Динамика многоугольников и сверхбыстрые приближения
Дубна, 2018

Лекция 1
Геометрические итерации

1.0. Итерации и динамические системы

Итерации строятся на основе произвольного отображения

$$f : X \to X$$

произвольного множества в себя. Когда такое отображение задано, рассматривают его *композиционные степени*

$$f^{2\circ} := f \circ f : X \to X : x \mapsto f\big(f(x)\big)$$

$$f^{3\circ} := f \circ f \circ f : X \to X : x \mapsto f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$$

и т.д. Процедуру построения отображений $f^{2\circ}$, $f^{3\circ}$, ... по отображению f называют *итерированием* отображения f, а сами композиционные степени отображения f называют также *итерациями* этого отображения.

Отображение $f : X \to X$ задаёт так называемую *дискретную динамическую систему* на множестве X. О самом множестве X предлагается думать как о *пространстве состояний* некоторой физической системы, а об отображении f – как о законе перехода из произвольного состояния в *следующее.*

Основной интерес представляют так называемые *траектории*

$x \mapsto f(x) \mapsto f^{2\circ}(x) \mapsto f^{3\circ}(x) \mapsto \dots$ элементов $x \in X$. В частности, особую роль играют *неподвижные точки* отображения f, то есть решения уравнения $f(x) = x$. При наличии некоторых дополнительных структур на множестве состояний X можно говорить об *устойчивых* неподвижных точках (если точка x достаточно *близка* к неподвижной точке x_0, то $\lim_{n\to\infty} f^{n\circ}(x) = x_0$) и о *притягивающих* неподвижных точках (если точка x лежит в некотором достаточно "обширном" множестве состояний, то $\lim_{n\to\infty} f^{n\circ}(x) = x_0$).

Поведение траекторий вблизи "сверхпритягивающих" точек двух динамических систем – главная тема нашего курса.

Читателю предлагается освоить введённые понятия, решив задачи **1.1.** и **1.2.** – посвящённые, впрочем, динамическим системам на *числовых* множествах.

1.1. Преобразования многоугольников

Чтобы не отвлекаться от основных идей курса, мы не будем углубляться в формализацию понятия *многоугольник*. Для продвинутых читателей <u>множество</u> n-угольников – это фактор-множество

$$\mathcal{P}_n := \frac{\mathbb{C}^n}{\Gamma},$$

где точка $(A_1, \dots, A_n)$ пространства $\mathbb{C}^n$ отождествляется с последовательностью *вершин* многоугольника, а подходящая группа Γ (часто содержащая циклическую подгруппу C_n циклических *перенумераций* вершин) отождествляет последовательности, соответствующие *конгруэнтным*[1] многоугольникам. В геометрии издревле принято не слишком беспокоиться о различии между индивидуальными многоугольниками и их классами конгруэнтности; мы тоже не будем заострять внимание на этом различии, предоставляя читателю в каждом случае определить подходящую группу Γ.

Естественные два выбора – группа покоординатных преобразований подобия $\Gamma = \{A_k \mapsto \lambda A_k + \tau \mid \lambda \in \mathbb{C}^\times, \tau \in \mathbb{C}\}$ и покоординатных изометрий $\Gamma = \{A_k \mapsto \lambda A_k + \tau \mid \lambda \in \mathbb{C}_1^\times, \tau \in \mathbb{C}\}$, где $\mathbb{C}^\times$ – мультипликативная группа комплексных чисел, а $\mathbb{C}_1^\times$ – её подгруппа $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. В обоих случаях речь идёт о *полупрямых произведениях* $\Gamma \simeq \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^\times$ и $\Gamma \simeq \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}_1^\times$.

Часто бывает полезно также заменить пространство $\mathbb{C}^n$ на его

[1] в случае тривиальной группы Γ *равным*

открытое по Зарискому Г-инвариантное подмножество. Это бывает нужно, чтобы избавиться от *вырожденных* многоугольников – например, таких, в которых сливаются вершины, то есть $A_i = A_j$ при $i \neq j$. Выбор таких подмножеств мы также будем оставлять читателю.

1.1.0. О преобразованиях НЕ из этого курса. Увы, хорошо известные преобразования многоугольников $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, имеющие прозрачный геометрический смысл, нам по недостатку времени придётся в основном оставить в стороне. Мы ограничимся ссылкой на замечательную книгу [**БахманШмидт1973**], в которой авторы, отправляясь от конструкций школьной геометрии, выходят на вполне содержательную взрослую теорию, которая, видимо, допускает дальнейшее развитие. Предлагаем также подумать над задачами **1.3**, **1.4**, **1.5**.

Дальше мы будем заниматься отображениями, которые не так естественны геометрически, но приводят к глубокой и трудной математике.

1.1.1. Преобразование Гаусса. Обозначим П множество прямоугольников и построим преобразование

$$\gamma : \Pi \longrightarrow \Pi,$$

которое назовём *отображением Гаусса*[2].

