

Листок 3

1. Докажите, что у кривой, заданной уравнением $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ есть Q_p точки, но нет Q -точек.

Указание: надо использовать лемму Гензеля и отдельно случаи характеристики 3 и 5.

2. Найдите дискриминант уравнения Вейерштрассе, докажите, что кривая неособая титтк он не равен нулю.

3. Найдите координаты $2P$ на кривой, заданной уравнением Вейерштрассе.

4. Найдите группу $E[3]$ точек 3-крючения.

5. Завершите доказательство теоремы Лиувилля, намеченное в лекции 4.

6. Предположим, что для многочлена, который мы построили в доказательстве теоремы Рота имеется большой индекс в точке (α, \dots, α) с равными степенями d_i . Если мы вычислим наш многочлен не в точке $(p_1/q_1, \dots, p_m/q_m)$ мы используем точку $(p/q, \dots, p/q)$, где наш аргумент не сработает?

7. Предположим, что $t \leq 1$ и f общий полином из m переменных и мультистепени d и индекса t в точке a . Какая кратность f в a ? Что если $t > 1$. Если g общий полином от m переменных мультистепени d и кратности m , какой индекс у g в a ?

8. Рассмотрим точку $(1,100) \in A^1 \times A^1$.

1) Найдите линейные многочлены наименьшей высоты, которые задают идеал многочленов, зануляющихся в этой точке. Как это связано с высотой точки?

2) Может ли $(1,100)$ вырезать множество полиномов малой высоты, например один.

3) Что случится в предыдущем пункте, если степени многочленов ограничены подходящим образом?