Nice, 18.5.7 – Ратмино, 18.7.22 / 18.7.24

Динамика многоугольников и сверхбыстрые приближения
Дубна, 2018

Лекция 3
Решётки периодов и изогении якобианов кривых.

3.0. Торы и факторы $\mathbb{C}$ по решёткам

Решёткой будет называться подгруппа *аддитивной* группы $\mathbb{C}$. Она называется *кокомпактной*, если фактор по ней компактен. Другими мы заниматься не будем, так что будем называть их просто *решётками.*

Для решётки $\Lambda \subset \mathbb{C}$ главное действующее лицо, которому мы давать названия не будем – проекция

$$\mathbb{C} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$$

Она же называется *универсальной накрывающей* тора $\frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$.

3.1. От торов к кубическим кривым

3.1.0. Тригонометрический аналог. Вещественная версия универсальной накрывающей тора относится к школьной математике. В вещественной прямой $\mathbb{R}$, снова рассматриваемой как аддитивная группа, берётся подгруппа $2\pi\mathbb{Z}$, и снова рассматривается отображение факторизации

$$\mathbb{R} \longrightarrow \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}.$$

Фактор-группа реализуется как окружность $\mathbf{O}$, заданная на вещественной плоскости уравнением $x^2 + y^2 = 1$ (эта кривая не раз нам встречалась...). Отображение факторизации задаётся парой функций

$$\mathbb{R} \overset{(\cos,\sin)}{\longrightarrow} \mathbf{O},$$

и по существу это – <u>определение</u> основных тригонометрических функций.

Классические конструкции, которые мы сейчас бегло изложим, следует воспринимать как комплексифицированную тригонометрию.

3.1.1. $\wp$-функция Вейерштрасса. Один из (не очень точных) аналогов косинуса и синуса – это $\wp$-функция Вейерштрасса, которую мы сейчас введём, и её производная.

Обозначим "проколотую" решётку

$$\dot{\Lambda} := \Lambda \setminus \{0\}.$$

По определению[1],

$$\wp_\Lambda(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \Big(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\Big).$$

Этот ряд сходится в подходящем смысле для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ (уточните и проверьте!); без поправочных членов $-\frac{1}{\lambda^2}$ он расходился бы.

[1] обсуждаемая функция настолько замечательна, что для неё введён специальный типографский знак, как $\int$ для интеграла!

Производная $\wp_\Lambda$-функции имеет более простой вид (поправочные члены не нужны)

$$\wp'_\Lambda(z) := \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^3};$$

она, очевидно[2], Λ-периодична. Сама же $\wp_\Lambda$ тоже Λ-периодична, но это чуть менее очевидно – следует из периодичности $\wp'_\Lambda$ и из *чётности* $\wp_\Lambda$.

3.1.2. Дифференциальное уравнение Вейерштрасса. Как и синус, удовлетворяющий (ни от чего не зависящему) нелинейному дифференциальному уравнению $y'^2 + y^2 = 1$, функция Вейерштрасса удовлетворяет нелинейному алгебраическому дифференциальному уравнению с коэффициентами, зависящими от решётки:

$$\wp'_\Lambda(z)^2 = 4\wp_\Lambda(z)^3 - \mathrm{g}_2(\Lambda)\wp_\Lambda(z) - \mathrm{g}_3(\Lambda).$$

При использовании сокращённых записей этого уравнения, например, $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp_\Lambda - g_3$, следует помнить, что от чего зависит.

Коэффициенты g_2 и g_3, входящие в уравнение Вейерштрасса – замечательные функции решёток. Они пропорциональны *рядам Эйзенштейна*:

$$\mathrm{g}_2 = 60\mathrm{G}_2, \mathrm{g}_3 = 60\mathrm{G}_3,$$

где функции G_k решёток, определённые при $k \geq 2$, имеют вид

$$\mathrm{G}_k(\Lambda) := \sum_{\lambda\in\dot\Lambda} \frac{1}{\lambda^{2k}}.$$

3.1.3. Униформизация торов. Под *униформизацией* в 19-м веке понимали *параметризацию* кривых (или – изредка, по мере возможностей – многообразий высших размерностей), по возможности *неразветвлённую*, то есть локально взаимно-однозначную. Классические примеры – вышеупомянутая тригонометрическая униформизация окружности $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ или, возможно, самая древняя рациональная параметризация той же окружности (см, например, [**Fri1981**]) $t \mapsto (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$.

[2]для продумавших сходимость...

