2. Симметрии и периодичность замощений

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathcal{M} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ *— конечное протомножество некоторого замощения, группа симметрий которого содержит параллельный перенос. Тогда* $\mathcal{M}$ *допускает периодическое замощение* $\mathcal{T}$.

Упражнения

Упражнение 2.1. Для каждого натурального числа n приведите пример замощения, группой симметрий которого является группа диэдра D_n (она же — группа симметрий правильного n-угольника).

Упражнение 2.2. Для каждого из указанных на рис. 1 замощений найдите его группу симметрий (то есть опишите все движения, которые переводят замощение в себя).

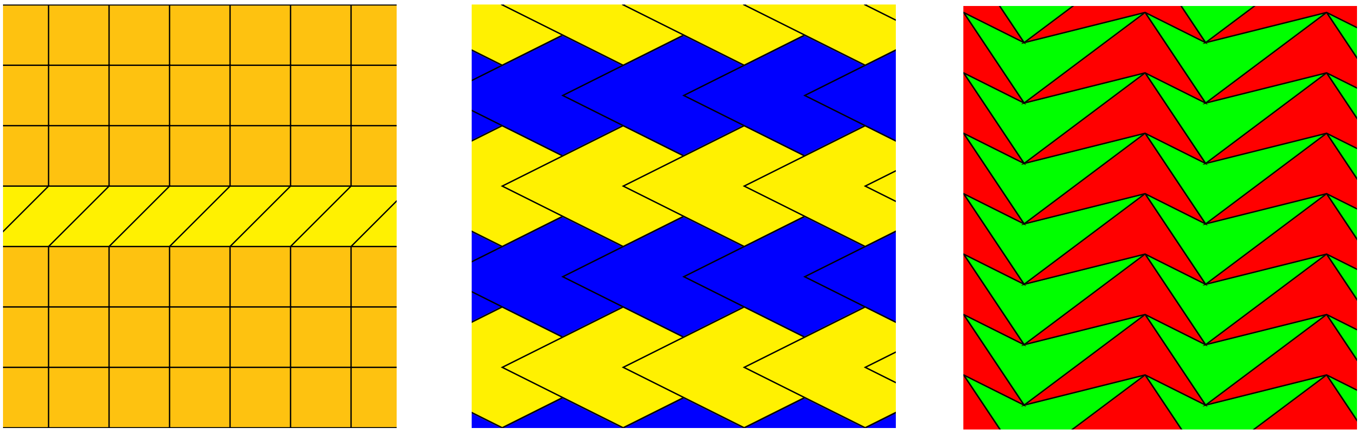

Рис. 1.

Упражнение 2.3. Пусть $\mathcal{M}$ — конечное протомножество замощения $\mathcal{T}'$ ребро-к-ребру, группа симметрий которого содержит параллельный перенос. Докажите, что $\mathcal{T}'$ содержит сколь угодно большие куски, которыми можно породить периодическое замощение, параллельно перенося их вдоль двух несонаправленных векторов.

Упражнение 2.4. Приведите пример протомножества $\mathcal{M} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, удовлетворяющего теореме 2.1, которое не является протомножеством ни одного периодического замощения (то есть $\mathcal{M}$ допускает периодические замощения, но ни в одном из них не встречается, скажем, плитка T_1).

Упражнение 2.5. Докажите, что изображённая на рис. 2 плитка
а) допускает бесконечно много периодических замощений;
б) допускает несчётное число непериодических замощений.

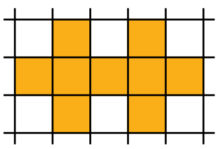

Рис. 2.

Задачи

Задача 2.1. Для каждого n приведите пример *моноэдрального* замощения (то есть замощения копиями одной плитки), группа симметрий которого есть
а) циклическая группа C_n (группа симметрий «свастики» с n хвостами).
б) группа диэдра D_n (группа симметрий правильного n-угольника).

Задача 2.2. Найдите все *изоэдрические замощения*, которые допускает протоплитка 7-мино, изображённая на рис. 3 (замощение называется *изоэдрическим*, если для любых его двух плиток найдётся симметрия замощения, переводящая первую плитку во вторую).

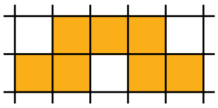

Рис. 3.

Задача 2.3. Пусть $\mathcal{T}$ — периодическое замощение, внутри фундаментального параллелограмма которого содержится V вершин, E рёбер, и F плиток. Докажите, что в этом случае выполняется равенство $V - E + F = 0$ (*формула Эйлера*).

Задача 2.4. Пусть $\mathcal{T}$ — периодическое замощение. Докажите, что площади всех фундаментальных параллелограммов этого замощения равны между собой.