. Мы говорим, что T имеет *единственное разбиение*, если существует *ровно одно* замощение U, такое что $T = s(U)$.

(a) Покажите, что замощение, которое Вы нашли в Задаче 2.e.4(a), имеет более одного разбиения.

(b) Покажите, что не существует замощения с единственным разбиением для (2×3)-подстановки из Задачи 2.e.3.

(c) Пусть T_0 — подстановочное замощение с подстановкой s. Докажите, что если существует *единственная* бесконечная последовательность замощений $T_1, T_2, T_3, \ldots$, такая что:

$$T_n = s(T_{n+1})$$

для всех n из $\mathbb{N}$ (это в том числе означает, что все T_n имеют единственное разбиение), тогда T_0 — непериодическое замощение.

Contacts

- Daria Pchelina (dpchelina@clipper.ens.fr)
- Guilhem Gamard (guilhem.gamard@normale.fr)