К этой компании относится и рассматриваемая нами униформизация[3]

$$z \mapsto \big(\wp(z), \wp'(z)\big)$$

кубической кривой $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$. У неё есть маленький недостаток по сравнению, скажем, с тригонометрической униформизацией: она <u>кажется</u> определенной лишь при $z \notin \Lambda$. Этот кажущийся недостаток, однако, преодолевается при переходе от *аффинного* взгляда на плоские алгебраические кривые к *проективному:* уравнение кривой в вейерштрассовой форме заменяется на однородное $y^2t = 4x^3 - g_2xt^2 - g_3t^3$, а униформизация – на отображение

$$z \mapsto (t : x : y) = \big(1 : \wp(z) : \wp'(z)\big).$$

3.2. От кубических кривых к торам

3.2.0. Об уравнениях кубических кривых. Общее уравнение кубической кривой на проективной плоскости с однородными координатами $(t : x : y)$ –

$$\begin{gathered} 0 = a_{030}x^3 + a_{021}x^2y + a_{012}xy^2 + a_{003}y^3 + \\ +a_{120}tx^2 + a_{111}txy + a_{102}ty^2 + \\ +a_{210}t^2x + a_{201}t^2y + \\ +a_{300}t^3. \end{gathered}$$

Все кривые соответствуют точкам $(a_{030} : \cdots : a_{300})$ проективного пространства $\mathbf{P}_9$. Наугад взятая точка этого пространства соответствует гладкой неприводимой кривой, но исключительные наборы коэффициентов соответствуют наборам различных вырождений – вплоть до *трёхкратной прямой*, задаваемой уравнением $x^3 = 0$.

Над полем, характеристика которого – не 2 и не 3, *достаточно невырожденная* кубическая кривая линейной заменой координат приводится к *пре-Вейерштрассову* виду

$$ty^2 = a_3x^3 + a_2tx^2 + a_1t^2x + a_0t^3,$$

где $a_3 \neq 0$. На этом месте традиционно переходят к аффинному уравнению (в карте $t \neq 0$ заменив проективные координаты $(t : x : y)$ на аффинные $(\frac{x}{t}, \frac{y}{t})$ или, что равносильно, положив в

[3]Речь, разумеется, идёт о *семействе торов*, зависящих от решётки Λ, или о *семействе кривых*, зависящих от параметров g_2, g_3; однако явное указание всех этих зависимостей сильно усложнило бы формулы...

проективном уравнении $t = 1$) и получают *пре-Вейерштрассово* аффинное уравнение

$$y^2 = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

которое и будет для нас основным. Дальнейшими аффинными заменами $x \leftarrow Ax+B$ его можно привести к различным каноническим видам, в том числе к *вейерштрассову*

$$\boxed{y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3}$$

Кубическая кривая в рассматриваемом виде всегда неприводима; она гладка тогда и только тогда, когда многочлен в правой части не имеет кратных корней. В вейерштрассовой форме это равносильно условию

$$\boxed{g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0}$$

3.2.1. Абелев дифференциал. С точностью до множителя такой дифференциал <u>без полюсов</u> единственен. В превейерштрассовой форме он имеет вид

$$\boxed{\omega := \frac{\mathrm{d}x}{y}}$$

Традиционно он записывается также "без y"

$$\omega := \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}}.$$

3.2.2. Периоды. Начиная с этого места, мы будем работать над $\mathbb{C}$ и интегрировать абелев дифференциал.

Разложим на множители кубический многочлен, участвующий в вейерштрассовом уравнении и дадим соответствующей аффинной кривой имя[4]

$$\dot{\mathbf{E}} : y^2 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3);$$

топологически она представляет собой *проколотый тор.* В проективной плоскости $\mathbf{P}_2(\mathbb{C})$ *замыкание* этой кривой добавляет к ней одну, "бесконечную" точку, которую мы обозначим O – она будет в дальнейшем играть важную роль. *Проективную* кривую, получившуюся в результате упомянутого замыкания, обозначим $\mathbf{E}$; таким образом,

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \setminus \{O\}.$$

[4]традиционное от слова **E**lliptic

Проективная комплексная кривая $\mathbf{E}$ является вещественной поверхностью и топологически представляет собой тор.

Интеграл (единственного с точностью до пропорциональности) абелева дифференциала по любому циклу кратко называется *периодом*. Об индивидуальных периодах в случае комплексной кривой не всегда удобно говорить, поскольку нет простого способа указывать циклы. Следующий фундаментальный результат позволяет обойти эту трудность.

