Периодические и апериодические замощения Часть — 3

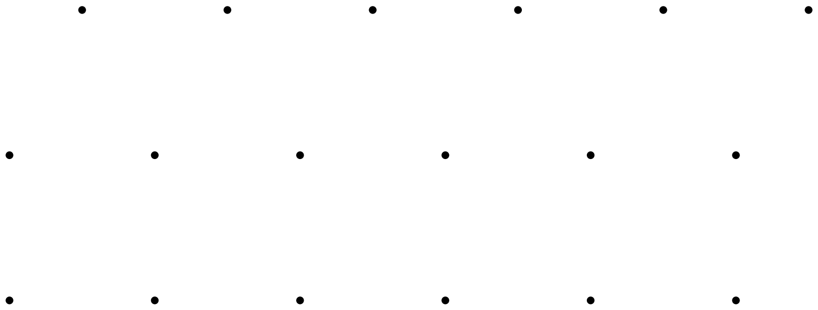
Хайдар Нурлигареев

Летняя Школа
Современная Математика – XVIII

19-30 июля 2018

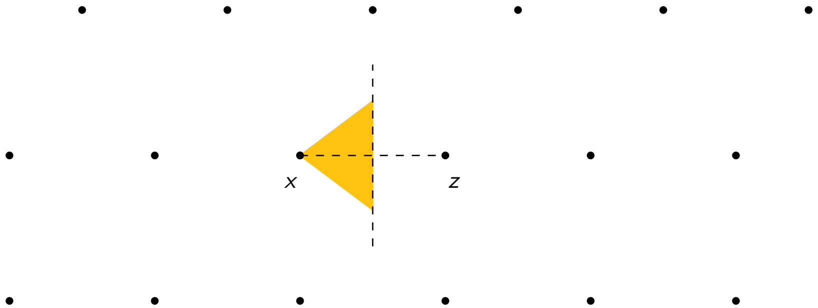
Понятие области Дирихле

- $X \subset \mathbb{R}^2$ — дискретно, $x \in X$.
- Фигура $F_x = \{y \mid d(x,y) \leqslant d(x,z)$ для всех $z \in X\}$ — *область Дирихле*.



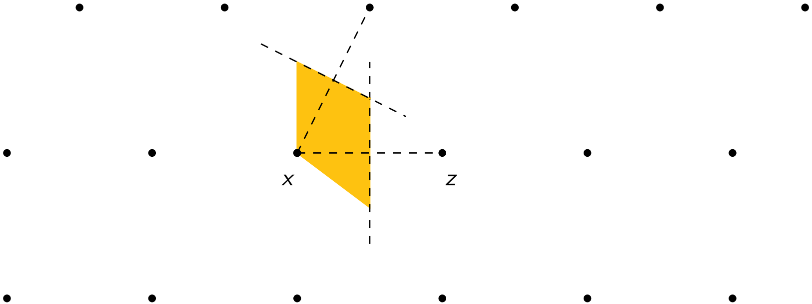
Понятие области Дирихле

- $X \subset \mathbb{R}^2$ — дискретно, $x \in X$.
- Фигура $F_x = \{y \mid d(x,y) \leqslant d(x,z) \text{ для всех } z \in X\}$ — *область Дирихле*.



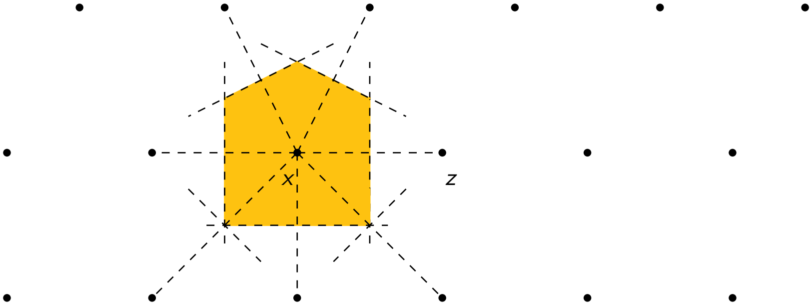
Понятие области Дирихле

- $X \subset \mathbb{R}^2$ — дискретно, $x \in X$.
- Фигура $F_x = \{y \mid d(x,y) \leqslant d(x,z)$ для всех $z \in X\}$ — *область Дирихле*.



