Чтение: Conrad's lecture notes

1. Напишите букву ξ (уже не ζ, с которым Вы уже набили руку в предыдущем листке) двадцать пять раз, чтобы ваш вариант не выглядел как случайная каракуля.

2. Определим характер Дирихле по модулю 15 формулой

$$\chi(a) = \left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{a}{5}\right),$$

где выражения справа — символы Лежандра по модулям 3 и 5.

а) Вычислите величины $\chi(a)$, где $a \in (\mathbf{Z}/15\mathbf{Z})^\times$.

б) Какая четность этого характера?

в) Для $a \in (\mathbf{Z}/15\mathbf{Z})^\times$ верно ли, что $a \equiv \square \bmod 15 \Longrightarrow \chi(a) = 1$ или $a \not\equiv \square \bmod 15 \Longrightarrow \chi(a) = -1$?

3. Пусть $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ задан формулой $\gamma(t) = e^{it}$. В лекции мы вычислили явно, что $\displaystyle\int_\gamma s^n\, ds = 0$, если $n \neq -1$ и $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{s}\, ds = 2\pi i$. Пусть a такое комплексное число, что $|a| < 1$.

а) Проверьте, что $\displaystyle\int_\gamma (s-a)^n\, ds = 0$, если $n \neq -1$.

б) Проверьте, что $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{s-a}\, ds = 2\pi i$. (Подсказка: $|a| < |s|$ когда $|s| = 1$, поэтому можно представить $\dfrac{1}{s-a}$ в виде суммы геометрической прогрессии:

$$|s| = 1 \Longrightarrow \frac{1}{s-a} = \frac{1}{s(1-a/s)} = \frac{1}{s}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{a}{s}\right)^n = \sum_{n \geq 0}\frac{a^n}{s^{n+1}}.$$

Интегрируйте по членам.)

в) Что происходит при $|a| > 1$?