Периодические и апериодические замощения Часть — 1

Хайдар Нурлигареев

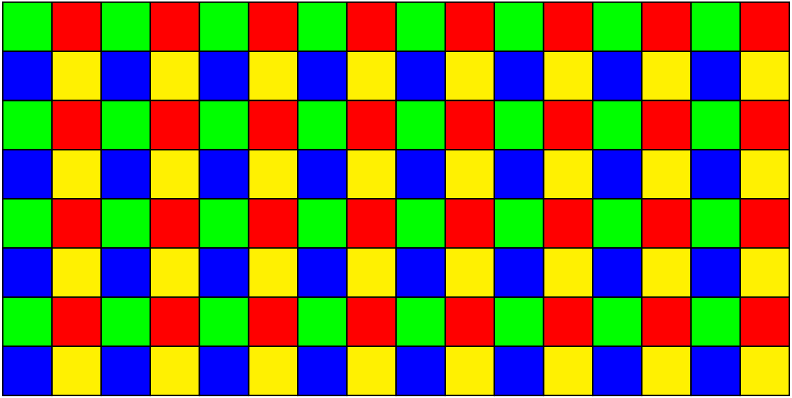
Летняя Школа
Современная Математика – XVIII

19-30 июля 2018

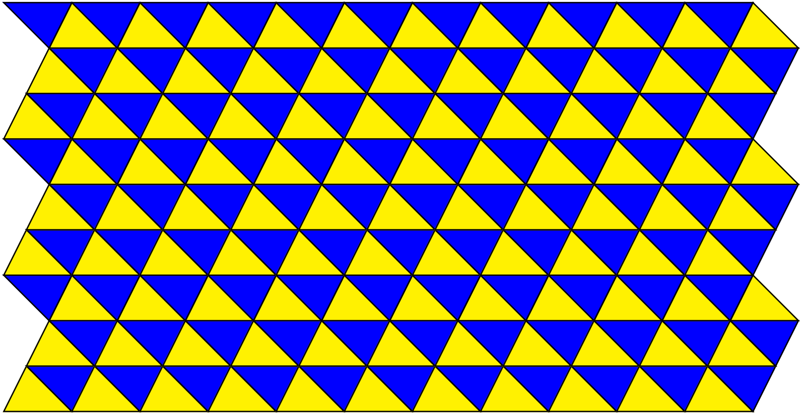
Понятие замощения

- *Замощение плоскости* — счётное семейство замкнутых множеств $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, \dots\}$, покрывающих всю плоскость без пробелов и наложений.
- *Плитки* — множества $T_1, T_2, T_3, \dots$
- *Протомножество* — наибольший поднабор различных плиток замощения (его элементы — *протоплитки*).
- *Равные замощения* переводятся одно в другое преобразованием подобия.

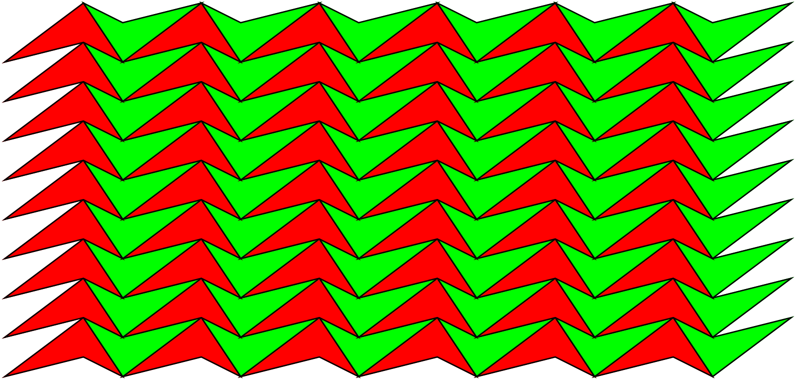
Замощение плоскости копиями квадрата.



Замощение плоскости копиями треугольника.



Замощение плоскости копиями четырёугольника.

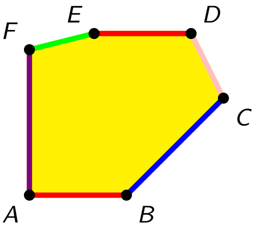


Замощение плоскости копиями пятиугольника.

Всего известно 15 типов.

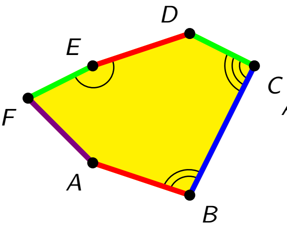
- Типы 1-5: Карл Рейнхард, 1918.
- Типы 6-8: Ричард Киршнер, 1968.
- Тип 9: Ричард Джеймс, 1975.
- Типы 10-13: Марджори Райс, 1980-1983.
- Тип 14: Рольф Стейн, 1985.
- Тип 15: Кейси Манн, Дженнифер Маклауд, Дэвид фон Дюрей, 2015.

Замощение плоскости копиями шестиугольника.



$AB = DE$,

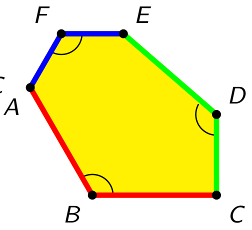
$AB \parallel DE$



$AB = DE$,

$CD = EF$,

$\angle B + \angle C + \angle E = 2\pi$



$AB = BC$,

$CD = DE$,

$EF = FA$,

$\angle B = \angle D = \angle F = {}^{2\pi}/_{3}$

Теорема существования для замощений

Пусть

- $\mathcal{M} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ — протомножество;
- для каждого $L > 0$ плитками из $\mathcal{M}$ можно покрыть круг радиуса L.