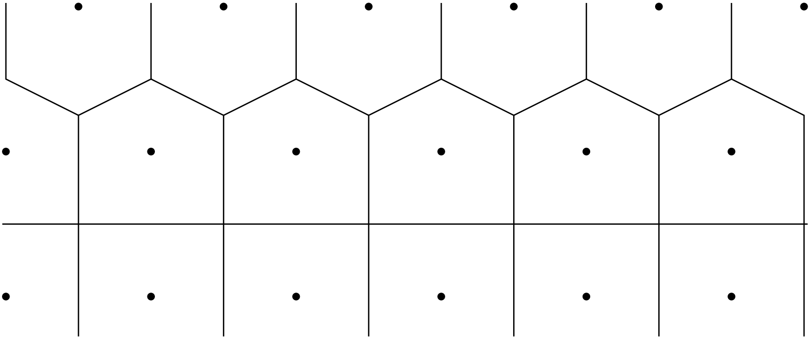
Понятие области Дирихле

- $X \subset \mathbb{R}^2$ — дискретно, $x \in X$.
- Фигура $F_x = \{y \mid d(x,y) \leqslant d(x,z) \text{ для всех } z \in X\}$ — *область Дирихле*.

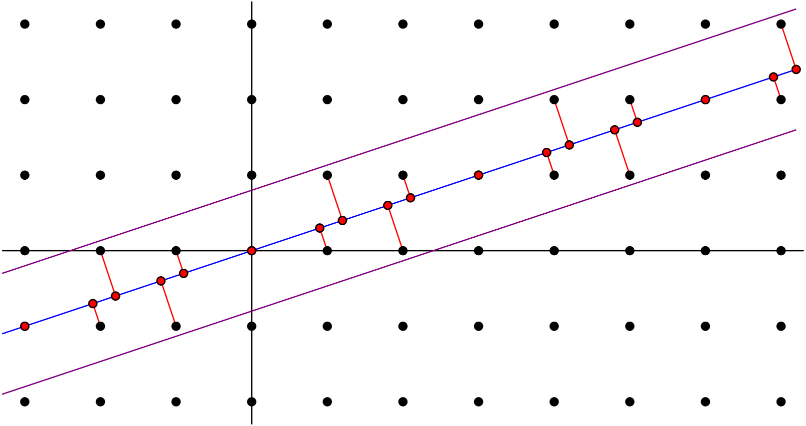


Разбиение Вороного

- *Разбиение (замощение) Вороного* — замощение плоскости областями Дирихле.



Метод «слоёного пирога» («вырежь и спроецируй»)

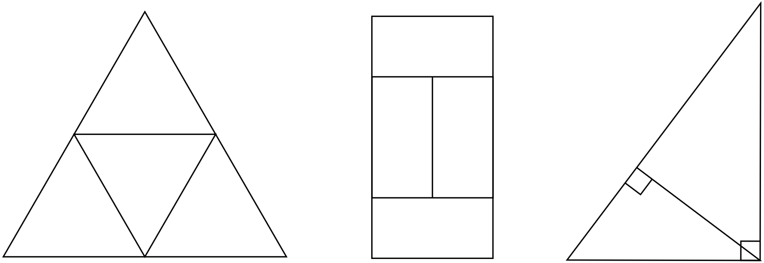


Свойства разбиения Вороного для «слоёного пирога»

