Дубна-2018

Задачи Г.Б. Шабата к лекции 2

2.1. Пусть g – натуральное число, и пусть кривая задана уравнением $v^2 = u^{2g+2} + a_1 u^{2g-1} + \cdots + a_{2g-1}u + 1$ (обратите внимание на крайние коэффициенты!). Докажите, что, если у многочлена в правой части нет кратных корней, то эта кривая гладка. Специально рассмотрите случаи $g = 0, 1, 2$.

2.2. Рассмотрите на кривой из задачи **2.1** функции $\big(U = \frac{1}{u}, V = \frac{v}{u^{g+1}}\big)$. Какому полиномиальному соотношению удовлетворяют эти функции?

2.3. Выразите (u, v) через (U, V). Являются ли кривые, определённые уравнениями в этих парах координат (см. предыдущие две задачи), бирационально изоморфными?

2.4. Рассмотрите на кривых из предыдущих трёх задач дифференциалы $\omega_k := \frac{u^k \mathrm{d}u}{v}$. При каких k они не имеют полюсов ни на одной из кривых?

2.5. Пусть $a > b > 0$ – вещественные числа. Их арифметическое и геометрическое средние определяются формулами $a_1 := \frac{a+b}{2},\ b_1 := \sqrt{ab}$. Докажите, что

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{a_1^2\cos^2\phi + b_1^2\sin^2\phi}}.$$

Указания. Гаусс: воспользуйтесь подстановкой $\sin\phi = \frac{2a\sin\phi_1}{a+b+(a-b)\sin^2\phi_1}$.
Якоби: сперва установите соотношения $\cos\phi = \frac{2\cos\phi_1\sqrt{a_1^2\cos^2\phi_1 + b_1^2\sin^2\phi_1}}{a+b+(a-b)\sin^2\phi_1}$ и $\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi} = a\frac{a+b-(a-b)\sin^2\phi_1}{a+b+(a-b)\sin^2\phi_1}$, и только после этого переходите к дифференциалам: докажите $\mathrm{d}\phi = \frac{a+b-(a-b)\sin^2\phi_1}{a+b+(a-b)\sin^2\phi_1}\frac{a\mathrm{d}\phi_1}{\sqrt{a_1^2\cos^2\phi_1 + b_1^2\sin^2\phi_1}}$.

2.6. Пусть $a, b \in \mathbb{R},\ , a > b > 0$, а кривые **Small** и **Big** заданы уравнениями

$$v^2 = (1-u^2)\Big(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}u^2\Big)$$

и

$$V^2 = (1-U^2)\Big(1 - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}U^2\Big).$$

Убедитесь, что формула $(U, V) \mapsto (\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{1}{U}, -\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{V}{U^2})$ определяет инволюцию **Big** $\to$ **Big**, а факторизация по ней – 2-изогению (Гаусса-*Ландена*) **Big** $\to$ **Small**, задаваемую формулой

$$(u, v) \mapsto \Big(\frac{2aU}{(a-b)U^2 + a + b}, (a+b)\frac{(a-b)U^2 - a - b}{(a-b)U^2 + a + b}V\Big).$$

Убедитесь, что абелевы дифференциалы на этих кривых связаны соотношением $\frac{\mathrm{d}u}{v} = \frac{2a}{a+b}\cdot\frac{\mathrm{d}U}{V}$. Рассмотрите численные примеры.