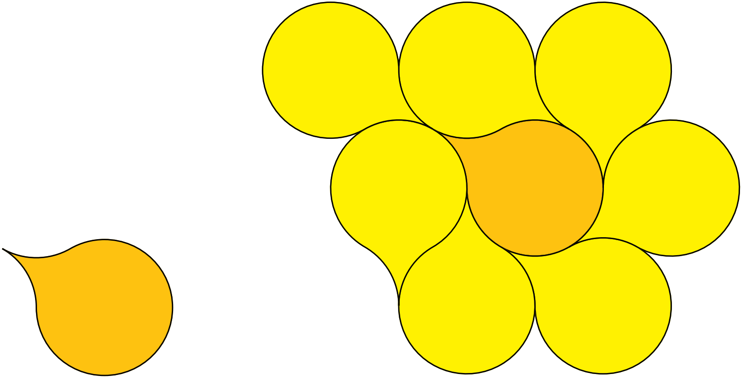
Тогда $\mathcal{M}$ допускает замощение плоскости.

Доказательство теоремы существования

- $\mathcal{M} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ — протомножество;
- $u = \min\{r : \forall T \in \mathcal{M}$ круг радиуса r лежит в $T\}$;
- $\Lambda = \{(mu, nu) : \ m, n \in \mathbb{Z}\} = \{L_0, L_1, L_2, \ldots\}$;
- $\mathcal{A}_r$ — покрытие круга радиуса r (с центром в L_0);
- T_{rs} — плитка из $\mathcal{A}_r$, покрывающая L_s;
- $\delta(T, T') = \max\left(\max\limits_{x \in T} \min\limits_{x' \in T'} ||x - x'||, \max\limits_{x' \in T'} \min\limits_{x \in T} ||x - x'||\right)$ (*расстояние Хаусдорфа* между плитками T и T').

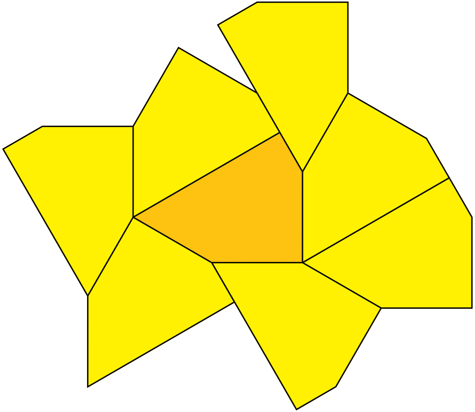
Задача Хееша

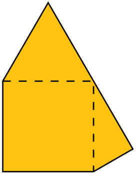
- $H(F) = 1$, Вальтер Литцман, 1922.



Задача Хееша

- $H(F) = 1$, Генрих Хееш, 1968.

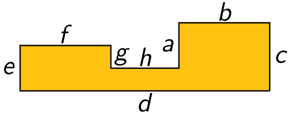


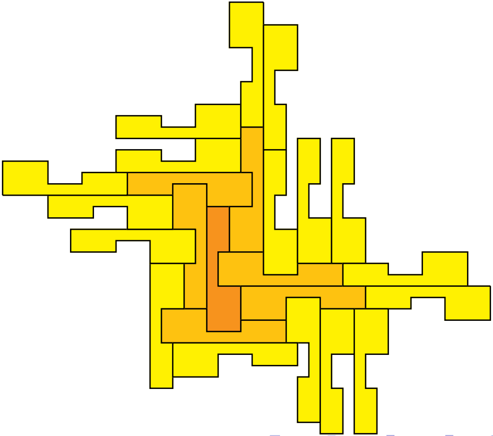


Задача Хееша

- $H(F) = 2$, Анн Фонтен, 1991.

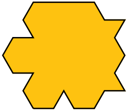
$$\begin{gathered} c = h, \\ b = f = c + g = a + e, \\ a > g, \\ 2c > b \end{gathered}$$

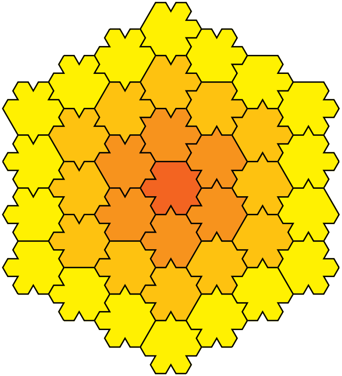




Задача Хееша

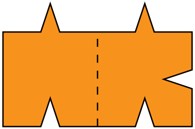
- $H(F) = 3$, Роберт Амманн, 1991.

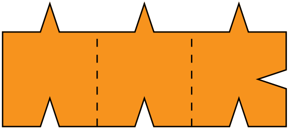




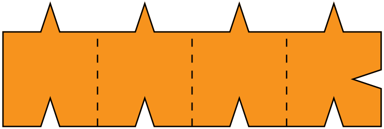
Задача Хееша

- $H(F) = 2$, Кейзи Манн, 2001.



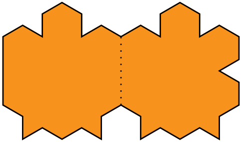


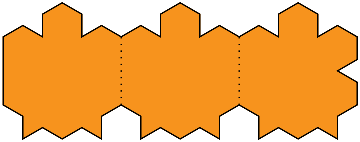
- $H(F) = 3$, Кейзи Манн, 2001.



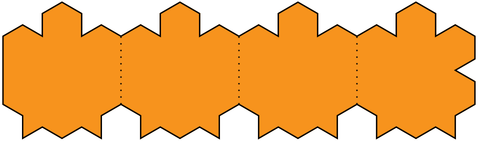
Задача Хееша

- $H(F) = 4$, Кейзи Манн, 2001.





- $H(F) = 5$, Кейзи Манн, 2001.



Задача Хееша