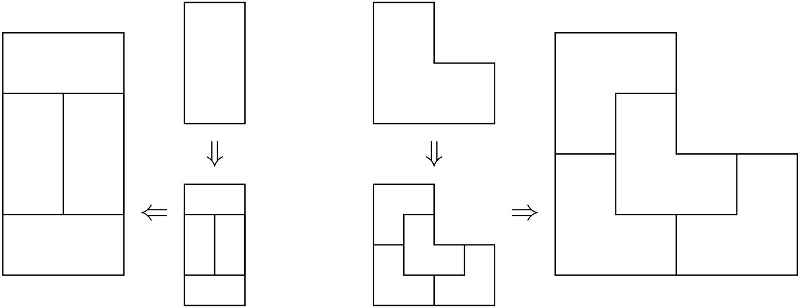
- Множество протоплиток конечно.
- Параллельные переносы из группы симметрий
  $$\Updownarrow$$
  целые точки на исходной плоскости.
- Исходная плоскость не проходит через целые точки (за исключением начала координат)
  $$\Updownarrow$$
  замощение Вороного непериодично.

Самоподобные фигуры

- Фигура F *самоподобна* — её можно разделить на подобные ей фигуры $F_1, F_2, \ldots, F_n$.



Процесс дефляции-инфляции



Самоподобное замощение

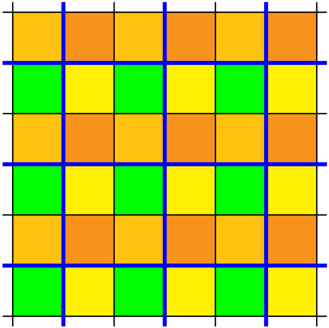
Замощение *самоподобно*, если:

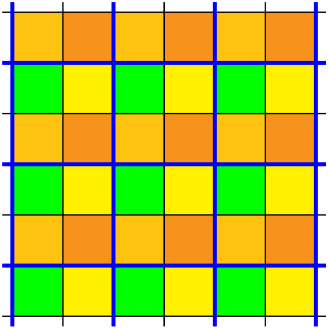
- плитки замощения (плитки 1-го уровня) могут быть объединены в более крупные плитки (плитки 2-го уровня), которые подобны плиткам 1-го уровня;
- плитки 2-го уровня могут быть объединены в плитки 3-го уровня, которые подобны плиткам 2-го уровня;
- такое последовательное укрупнение возможно для любого k-го уровня.

Уровни плиток замощения образуют *иерархию*, поэтому самоподобное замощение также называют *иерархическим*.

Замощения со слабой иерархией

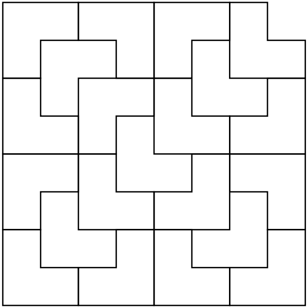
Иерархия самоподобного замощения — *слабая*, если объединение плиток k-го уровня в плитки $(k+1)$-го уровня возможно несколькими способами.



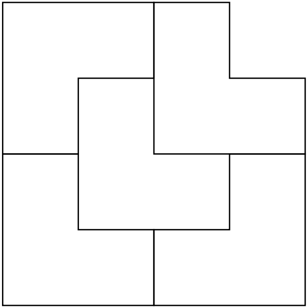


Замощения со строгой иерархией

Иерархия самоподобного замощения — *строгая*, если объединение плиток k-го уровня в плитки $(k+1)$-го уровня возможно ровно одним способом.



$\Rightarrow$



Свойства замощений со строгой иерархией

- Непериодичность.
- Квазипериодичность: каждый конечный фрагмент повторяется бесконечное число раз.
- Континуальность: различных самоподобных замощений, основанных на одном и том же разбиении, континуум.

Апериодические протомножества и замощения

- *Апериодическое* протомножество $\mathcal{M}$ — допускает только непериодические замощения (параллельный перенос не входит в группу симметрий ни одного замощения из $\mathcal{M}$).
- *Апериодическое* замощение $\mathcal{M}$ — замощение с апериодическим протомножеством.

История апериодических замощений

- 20 426 протоплиток, Роберт Бергер, 1966.
- 92 протоплитки, Дональд Кнут, 1968.
- 6 протоплиток, Рафаэль Робинсон, 1971.
- 2 протоплитки, Роджер Пенроуз, 1974.
- 1 протоплитка — открытая задача (задача Конвея или Einstein problem).