Nice, 18.5.7 – Ратмино, 18.7.21

Динамика многоугольников и сверхбыстрые приближения
Дубна, 2018

Лекция 2
Эллиптические и ультраэллиптические интегралы

2.0. Длина дуги эллипса

Эллипс с полуосями a и B – это "сплюснутая окружность" , задаваемая уравнением
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$
Эллипс допускает *параметризацию*
$$x=a\cos t,\ \ y=b\sin t,$$
превращающую "дифференциал длины" в обычный дифференциал:
$$\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{(-a\sin t\cdot \mathrm{d}t)^2+(b\cos t\cdot \mathrm{d}t)^2}=$$
$$=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\cdot \mathrm{d}t.$$
Это – единственное маленькое вычисление в ходе преобразований рассматриваемых нами классических интегралов, способное вызвать небольшой интеллектуальный дискомфорт у строгого

студента-математика 21-го века[1]. Можно, однако, не особо в него вдумываясь, считать это вычисление лишь мотивирующим *определение* длины дуги эллипса как

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \cdot \mathrm{d}t.$$

Мы в дальнейшем будем обсуждать некоторые обобщения этого интеграла, называемые *эллиптическими, гиперэллиптичскими, ультраэллиптическими* и т. п. В основном, чтобы ограничить количество параметров (аргументов) сосредоточимся на так называемых *полных* интегралах, которые в рассмотренном примере соответствуют длине эллипса целиком и представляют собой значения трансцендентной функции

$$\mathrm{Len}(a,b) := \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \cdot \mathrm{d}t.$$

По возможности будем следовать обозначениям статьи [**BostMestre1988**], далее BM.

2.1. Обобщения

2.1.0. Интегралы алгебраических форм. Более традиционная запись интегралов вроде длины дуги эллипса:

$$\ell en = \int \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \cdot \mathrm{d}\varphi.$$

(Предполагаем $a \geq b > 0$).

Алгебраичнее: $\sin\varphi =: u$, тогда

$$\ell en = \int \sqrt{a^2(1-u^2) + b^2u^2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{\sqrt{a^2 - (a^2-b^2)u^2}}{\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u =$$

$$= a \int \frac{\sqrt{1-k^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u,$$

где $k := \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

Принято переписывать

$$\frac{\ell en}{a} = \int \frac{1-k^2u^2}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \mathrm{d}u,$$

[1] $(\mathrm{d}x)^2 \in$???

и, далее, этот интеграл разбивается на два:

$$\frac{\ell en}{a} = \int_I - k^2 \int_{II},$$

где

$$\int_I := \boxed{\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}}$$

эллиптический интеграл 1-го рода, одно из главных наших действующих лиц, и

$$\int_{II} := \int \frac{u^2\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

– *эллиптический интеграл 2-го рода,* которым мы всерьёз заниматься не будем.

Следующий важный шаг: введение <u>зависящей от параметра k</u> кривой

$$\boxed{v^2 = (1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

называемой *квартикой Лежандра.* Теперь упомянутые интегралы приобретают вид

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{v} \text{ и } \int \frac{u^2\mathrm{d}u}{v},$$

где u и v связаны полиномиальным соотношением Лежандра. Очевидное обобщение – для многочленов $A, B, F \in \mathbb{R}[x,y]$ интегралы вида

$$\int \frac{A(x,y)\mathrm{d}x}{B(x,y)},$$

где x и y связаны полиномиальным соотношением $F(x,y) = 0$ – или, иначе говоря, y – (многозначная) алгебраическая функция от x. Здесь требуется только, чтобы F не был константой ПО v и B не делился бы на F; в этом случае $A, B \in \frac{\mathbb{R}[x,y]}{F\mathbb{R}[x,y]}$ – полиномиальные функции на кривой "$F(x,y) = 0$" , причём B – не тождественный 0. Чуть более общая запись того же самого – класс выражений

$$\int \frac{A_1\mathrm{d}x + A_2\mathrm{d}y}{B},$$

то есть *интегралов рациональных* (дифференциальных 1-)*ФОРМ*– а НЕ ФУНКЦИЙ, как их обычно называют по 200-летней небрежности. "Того же самого" – в силу тождества

$$\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y \equiv 0.$$

Соответствующие определённые интегралы имеют смысл на некоторых интервалах (между *особыми* точками...). Многие элементарные функции относятся к этому классу:

$$\log x_1 := \int_1^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{x},\ \text{где } x_1 > 0;$$

$$\operatorname{arctg} x_1 := \int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},\ \text{где } -\infty < x_1 < \infty;$$

$$\arcsin x_1 := \int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{где } -1 \le x_1 \le 1 \text{ и } F = x^2 + y^2 - 1.$$

Математика вступала в 19 век с надеждой разобраться в обобщениях этих функций на введённый общий класс и... ничего не получилось. Но неудачи привели к более общим подходам, увенчавшимся блистательными успехами. См. следующий подраздел.