Сначала опишем это отображение словесно. Его природа связана с (неточно поставленной) задачей *построения квадрата "размером" с заданный прямоугольник.*

Сформулированную задачу можно сопоставить с парой более известных и вместе с тем <u>точно</u> поставленных задач, а именно *квадратуры круга* и *спрямления окружности*:

построить квадрат той же площади,
что заданный круг

и

построить квадрат того же периметра,
что заданная окружность.

[2]согласно увлекательной статье [**Cox1984**], до Гаусса это отображение рассматривал Лагранж и даже заметил связи, которые будут раскрыты в нашем курсе, но не стал развивать законченной теории, как это сделал Гаусс.

Этим задачам более двух тысяч лет. Античные математики надеялись решить их с помощью циркуля и линейки, и невозможность такого решения (вытекающая из *трансцендентности* числа π, которому мы посвятим последнюю лекцию этого курса) – один из сильнейших результатов недавних столетий.

Если же перейти от круга к прямоугольнику, то задачи квадратуры и спрямления можно смешать. Отображение Гаусса ставит в соответствие прямоугольнику $P \in \Pi$ прямоугольник

$\gamma(P) \in \Pi$, одна сторона которого
равна стороне квадрата с тем же *периметром*, что у P,
а другая – с той же *площадью*, что у P.

Эта задача поставлена точно; ей мы и будем заниматься.

Поскольку прямоугольники однозначно определяются парами длин своих (взаимно перпендикулярных) сторон, отображение Гаусса $\gamma : \Pi \longrightarrow \Pi$, как можно без труда убедиться, соответствует отображению

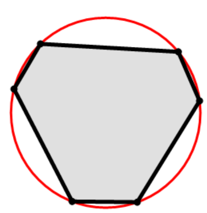
$$\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} : \big(a, b\big) \mapsto \big(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\big).$$

1.1.2. Преобразование Ришело. Обозначим Ш множество <u>вписанных</u> шестиугольников с небольшой дополнительной структурой, которая вскоре будет определена. Затем будет построено преобразование

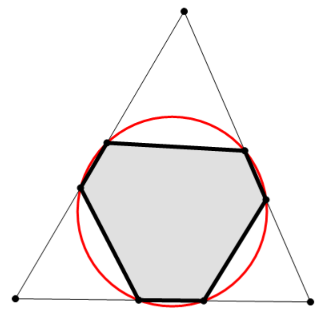
$$\rho : Ш \longrightarrow Ш,$$

которое будет названо *отображением Ришело.*

У наших вписанных шестиугольников будут чередоваться длинные и короткие стороны:

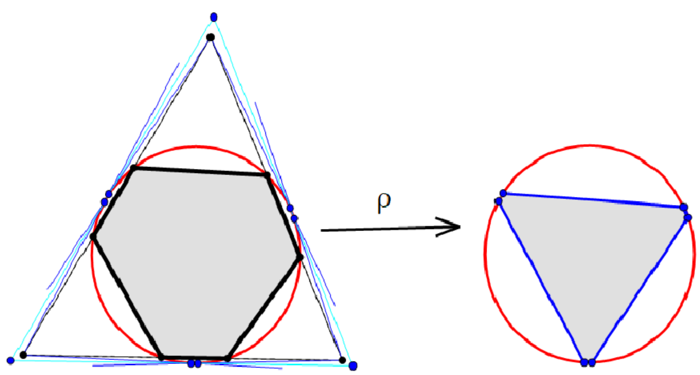


Каждый такой шестиугольник предлагается воспринимать как приближённый треугольник, который хотели описать вокруг окружности, но чуть-чуть промахнулись:



Чуть научнее выражаясь, мы рассматриваем треугольник, образованный продолжениями коротких сторон; назовём его *треугольником Ришело* (можно сопоставить его с "треугольником" Паскаля).

Отображение Ришело ρ исправляет неточность, заменяя секущие, проведённые из вершин треугольника Ришело – то есть стороны треугольника Ришело – на касательные:



Возникает новый шестиугольник, в котором короткие стороны ещё гораздо короче; он и является, по определению, преобразованием Ришело исходного.

Остаётся строго определить вышеупомянутую дополнительную структуру на множестве сторон вписанного шестиугольника; их использованное разделение на "короткие" и "длинные" имеет скорее психологическую, чем математическую, природу. Вписывание шестиугольника в окружность определяет и на множестве его вершин, и на множестве его сторон *циклические порядки*, то есть простые транзитивные действия группы $\mathsf{C}_6 := \frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ (*кто следующий по кругу*?). Орбиты подгруппы $\mathsf{C}_3 \subset \mathsf{C}_6$ – два непересекающихся трёхэлементных подмножества. (Произвольный) выбор одного из них и задаёт требуемую структуру.

1.2. Итерации преобразований Гаусса и Ришело

1.2.0. Об общих свойствах. Динамические системы, порождённые рассмотренными преобразованиями, на данной стадии наших конструкций роднит то, что все траектории с огромной скоростью приближаются к неподвижным точкам итерируемых отображений – квадрату и шестиугольнику, всё-таки выродившемуся в треугольник.