Теорема. *Интегралы абелева дифференциала по всем циклам проективной кубики представляют собой решётку*

$$\Lambda := \oint_{\mathrm{H}_1(\mathbf{E})} \omega.$$

Теорема довольно глубока, но в вещественном случае её пояснить легко. Пусть $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}$, причём (следуем [**BostMestre1988**]) $e_1 > e_2 > e_3$ Тогда на $\mathbf{E}$ можно взять два базисных цикла, один из которых проектируется при $(x, y) \mapsto x$ в отрезок $[e_3, e_2]$, а другой – в $[e_2, e_1]$.

ЗДЕСЬ БУДЕТ КАРТИНКА!

Из соответствующих периодов один вещественный, а другой – чисто мнимый:

$$\int_{e_3}^{e_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} \in \mathbb{R},$$

тогда как

$$\int_{e_2}^{e_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} \in \mathrm{i}\mathbb{R},$$

так что в этом случае решётка Λ *составлена из прямоугольников.*

3.2.3. Факторизация по решётке периодов. Если появляется решётка в $\mathbb{C}$, то по ней хочется профакторизовать. Во введённых обозначениях

$$\mathbf{E} \mapsto \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$$

и есть та операция *сопоставления эллиптической кривой тора,* которая была объявлена целью заканчивающегося подраздела.

3.3. Теорема Абеля-Якоби для рода 1

3.3.0. Суть теоремы. Она заключается в том, что только что построенное отображение является *изоморфизмом*,

$$\mathbf{E} \cong \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}.$$

Однако для понимания слова *изоморфизм* в этом контексте нужно освоить довольно много математики 20-го века. Мы не будем пытаться вводить эти понятия скороговоркой, а вместо этого мысленно вернёмся в 19-й век и построим требуемые *взаимно-однозначные* отображения явно.

Отметим, что одно из них уже построено в разделе **3.1**: сам факт *периодичности* $\wp$-функции Вейерштрасса и её производной позволяет интерпретировать рассмотренные отображения как

$$(\wp_\Lambda, \wp'_\Lambda) \mod \Lambda : \frac{\mathbb{C} \setminus \Lambda}{\Lambda} \longrightarrow \dot{\mathbf{E}}$$

и

$$(1 : \wp_\Lambda : \wp'_\Lambda) \mod \Lambda : \frac{\mathbb{C}}{\Lambda} \longrightarrow \mathbf{E}.$$

Остаётся построить отображение, обратное ко второму из них.

3.3.1. Отображение Абеля-Якоби. Сначала напишем формулу для этого отображения, а потом в неё вдумаемся:

$$\mathrm{aj} : \mathbf{E} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}}{\Lambda} : P \mapsto \Big[\int_O^P \omega \Big] \mod \Lambda.$$

Осознания требует корректность этого определения. Дело в том, что от (фиксированной) точки O до (переменной) точки P можно пройти многими разными путями,

ЗДЕСЬ БУДЕТ КАРТИНКА!

и интеграл $\int_O^P \omega$ при изменении пути тоже изменится.

ЗДЕСЬ БУДЕТ КАРТИНКА!

Но в том-то и дело, что изменится он ровно на период дифференциала, так что по модулю решётки периодов отображение Абеля-Якоби определено корректно!

В вещественном случае обсуждаемая конструкция поддаётся частичному осознанию с позиций школьной математики. В самом деле, если $x(P) \in \mathbb{R}$ и $x(P) > e_1$, то также $y(P) \in \mathbb{R}$

ЗДЕСЬ БУДЕТ КАРТИНКА!

и, если пренебречь факторизацией по решётке периодов, то

$$\mathrm{aj}(P) = \int_{\infty}^{x(P)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

– обычный несобственный интеграл. Если переписать его, сменив знак, в ещё более привычном виде (всех нас учили интегрировать *слева направо...*), придём к

$$-\int_{x_1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

то есть к обычному *неполному эллиптическому интегралу первого рода*, с которого мы начинали.

Однако для $x_1 < e_1$ интеграл кажется лишённым смысла: особенность подынтегрального выражения при $x = e_1$ представляется непреодолимой. Математикам надо было прожить 19й век, чтобы понять: *надо просто выйти в комплексную область и эту (кажущуюся) особенность обогнуть!*

3.3.2. Формулировка теоремы. Повторимся: по существу построенные отображения осуществляют взаимно однозначное соответствие между торами и комплексными кривыми рода 1. Для придания этим словам точного смысла напомним наши обозначения.