2.1.1. Выход в комплексную область. Надо было "всего лишь" заменить $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$! И, кроме того

- преодолеть зависимость от вложений, то есть перейти от геометрии подмножеств фиксированных пространств к *внутренней* геометрии (Гаусс – … – Риман);
- перейти от аффинной геометрии к проективной (предтечи – Леонардо да Винчи, Дезарг,..., геометры 19-го века – Понселе, Шаль, ...);
- научиться *разрешать особенности* алгебраических кривых (несколько национальных школ алгебраической геометрии, прежде всего – немецкая, английская, итальянская).

Результаты впечатляют. Главные классики – Абель, Якоби, Риман. Одно из существенных достижений (играющее важную роль в нашем курсе) – *теоремы сложения*, обобщающие

$$\log x_1 + \log x_2 \equiv \log(x_1 x_2),$$

$$\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 \equiv \operatorname{arctg} \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}$$

и т. п.

Одно из важных идейных и технических достижений этого периода – строгое понятие *дифференциала.* Пришлось отнести "бесконечно малые приращения" к области метафор. Кроме того, оказалось, что дифференциалы не обязательно интегрировать: они интересны сами по себе и, кроме того, имеют смысл над произвольными полями.

В терминах атласов и локальных координат естественно определяются *полюса* дифференциалов и их *порядки.*

2.1.2. Род, абелевы дифференциалы. Над $\mathbb{C}$ важнейшим топологическим (=дискретным...) инвариантом оказывается *род* кривой: количество "*ручек*" десингуляризованной проективизованной модели поля рациональных функций на кривой.

НУЖНА КАРТИНКА!

Абелевым дифференциалом (иногда считается правильным говорить *регулярным*) называется дифференциал без полюсов.

Теорема. *Пространство абелевых диффереациалов на комплексной алгебраической кривой конечномерно над* $\mathbb{C}$.

Размерность этого пространства <u>альтернативное определение</u> *рода* комплексной кривой. Оно обобщается на кривые над произвольным полем.

2.1.3. Кривые рода $\leq$ 2. Мы приведём их полную классификацию, оставляя читателю продумывания классификации алгебраических кривых (то есть слова *все* в приводимой ниже формулировке...).

Теорема. *Все кривые рода* ≤ 2 *являются десингуляризациями проективизаций кривых, заданных уравнениями*

$$w^2 = P(z),$$

где P *– многочлен степени* ≤ 6 *без кратных корней.*

Согласно (частично...) общепринятой традиции, мы будем пользоваться парой координат $(z, w) = (x, y)$ в случае *нечётной* степени многочлена P, и парой координат $(z, w) = (u, v)$ в случае *чётной* степени – как в определении уже упомянутой квартики Лежандра, к которому следовало бы добавить условие $k \notin \{0, \pm 1\}$.

Кривые рода 0, так называемые *рациональные*, над алгебраически замкнутым полем не особенно интересны. Все рациональные дифференциалы на них – например, в случае $P = 1 - u^2$ – интегрируются в элементарных функциях – с этого начинаются традиционные курсы математического анализа. Мы же сейчас перейдём к задаваемым интегралами так называемым *высшим трансцендентным* функциям.

2.2. Эллиптические интегралы

2.2.0. Кривые рода 1. Уточним теорему о кривых рода ≤ 2.

Теорема. *Кривая, заданная уравнением*

$$w^2 = P(z),$$

где P – многочлен без кратных корней, имеет род 1 тогда и только тогда, когда степень P равна 3 или 4.

