Чтение: Conrad's lecture notes

1. Напишите букву ζ двадцать пять раз, чтобы ваш вариант не выглядел как случайная каракуля.

2. Докажите при такой $z \in \mathbf{C}$, что $|z| < 1$, у нас есть $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$.

3. Для комплексных чисел s мы определим функции e^s, $\sin s$, и $\cos s$ через степенные ряды:

$$e^s := \sum_{n\geq 0} \frac{s^n}{n!}, \quad \cos(s) := \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n s^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(s) := \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n s^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

   Все ряды сходятся, так как они сходятся абсолютно.

   а) Проверьте формулы

$$e^{is} = \cos s + i \sin s, \quad \cos s = \frac{e^{is} + e^{-is}}{2}, \quad \sin s = \frac{e^{is} - e^{-is}}{2i}$$

   для всех $s \in \mathbf{C}$. (Они часто используются, когда $s \in \mathbf{R}$, но они работают даже в случае, что $s \in \mathbf{C}$.)

   б) Используйте формулы из пункта (а), чтобы доказать, что $\cos s$ и $\sin s$ *неограниченны* на мнимой оси: $|\cos(iy)| \to \infty$ и $|\sin(iy)| \to \infty$, при $y \to \pm\infty$. Это сильно отличается от поведения на $\mathbf{R}$.

   в) Используйте формулу $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ для $x, y \in \mathbf{R}$ чтобы проверить следующие свойства: (i) для каждого ненулевого $w \in \mathbf{C}$ есть такое $z \in \mathbf{C}$, что $e^z = w$, и (ii) для $s \in \mathbf{C}$, $e^s = 1 \iff s \in 2\pi i \mathbf{Z}$.

   г) Используйте формулу для $\sin s$ из пункта (а), чтобы доказать, что $\sin s = 0 \iff s \in \pi\mathbf{Z}$, т.е., $\sin s$ не имеет нулей на $\mathbf{C}$, кроме вещественных нулей.

4. а) Докажите, что интеграл $\displaystyle\int_0^\infty x^t e^{-x} \frac{dx}{x}$ сходится при $t > 0$ и расходится при $t = 0$. Обратите внимание: интегрирование начинается с 0. (Поэтому $\Gamma(s) := \displaystyle\int_0^\infty x^s e^{-x} \frac{dx}{x}$ определена для такого комплексного s, что $\mathrm{Re}(s) > 0$.)

б) Для каждого $c > 0$ докажите, что интеграл $\displaystyle\int_c^\infty x^t e^{-x}\,\frac{dx}{x}$ сходится для *всех* t в $\mathbf{R}$. Обратите внимание: интегрирование начинается с положительного числа вместо нуля. (Подсказка: перепишите $x^{t-1}e^{-x} = (x^{t-1}e^{-x/2})e^{-x/2}$ и покажите, что $x^{t-1}e^{-x/2}$ ограниченная функция для x в интервале $[c, \infty)$.)

в) Используйте интегрирование по частям, чтобы доказать соотношение $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, когда $\mathrm{Re}(s) > 0$.

5. а) Проверьте, что обратимые элементы по модулю 15 порождаются числами $2 \bmod 15$ и $-1 \bmod 15$: $(\mathbf{Z}/15\mathbf{Z})^\times = \{(-1)^a 2^b \bmod 15 : a = 0,1; b = 0,1,2,3\}$.

   б) Какие из следующих функций определяют характер по модулю 15?

$n \bmod 15$	1	2	4	7	8	11	13	14
$\chi(n)$	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
$\chi(n)$	1	i	-1	$-i$	i	1	$-i$	-1
$\chi(n)$	1	-1	1	$-i$	-1	i	$-i$	i
$\chi(n)$	1	i	-1	i	$-i$	1	$-i$	-1

   в) Какие из следующих функций определяют характер по модулю 9? (Число ω в последней строке – кубический корень из единицы в $\mathbf{C}$.)

$n \bmod 9$	1	2	4	5	7	8
$\chi(n)$	1	-1	1	-1	1	-1
$\chi(n)$	1	-1	1	1	-1	1
$\chi(n)$	1	i	-1	i	1	$-i$
$\chi(n)$	1	ω	ω^2	ω^2	ω	1