Дана решётка $\Lambda \subset \mathbb{C}$,

$$g_2 := 60 \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \frac{1}{\lambda^4}, g_3 := 140 \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \frac{1}{\lambda^6}.$$

Аффинная кривая $\dot{\mathbf{E}}$ задаётся уравнением

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

а $\mathbf{E}$ – замыкание этой кривой в проективной плоскости, причём $\mathbf{E} = \dot{\mathbf{E}} \coprod \{O\}$.

На кривой $\mathbf{E}$ имеется единственный с точностью до пропорциональности абелев дифференциал без полюсов. Фиксируем такой дифференциал

$$\omega := \frac{\mathrm{d}x}{y}.$$

Теорема. *Решётка периодов*

$$\Lambda' := \oint_{\mathrm{H}_1(\mathbf{E};\mathbb{Z})} \omega$$

пропорциональна решётке Λ.
Отображение

$$\frac{\mathbb{C}}{\Lambda} \longrightarrow \mathbf{E} : [z]_\Lambda \mapsto \big(1 : \wp_\Lambda(z) : \wp'_\Lambda(z)\big)$$

взаимно однозначно. Обратным ему с точностью до пропорциональности *является отображение Абеля-Якоби*

$$\mathbf{E} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}}{\Lambda'} : P \mapsto \big[\int_O^P \omega\big]_{\Lambda'}.$$

Доказательство этой теоремы при использовании некоторой тяжёлой артиллерии получается мгновенно. Читателю рекомендуется до освоения этой артиллерии проработать её на примерах, порешав прилагаемые задачи.

3.4. Групповая структура

3.4.0. На торе. Поскольку $\Lambda \subset \mathbb{C}$ – подгруппа, на факторе $\frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$ имеется естественная структура фактор-группы.

3.4.1. На кубической кривой. Нейтральным элементом назначается O, групповой закон $\oplus$ определяется тем, что для $P, R, R \in \mathbf{E}$

$$\boxed{P \oplus Q \oplus R = O \Longleftrightarrow P, Q, R \text{ коллинеарны}}$$

Обведённое в рамку правило дополняется случаями $P = Q$ (касание) и $P = Q = R$ (перегиб).

ЗДЕСЬ БУДЕТ КАРТИНКА!

Введённая групповая структура имеет смысл над произвольным полем и не требует его алгебраической замкнутости. (Почему? По теореме Виета!). Она интенсивно исследуется над конечными и над числовыми полями.

Коммутативность операции $\oplus$ очевидна, а ассоциативность глубоко нетривиальна. Над $\mathbb{C}$ она мгновенно вытекает из теоремы следующего подраздела, но следует ли отсюда общий случай? Согласно *принципу Лефшетца* – да. Однако независимое доказательство всё же желательно.

3.4.2. Изоморфизм. Теорема Абеля-Якоби дополняется следующим фундаментальным результатом.

Теорема. *Построенная выше (т.* **3.3.2***) биекция между тором и кубической кривой является изоморфизмом групп.*

Как и в других подобных случаях, пониманию доказательства желательно предпослать разбор частных случаев.

3.5. Изогении рода 1

3.5.0. Нормировка. Будем теперь выбирать из класса подобных решёток такие, что $1 \in \Lambda$, и представлять такие решётки в виде

$$\Lambda = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}.$$

Выберем базис так, чтобы

$$\boxed{\mathrm{Im}\tau > 0}$$

Переобозначение:

$$\wp_\Lambda(z) = \wp_{\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}}(z) =: \wp(z|\tau) --$$

функция двух комплексных переменных ($|$ вместо запятой напоминает о том, что переменная τ воспринимается как *параметр* – это, конечно, психология, а не математика).

3.5.1. Точки порядка 2. Для любой абелевой группы $\mathbf{A}$ с операцией $\oplus$ и нейтральным элементом O обозначим подгруппу элементов порядка 2

$${}_2\mathbf{A} := \{P \in \mathbf{A} \mid P \oplus P = O\}$$

В фундаментальном параллелограмме сразу видны 0 и три нетривиальных точки порядка 2:

ЗДЕСЬ БУДЕТ КАРТИНКА!