В последующих лекциях будет выявлено более глубокое родство.

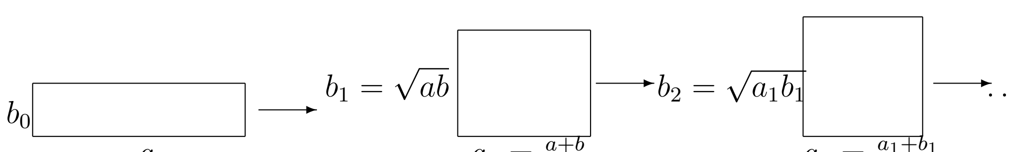
1.2.1. Пример итераций Гаусса. Напомнив обозначения для преобразования Гаусса

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \; b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n},$$

приведём пример, в котором длины сторон выражены в пикселях, и можно что-то увидеть:

n	a_n	b_n
0	80	20
1	50	40
2	45	44.721...
3	44.860...	44.860...
4	...	...

Вот последовательность соответствующих прямоугольников, очень быстро становящихся неотличимыми от квадрата.



1.2.2. О примере итераций Ришело. Разборчиво нарисовать даже 3-ю итерацию трудно. См. компьютерную демонстрацию Richelot.gsp.

Численные эксперименты значительно сложнее, чем с арифметико-геометрическим средним, и будут обсуждаться в последующих лекциях.

1.2.3. agM и его обобщения. Напомним наши обозначения для итерации Гаусса: пусть $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Положим $a_0 = a, b_0 = b$ и затем

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

для $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. *Средним арифметико-геометрическим* чисел a и b называется предел[3]

$$\mathrm{agM}(a, b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Доказательство существования и равенства пределов несложно и предоставляется читателю (можно также найти его в [**Cox1984**]). Частный случай предлагается разобрать в упражнении **1.6.**

Литературные и исторические комментарии

Обе конструкции, которыми мы занимались, были тщательно изучены ещё в 19-м веке.

Основной вклад в изучение алгебро-геометрического среднего внёс Гаусс, который строил свою теорию в 1794-1800 гг.; однако он, по обыкновению, записывал свои результаты в личном дневнике, а опубликованы они были лишь посмертно в его собрании сочинений [**Gauss1870**]. Как было упомянуто, фрагменты теории были известны Лагранжу в 18-м веке; их можно найти в [**Lagrange1784**].

Другая конструкция была разработана рядом менее известных авторов. Первое упоминание о ней появилось в короткой заметке [**Richelot1836**], посвящённой методам вычисления *ультраэллиптических* интегралов (мы будем обсуждать их в последующих лекциях); основной результат был приведён без доказательства и лишь сопровождался примерами. Доказательство было приведено в длинной статье [**Richelot1837**], трудной для чтения, не содержащей известной нам геометрической интерпретации и, согласно [**BostMestre1988**], в основном забытой к концу века. Связь с алгебраической геометрией, элементарный аспект которой мы обсудили в этой лекции, была установлена в работе [**Humbert1901**] с использованием аналитических результатов работы [**Konigsberger1865**].

[3] мы пользуемся обозначениями Гаусса, см. [**Cox1984**]; аббревиатура образована от **a**rithmetic-**g**eometric **m**ean

Современное изложение теории можно найти в очень ясно написанных работах [**Cox1984**] и [**BostMestre1988**].

Список литературы

[**BostMestre1988**] Jean-Benoit Bost and Jean-Francois Mestre, *Moyenne arithmético-géométrique et périodes des courbes de genre 1 et 2*. Gaz. Math. 38 (1988), 36–64.

[**Cox1984**] David A. Cox, *The arithmetic-geometric mean of Gauss.* L'Enseignemant Mathématique, t. 30(1984), p. 275–330.

[**Gauss1870**] C.F. Gauss, *Werke*, 12 Vol., Göttingen, 1870-1927.

[**Humbert1901**] Georges Humbert, *Sur la transformation ordinaire des fonctions abéliennes.* Journal de mathématiques pures et appliquées, 5e série, tome 7 (1901), p. 395-418.

[**Konigsberger1865**] L. Königsberger, *Ueber die Transformation der Abelschen Functionen erster Ordnung.* J. reine angew. Math, 64(1865), 17-42.

[**Lagrange1784**] Lagrange, J.L., *Sur une nouvelle Méthode de Calcul Intégrale pour différentielles affectées d'un radical carré.* Mem. Acad. R. Sci. Turin II 2, 252–312 (1784–1785).

[**Richelot1836**] F. Richelot, *Essai sur une méthode générale pour déterminer la valeur des intégrales ultra-elliptiques, fondée sur des transformations remarquables de ces transcendantes.* C.R. Acad. Sci. Paris 2, 1836, 622-627.

[**Richelot1837**] F. Richelot, *De transformatione integralium Abelianorum primi ordinis commentatio.* J. Reine Angew. Math. 16, 1837, 221-341.

[**БахманШмидт1973**] Фридрих Бахман, Экарт Шмидт, *n-угольники.* М., "Мир 1973.