

Предварительные задачи к курсу «Класс Эйлера»

Серия А (можно решить, пользуясь идеей непрерывности)

1. Каждую плоскую фигуру A можно вписать в квадрат (= существует квадрат, содержащий A , каждое ребро которого пересекает A).
2. Пусть C --- *простая* (то есть без самопересечений) замкнутая кривая на плоскости. Покажите, что существует правильный треугольник, все вершины которого лежат на C .
3. Пусть C --- простая замкнутая кривая в трехмерном пространстве. Покажите, что существует правильный треугольник, все вершины которого лежат на C .
4. (Теорема о блинах) Пусть A и B --- две плоские фигуры. Покажите, что найдется прямая, делящая каждую из них на две равные по площади части.
5. Пусть A --- плоская фигура. Покажите, что найдутся две взаимно ортогональные прямые, делящие A на четыре равные по площади части.
6. Пусть A --- плоская фигура. Покажите, что найдутся три прямые, проходящие через одну точку и делящие A на шесть равных по площади частей.
7. а) Пусть C --- выпуклая замкнутая кривая на плоскости, C' --- точка, лежащая во внутренней области. Покажите, что существует хорда кривой C , проходящая через точку C' , которая делится пополам точкой C'
б) Пусть C --- выпуклая замкнутая кривая на плоскости, C' --- окружность, лежащая во внутренней области. Покажите, что существует хорда кривой C , касающаяся окружности C' , которая делится пополам точкой касания.
в) Пусть C --- выпуклая замкнутая кривая на плоскости, C' --- произвольная строго выпуклая замкнутая кривая, лежащая во внутренней области. C Покажите, что существует хорда кривой C , касающаяся окружности C' , которая делится пополам точкой касания.

Серия В

1. Пусть C --- *простая* (то есть без самопересечений) замкнутая кривая на плоскости. Покажите, что существует прямоугольник, все вершины которого лежат на C .
2. Пусть C --- простая гладкая кривая на плоскости. Покажите, что существует квадрат, все вершины которого лежат на C .
3. (Теорема о бутерброде с ветчиной) Пусть A, B, C – три тела в трехмерном евклидовом пространстве. Покажите, что существует плоскость, делящая каждое из них на две равные по объему части.
4. Каждое трехмерное тело A можно вписать в куб (= существует куб, содержащий A , каждая грань которого пересекает A).
5. (Из раздела «Применение топологии в социальных науках») Два вора украли ожерелье: драгоценные камни k различных типов (каждого типа – четное число камней), нанизаны на ценную платиновую цепь. Требуется разрезать цепь так, чтобы воры могли взять себе поровну камней каждого типа. Покажите, что достаточно k разрезов.