Иначе говоря,

$${}_2\Big(\frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}}\Big) = \{0, \frac{\tau}{2}, \frac{\tau+1}{2}, \frac{1}{2}\}.$$

Из теоремы **3.4.2** следует

$$\boxed{{}_2\mathbf{E} = \{O, \wp(\frac{\tau}{2}|\tau), \wp(\frac{\tau+1}{2}|\tau), \wp(\frac{1}{2}|\tau)\}}$$

Можно ввести переобозначение

$$\{e_1, e_2, e_3\} =: \{e_{01}, e_{10}, e_{11}\}$$

где

$$\boxed{e_{ab} = \wp\Big(\frac{a\tau + b}{2} \mid \tau\Big)} \text{ для } ab \in \{01, 10, 11\}.$$

Уравнение кривой $\dot{\mathbf{E}}$ принимает вид

$$\boxed{y^2 = 4(x - e_{01})(x - e_{10})(x - e_{11})}$$

3.5.2. Инволюции и факторы по ним. При взгляде на $\mathbf{E}$ как на тор становится очевидным, что
• инволюций $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$, обладающих неподвижными точками, много, и все они имеют вид $P \mapsto P_0 \ominus P$ (для наших целей они не нужны);
• инволюций $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ без неподвижных точек всего три, а именно сдвиги на точки 2-го порядка, то есть отображения $P \mapsto P_0 \oplus P$, где $P_0 \in {}_2\mathbf{E} \setminus \{O\}$.

Именно факторизации по инволюциям без неподвижных точек определяют требуемые нам 2-изогении, и именно они фигурировали в лекции 2.

При выборе одной из трёх точек 2-го порядка можно руководствоваться, например, очевидными из соображений симметрии неравенствами

$$\wp(\frac{\mathrm{i}}{2} \mid \mathrm{i}) < 0, \wp(\frac{\mathrm{i}+1}{2} \mid \mathrm{i}) = 0, \wp(\frac{1}{2} \mid \mathrm{i}) > 0.$$

Это приводит к выводу о том, что нужная нам точка 2-го порядка – $\frac{\tau}{2}$. Соответствующая 2-изогения *заменяет решётку* $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z} \cdot 2\tau + \mathbb{Z}$.

ЗДЕСЬ БУДЕТ КАРТИНКА!

Это объясняет формулы из лекции 2.

3.6. О кривых рода 2

3.6.0. Ультраэллиптические интегралы. Они появились в работах [**Richelot1836**] и [**Richelot1837**] и имели, как было сообщено в лекции 2, вид

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R^2\cos^2\varphi + S^2\sin^2\varphi)\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(c^2\cos^2\varphi + d^2\sin^2\varphi)(e^2\cos^2\varphi + f^2\sin^2\varphi)}}$$

Там же объяснялось их преобразование к общему виду интеграла 1-го рода на обшей кривой рода 2.

3.6.1. О якобианах. Род 1 – единственный, на кривых которого можно ввести структуру группы. Однако соответствующие кривым g-мерные комплексные торы существуют для всех кривых рода $g \geq 1$.

В случае рода $g > 1$ они конструируются по *решётке периодов* аналогично случаю рода $g = 1$. Так, для $g = 2$ имеется два базовых дифференциала типа **3.6.0**, которые следует проинтегрировать по четырём циклам

ЗДЕСЬ БУДЕТ КАРТИНКА!

Полученные интегралы тоже называют *периодами*. Они порождают решётку максимального ранга в $\mathbb{C}^2$, фактор по которой и называется *якобианом* кривой.

Преобразования Ришело, описанные в лекции 2, соответствуют изогениям якобианов, и итерации этих изогений объясняют сверхсходимость преобразований Ришело.

Список литературы

[**BostMestre1988**] Jean-Benoit Bost and Jean-Francois Mestre, *Moyenne arithmético-géométrique et périodes des courbes de genre 1 et 2.* Gaz. Math. 38 (1988), 36–64.

[**Fri1981**] J. Friberg, *Methods and traditions of Babylonian mathematics: Plimpton 322, Pythagorean triples and the Babylonian triangle parameter equations.* Historia Mathematica, **28**(2001), 167-206.

[**Richelot1836**] F. Richelot, *Essai sur une méthode générale pour déterminer la valeur des intégrales ultra-elliptiques, fondée sur des transformations remarquables de ces transcendantes.* C.R. Acad. Sci. Paris 2, 1836, 622-627.

[**Richelot1837**] F. Richelot, *De transformatione integralium Abelianorum primi ordinis commentatio.* J. Reine Angew. Math. 16, 1837, 221-341.