L-функции и гипотеза Римана — К. Конрад

Дубна, 2018 г. — Листок 3

Чтение: Conrad's lecture notes

1. По методу контурного интегрирования, мы нашли
$$\left|\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^2+1}-\pi\right| \le \frac{\pi R}{R^2-1},$$
или эквивалентно,
$$\left|\int_{0}^{R}\frac{dx}{x^2+1}-\frac{\pi}{2}\right| \le \frac{\pi R}{2(R^2-1)}.$$
Оценка убывает как $(\pi/2)(1/R)$ при $R\to\infty$. Докажите более *сильную* оценку
$$\left|\int_{0}^{R}\frac{dx}{x^2+1}-\frac{\pi}{2}\right| \le \frac{1}{R}$$
без контурного интегрирования. (Подсказка: Разность в левой части неравенства равна $\int_R^\infty dx/(x^2+1)$.)

2. Пусть $f(s)=\dfrac{1}{s^4+1}$. Знаменатель зануляется в 4 точках $\pm\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}$.

   а) Проверьте, что $\operatorname{Res}_{s=(1+i)/\sqrt{2}} f(s) = \dfrac{-1-i}{4\sqrt{2}}$ и $\operatorname{Res}_{s=(-1+i)/\sqrt{2}} f(s) = \dfrac{1-i}{4\sqrt{2}}$.

   б) Докажите, что $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ используя теорему вычетов.

3. Докажите, что для $c>0$, $x>0$, и такого $n\in\mathbf{Z}^+$, что $n\ge 2$,
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^s}{s^n}\,ds = \begin{cases}(\ln x)^{n-1}/(n-1)!, & \text{если } x\ge 1,\\ 0, & \text{если } 0<x<1.\end{cases}$$
В Вашем решении, найдите верхние оценки на
$$\left|\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s^n}\,ds-\frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}\right|,$$
когда $x>1$ и
$$\left|\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^s}{s^n}\,ds\right|,$$

когда $0 < x \leq 1$. Оценки должны стремятся к нулю при $T \to \infty$.