Поясним неопределённость степени. Пусть эллиптическая кривая задана уравнением

$$v^2 = (u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)(u-u_4) \qquad \textbf{(2.2.0a)}$$

в координатах u, v, о которых мы договорились (то есть u_1, u_2, u_3, u_4) – разные числа. Полезно представлять себе эту кривую вместе с проекцией $(u, v) \mapsto u$, *разветвлённой* над точками $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Захотев перевести одну из точек ветвления в бесконечность, введём новую координату соотношением

$$x := \frac{1}{u-u_4}.$$

Поделив уравнение **(2.2.0a)** на $(u-u_4)^4$, придём к

$$\frac{v^2}{(u-u_4)^4} = \frac{u-u_1}{u-u_4} \cdot \frac{u-u_2}{u-u_4} \cdot \frac{u-u_3}{u-u_4} =$$

$$= \frac{u-u_4+u_4-u_1}{u-u_4} \cdot \frac{u-u_4+u_4-u_2}{u-u_4} \cdot \frac{u-u_4+u_4-u_3}{u-u_4} =$$

$$= \big(1+(u_4-u_1)x\big)\big(1+(u_4-u_2)x\big)\big(1+(u_4-u_3)x\big).$$

Введение

$$y := \frac{v}{(u-u_4)^2}$$

и

$$\lambda_i = u_4 - u_i \text{ для } i = 1, 2, 3 \qquad \textbf{(2.2.0b)}$$

даёт кривую

$$y^2 = (1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)(1-\lambda_3 x). \qquad \textbf{(2.2.0c)}$$

Заметим, что многочлен в правой части **(2.2.0c)**

Итак, пара функций $\left(x = \frac{1}{u-u_4}, y = \frac{v}{(u-u_4)^2}\right)$ определяет отображение кривой **(2.2.0a)** на кривую **(2.2.0c)**. Читатель легко проверит, что пара функций $(u = u_4 + \frac{1}{x}, v = \frac{y}{x^2})$ осуществляет *почти* обратное отображение.

Почти – поскольку оба отображения не определены в конечных множествах точек; такие почти взаимно обратные отображения кривых называются *бирациональными.* При интегрировании они определяют обратимые замены переменных.

Мы объяснили, почему представления эллиптических кривых с помощью многочленов степеней 3 и 4 принципиально не различаются. В дальнейшем, однако, окажется, что степень 3 в некоторых отношениях предпочтительнее.

2.2.1. Канонические виды. В предыдущем разделе мы убедились, что "одну и ту же" кривую можно задать уравнениями многими разными способами; полное освоение этого тезиса и знаменует упомянутый выше переход от *внешней* геометрии к *внутренней.*

Изобилие записей уравнений определяется (среди многих причин) тем, что *абсциссы* эллиптических кривых в том виде, в котором мы их рассматриваем, определены с точностью до дробно-линейного преобразования $u \mapsto \frac{au+b}{cu+d}$ в случае записи с многочленами степени 4 и с точностью до аффиннного преобразования $x \mapsto ax + b$ в случае степени 3.

Однако какая-то стандартизация уравнений желательна как из психологических соображений, так и из вычислительных: для табулирования, составления библиотек в системах компьютерной алгебры и т.д. В течение столетий изучения эллиптических функций и эллиптических интегралов накоплены десятки канонических видов, из которых мы пока упомянули только квартику Лежандра. Это чуть-чуть громоздкое наименование связано с тем, что уравнение

$$y^2 = x(x-1)(x-t)$$

тоже связывается с именем Лежандра; мы предпочтём называть кривую такого вида *кубикой Лежандра.*

Другие канонические виды будут вводится и использоваться по мере необходимости.

2.2.2. Случай вещественных кривых.

КАРТИНКИ!!

2.2.3. Численные значения, современные технологии. Интерес к эллиптическим интегралам в 18-м веке в значительной степени стимулировался их возникновением в задачах механики; выдающиеся математики тратили годы жизни на составление таблиц эллиптических интегралов.

Современного инженера проблема получения численного значения эллиптического интеграла (а также изображения соответствующих графиков, таблиц зависимостей каких-либо величин от параметров и т.п.) заботит не больше, чем трудности при путешествии в карете из Петербурга в Москву. К услугам современного инженера есть компьютерные программы, знающие "всё" об эллиптических интегралах.

В качестве иллюстрации приведём несколько примеров использования программы MAPLE.

