L-функции и гипотеза Римана — К. Конрад

Дубна, 2018 г. — Листок 4

Чтение: Conrad's lecture notes

1. а) Докажите, что для $c > 0$ и $x > 0$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)}\,ds = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 1 - 1/x, & \text{если } x \ge 1. \end{cases}$$

Замечание. Обратите внимание, что вертикальный интеграл выше зависит непрерывно от x, также как и вертикальный интеграл функции x^s/s^2, и в отличие от вертикального интеграла x^s/s, (Подсказка: $1/(s(s+1)) = 1/s - 1/(s+1)$.)

б) Предполагая, что ряд $\displaystyle\sum_{n\ge1}\frac{a_n}{n^s}$ сходится для $\mathrm{Re}(s) > 1$, докажите для $c > 1$ и $x > 0$, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\sum_{n\ge1}\frac{a_n}{n^s}\right)\frac{x^s}{s(s+1)}\,ds = \sum_{n\le x}\left(1-\frac{n}{x}\right)a_n = \sum_{n<x}\left(1-\frac{n}{x}\right)a_n.$$

2. Докажите (с помощью эйлерова произведения) для характера Дирихле χ и $\mathrm{Re}(s) > 1$, что

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_{\substack{p^k\\ k\ge1}}\frac{\chi(p^k)\ln p}{p^{ks}}.$$

3. Докажите, что если $f(s) = \sum_{n\ge m} c_n(s-a)^n$ в окрестности точки a, где $c_m \ne 0$, то

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{m}{s-a} + \text{члены высшего порядка},$$

поэтому $\mathrm{Res}_{s=a}\, f'(s)/f(s) = m$.

4. Проверьте вычисления

$$\mathrm{Res}_{s=1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\right) = x, \qquad \mathrm{Res}_{s=-2k}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\right) = \frac{x^{-2k}}{2k},$$

где $x > 0$ и k натуральное.