Задачи Г.Б. Шабата к лекции 3

3.1. Проверьте формулу Лагранжа-Гаусса для $a = 2, b = 1$. [Ответ: 0.686440250...]

3.2. Для многочленов X, Y определим их *вронскиан* $[X, Y] := X'Y - XY'$. Проверьте *тождество Якоби*: $\big[[X, Y], Z\big] + \big[[Y, Z], X\big] + \big[[Z, X], Y\big] = 0$.

3.3. Убедитесь, что, если $\deg X \le 2$ и $\deg Y \le 2$, то также $\deg[X, Y] \le 2$. **Для слыхавших об алгебрах Ли:** убедитесь, что пространство квадратных трёхчленов с операцией [,] изоморфно алгебре sl_2 (алгебре бесследных 2×2 матриц с операцией коммутирования, или же алгебре *инфинитиземальных* дробно-линейных преобразований). **Для не слыхавших:** установите связь обсуждаемой структуры с пространством $\mathbb{R}^3$, в котором введено *векторное произведение*.

Задачи 3.4/3.6 – из вступительного экзамена École Normale Supérieure, 1988.

3.4. Пусть вещественные числа $a^\pm, b^\pm, c^\pm$ удовлетворяют неравенствам $a^- \le a^+ \le b^- \le b^+ \le c^- \le c^+$. Образуем квадратные трёхчлены

$A(x) := (x - a^-)(x - a^+), B(x) := (x - b^-)(x - b^+), C(x) := (x - c^-)(x - c^+)$.

Построим новые квадратные трёхчлены

$$A_1 := [B, C], B_1 := [C, A], C_1 := [A, B];$$

Докажите, что все корни этих многочленов вещественны. Обозначим $a_1^\pm$ корни A_1, $b_1^\pm$ корни B_1, $c_1^\pm$ корни C_1, причём выберем их так, чтобы $a_1^- \le a_1^+, b_1^- \le b_1^+, c_1^- \le c_1^+$. Упорядочите полученные 12 вещественных чисел $a^\pm, b^\pm, c^\pm; a_1^\pm, b_1^\pm, c_1^\pm$. **Настоятельный совет.** Начните с численного примера.

3.5*. Установите связь между конструкцией предыдущей задачи и преобразованием Ришело, улучшающим небрежно описанный вокруг окружности треугольник заменой *секущих на касательные*. **Указание.** Превратите окружность в прямую с помощью стереографической проекции.

3.6. В обозначениях задачи **3.4.** рассмотрим кривые $y^2 = A(x)B(x)C(x)$ и $\delta y_1^2 = A_1(x_1)B_1(x_1)C_1(x_1)$, δ – определитель перехода от базиса $\langle 1, x, x^2\rangle$ к базису A, B, C в пространстве квадратных трёхчленов. Убедитесь, что переход от A, B, C к A_1, B_1, C_1 реализуется *алгебраическим соответствием* между этими кривыми, задаваемым формулами $A(x)A_1(x_1) + B(x)B_1(x_1) = 0, yy_1 = (x - x_1)A(x)A_1(x_1)$.

3.7. Найдите численное значение какого-либо суперэллиптического интеграла. Проверьте его, несколько раз применив замену переменных из предыдущих задач.