Если попросить её вычислить неопределённый связанный с кубикой Лежандра неопределённый интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}},$$

то программа ответит

$$2\,\frac{t}{\sqrt{-tx^2+x^3+tx-x^2}} \times \sqrt{-\frac{x-t}{t}}\sqrt{\frac{x-1}{t-1}}\sqrt{\frac{x}{t}} \times \mathit{EllipticF}\left(\sqrt{-\frac{x-t}{t}}, \sqrt{\frac{t}{t-1}}\right).$$

Достижение небольшое, однако свидетельствует о том, что в библиотеке программы есть функция $\mathit{EllipticF}$, в терминах которой выдаётся ответ.

Если же захотеть вычислить зависящий от параметра t определённый интеграл

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}},$$

то получим не умещающийся на экране ответ в терминах $\mathit{EllipticK}(\sqrt{\frac{t-1}{t}})$ и $\mathit{EllipticF}(\sqrt{\frac{t-1}{t}}, \sqrt{\frac{t-1}{t}})$, из факта существования которого следует очевидная информация уже про две функции, в которых при желании можно разобраться: почитать справочную литературу, начертить графики, разложить в ряды и т.п.

Если же, наконец, запросить численное значение, скажем, интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)(x-\frac{1}{2})}},$$

то программа ответит

$$2\,\mathit{EllipticK}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

Разбираться в функции *EllipticK* не обязательно: можно запросить численно значение и получить $3.708149354\ldots$. Если полученной точности недостаточно, то можно настроить программу на вычисление, скажем, 30 десятичных знаков и получить

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}} = 3.70814935460274383686770069440\ldots.$$

Разумеется, ощущение всесилия от подобных операций имеет мало общего с пониманием математической природы происходящего.

2.2.4. Тригонометрическая форма. Возвращаемся к абелеву дифференциалу

$$\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Равенство достигается заменой переменной $u = \sin\varphi$, параметры связаны соотношением $k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. Преимущество тригонометрической формы: $b \to a$.

ВМ, стр. 39:

$$x = a + (b-a)\sin^2\varphi.$$

ВМ, стр. 40:

$$y^2 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3),$$

$$(e_3 < e_2 < e_1)$$

$$2\int_{e_3}^{e_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(e_1-e_3)\cos^2\varphi + (e_1-e_2)\sin^2\varphi}}.$$

2.2.5. Связь с agM: формула Лагранжа-Гаусса. Главная формула: "наша"

$$\boxed{\boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\mathrm{agM}(a,b)}}}$$

и ВМ, стр. 40:

$$\boxed{2\int_{e_3}^{e_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} = \frac{\pi}{2\mathrm{agM}(\sqrt{\mathrm{e}_1-\mathrm{e}_3}, \sqrt{\mathrm{e}_2-\mathrm{e}_3})}}$$

2.3. Подстановка Гаусса и изогении

2.3.0. Эллиптические кривые как группы. ЭТО ВСЕ ЗНАЮТ...

2.3.1. Конечные группы сдвигов и факторы по ним. См. задачу 2.6.

2.3.2. Изогении. ВМ, стр. 44:

Снова $e_1 > e_2 > e_3$, но теперь к тому же $e_1 + e_2 + e_3 = 0$. Положим

$$a := \sqrt{e_1 - e_3}, b := \sqrt{e_1 - e_2}.$$

Отображение Гаусса перепишем в виде

$$a' = \frac{a+b}{2}, b' = \sqrt{ab}.$$

Положим

$$e_1' := \frac{a'^2 + b'^2}{3}, e_2' := \frac{a'^2 - 2b'^2}{3}, e_1' := \frac{b'^2 - 2a'^2}{3}.$$

Оказывается $e_1' > e_2' > e_3'$ и

$$e_1' - e_3' = a'^2,$$
$$e_1' - e_2' = b'^2$$

при $e_1' + e_2' + e_3' = 0$. Теперь 2-изогения реализуется формулами

$$x = x' + \frac{(e_3' - e_1')(e_3' - e_2')}{x' - e_3'},$$

$$y = y'\Big(1 - \frac{(e_3' - e_1')(e_3' - e_2')}{(x' - e_3')^2}\Big).$$

2.3.3. Связь 2-изогений с подстановками Гаусса. См. задачу 2.6. и ВМ выше, согласно которому

$$\int_{e_1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} = \int_{e_1'}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{(x'-e_1')(x'-e_2')(x'-e_3')}}$$

Список литературы

[**BostMestre1988**] Jean-Benoit Bost and Jean-Francois Mestre, *Moyenne arithmético-géométrique et périodes des courbes de genre 1 et 2.* Gaz. Math. 38 (1988), 36–64.