Nice, 18.5.7 – Ратмино, 18.7.25

Динамика многоугольников и сверхбыстрые приближения
Дубна, 2018

Лекция 4
Приближения числа π и обобщения

4.0. Эмпирика

Мы следуем [**BorweinBorwein1987**]. Среди многих имеющихся в этой книге способов быстрого приближения числа π есть следующий: введём последовательность π_n формулой

$$\boxed{\pi_n := \frac{2a_{n+1}^2}{1-\sum_{k=0}^{n} 2^k(a_k^2-b_k^2)}}$$

где, как обычно, $a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}$ с начальными членами $a_0 := 1, b_0 := \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Оказывается, последовательность π_n монотонно возрастает, ограничена сверху и удовлетворяет неравенству

$$\pi - \pi_{n+1} \le \frac{(\pi-\pi_n)^2}{2^{n+1}\pi^2},$$

которая и гарантирует сверхсходимость этой последовательности.

4.1. Связь с эллиптическими интегралами

4.1.0. Четыре классические функции. По существу их две, и мы с ними уже знакомы, а сейчас просто введём традиционные обозначения:

$$\mathrm{K}(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

(это – *полный эллиптический интеграл первого рода*)

$$\mathrm{E}(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(1-k^2u^2)\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

(это – *полный эллиптический интеграл второго рода*).

Кстати:

$$\mathrm{K}(k) = \frac{\pi}{2}\mathrm{F}\big(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\big),$$

$$\mathrm{E}(k) = \frac{\pi}{2}\mathrm{F}\big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\big),$$

– наши интегралы выражены через *гипергеометрический ряд*

$$\mathrm{F}(a,b;c;z) := 1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \dots$$

Вдобавок к основным двум вводятся *дополнительные* интегралы[1]

$$\widehat{\mathrm{K}}(k) := \mathrm{K}(\sqrt{1-k^2})$$

и

$$\widehat{\mathrm{E}}(k) := \mathrm{E}(\sqrt{1-k^2}).$$

Все четыре функции для наших целей достаточно считать функциями на вещественном интервале $k \in (0,1)$, хотя полезно также рассматривать их как комплексно-аналитические функции, формальные степенные ряды и т. п.

Функция K удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(k^3-k)\mathrm{K}'' + (3k^2-1)\mathrm{K}' + k\mathrm{K}$$

и, что отражает наши знания о преобразовании Гаусса, *функциональному*

$$\mathrm{K}(k) = \frac{1}{1+k}\mathrm{K}(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}).$$

4.1.1. Соотношение Лежандра. Четыре введённые функции связаны соотношением

$$\boxed{\mathrm{E}\widehat{\mathrm{K}} + \widehat{\mathrm{E}}\mathrm{K} - \mathrm{K}\widehat{\mathrm{K}} \equiv \frac{\pi}{2}}$$

Это соотношение имеет глубокий геометрический смысл, которого мы не касаемся. Нетрудно провести формальное доказательство: с

[1]в классической литературе для них используется кошмарное обозначение K', где $'$ – вовсе не производная (хотя дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти функции, замечательны и изучаются), а *переход к дополнительному аргументу* $k' := \sqrt{1-k^2}$...

помощью дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют четыре функции, установить, что левая часть постоянна, затем устремить $k \to 0$.

4.1.2. Оба эллиптических интеграла и agM. Введём новое обозначение

$$\mathrm{M}(k) := \mathrm{agM}(1, k).$$

Выражение для интеграла первого рода мы уже знаем:

$$\boxed{\mathrm{K}(k) = \frac{\pi}{2\mathrm{M}(\sqrt{1-k^2})}}$$

Чтобы быстро вычислить интеграл второго рода (в частности, длину эллипса), надо в явном виде привлечь сходящуюся к agM последовательность:

$$a_0 := 1, b_0 := \sqrt{1-k^2},$$

и, как всегда,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Оказывается,

$$\boxed{\mathrm{E}(k) = \Big(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}\big(a_n^2 - b_n^2\big)\Big)\mathrm{K}(k)}$$

– узнаём чуть-чуть изменённый знаменатель из формулы начала лекции.

4.1.3. Быстрое вычисление π. Считаем члены agM-последовательности *функциями* от $k \in (0, 1)$ с указанными выше начальными условиями $a_0 := 1, b_0 := \sqrt{1-k^2}$. Для производных получаем рекурренции

$$a'_{n+1} := \frac{a'_n + b'_n}{2}, b'_{n+1} := \frac{a'_n\sqrt{\frac{b_n}{a_n}} + b'_n\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}}{2}.$$

В обозначениях Лежандра

$$x_n := \frac{a_n}{b_n}, y_n := \frac{a'_n}{b'_n}$$

рекурренции переписываются в виде

$$x_{n+1} := \frac{\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}}{2}, y_{n+1} := \frac{\sqrt{x_n}y_n + \frac{1}{\sqrt{x_n}}}{y_n + 1}$$

с начальными условиями $x_0 = \frac{1}{k}, y_1 = \sqrt{x_0}$. Обе последовательности очень быстро стремятся к 1. По существу, эта рекурренция равносильна основной формуле; быстро стремящаяся к π последовательность определяется соотношением

$$\boxed{\pi_n := \frac{x_n + 1}{y_n + 1}\pi_{n-1}}$$

с начальным условием $\pi_0 = 2 + \sqrt{2}$. Главное утверждение

$$\boxed{\boxed{\lim_{n\to\infty} \pi_n = \pi}}$$

вытекает из дифференциальных соотношений, которым удовлетворяют функции $\mathrm{K}, \mathrm{E}, \widehat{\mathrm{K}}, \widehat{\mathrm{E}}$, и из соотношения Лежандра; на последнем шагу надо положить $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Важное промежуточное соотношение имеет вид

$$\mathrm{M}'(k) = \frac{\pi}{2}\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\frac{\mathrm{K}'(\sqrt{1-k^2})}{\mathrm{K}(\sqrt{1-k^2})^2}.$$

Прямая связь между π и agM может быть выражена формулой

$$\pi = 2\sqrt{2}\frac{\mathrm{M}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{\mathrm{M}'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

4.2. Обобщения

(а) Зачем столько знаков π? Для связи с внеземными цивилизациями? Для проработки концепций случайного и закономерного! Непериодичность знаков потребовала $\geq$ 1000 лет. А равномерное распределение??

(б) Прямые школьно-геометрические обобщения? Бросаются в глаза: призмы вместо прямоугольников, неаккуратно описанные многоугольники. Что-нибудь скрытое??

(в) Прямые алгебро-геометрические обобщения? Конечно, изогении якобианов кривых высших родов. Изогении обобщённых якобианов? Что-нибудь многомерное?

(г) Другие приближения π? Некоторый вариант квадратуры круга получен! Красивые рациональные приближения?

(д) Приближения других чисел? "Философия периодов" Концевича-Цагира.

(е)...

Список литературы

[**BorweinBorwein1987**] J.M. Borwein and P.B. Borwein, *Pi and the AGM.* John Wiley & Sons, 1987.