Дубна-2018

Задачи Г.Б. Шабата к лекции 4

4.1. Пользуясь всеми доступными вам вычислительными средствами, как можно точнее вычислите несколько членов последовательности π_n, определённых формулой

$$\boxed{\pi_n := \frac{2a_{n+1}^2}{1-\sum_{k=0}^{n} 2^k c_k^2}}$$

где, как обычно, $a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}$ с начальными членами $a_0 := 1, b_0 := \frac{1}{\sqrt{2}}$, и введена новая вспомогательная последовательность $c_n := \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$.

Ответ с точностью до миллионных:

$$\pi_0 = 2.914213\ldots$$
$$\pi_1 = 3.140579\ldots$$
$$\pi_2 = 3.141592\ldots$$
$$\pi_3 = 3.141592\ldots$$
$$\ldots$$

4.2. Докажите, что последовательность π_n, введённая в предыдущей задаче, монотонно возрастает и ограничена сверху – следовательно, имеет <u>какой-то</u> предел.

4.3. Поверив в неравенство

$$\pi - \pi_{n+1} \leq \frac{(\pi - \pi_n)^2}{2^{n+1}\pi^2},$$

выясните, сколько членов последовательности π_n надо взять, чтобы получить 2018 десятичных знаков числа π.

4.4. Разложите *полный эллиптический интеграл первого рода*

$$\mathrm{K}(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

в ряд Тейлора.

4.5. Пользуясь результатом предыдущей задачи, численно проверьте функциональное уравнение

$$\mathrm{K}(k) = \frac{1}{1+k}\mathrm{K}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right).$$

для нескольких значений k.