Торические многообразия
Летняя школа “Современная математика” 2018

Евгений Шиндер

Содержание

1 Введение: О чём и для кого эти лекции

Алгебраическая геометрия - это геометрия множеств, которые заданы алгебраическими уравнениями, например

$$x^2 + y^2 = 1$$

или

$$t^3 = x_1 x_2.$$

Координаты $x, y, z, \dots$ принадлежат фиксированному полю, например это могут быть комплексные числа. Множества решений таких уравнений называются алгебраическими многообразиями. Строго говоря, множества этих решений - это *аффинные* алгебраические многообразия. Общие алгебраические многообразия получаются склейкой из аффинных по определённым правилам. Например, склеив вместе $n+1$ копию n-мерного векторного пространства (с определёнными функциями перехода из одной копии в другую), можно получить проективное пространство $\mathbb{P}^n$, важный пример алгебраического многообразия.

Торическая геометрия - это алгебраическая геометрия построенная комбинаторно. А именно, заданному выпуклому конусу, набору конусов или выпуклому многограннику ставится в соответствие алгебраическое многообразие, и все свойства и конструкции для этого алгебраического многообразия, можно наглядно описать в терминах выпуклой геометрии.

Например, оказывается, что по правилам склейки торических многообразий, отрезку $[0, 1]$ соответствует проективная прямая $\mathbb{P}^1$, треугольнику с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ - проективная плоскость $\mathbb{P}^2$, а квадрату $[0, 1] \times [0, 1]$ - поверхность $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Естественные свойства многообразий такие как гладкость и полнота, а также разрешения особенностей и линейные расслоения соответствуют определённым свойствам и конструкциям для многогранников и конусов.

Можно и наоборот: используя язык алгебраической геометрии доказывать интересные факты про выпуклые многогранники. В качестве конкретного примера, рассмотрим так называемую формулу Пика: если $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ плоский многоугольник с целочисленными вершинами, то число "целых точек" (то есть с целочисленными координатами) внутри Δ (точки на границе тоже считаются) равно

$$\text{Площадь } \Delta + \frac{1}{2}(\text{Число целых точек на границе}) + 1.$$

Например, для квадрата $[-1, 1] \times [-1, 1]$ получаем $4 + \frac{8}{2} + 1 = 9$ целых точек. Эта формула, которую конечно несложно доказать и напрямую, а также её нетривиальные многомерные обобщения в торической геометрии интерпретируются как теорема Римана-Роха для торических многообразий. К сожалению мы не сможем глубоко коснуться этой замечательной теоремы, однако я надеюсь, что эти лекции будут хорошей иллюстрацией методов торической геометрии.

Торические многообразия будут интересны всем, кто интересуется алгеброй и геометрией. Предполагаются хорошо известными базовые понятия алгебры - полугруппа, группа, кольцо, идеал, поле, векторное пространство. Всё остальное я постараюсь объяснить.

Например, базовые понятия алгебраической геометрии (алгебраические многообразия и морфизмы, то есть отображения между ними, гладкость, полнота и так далее) будут объясняться по ходу дела и иллюстрироваться на торических многообразиях. Некоторые факты нужно будет принимать на веру, без доказательств.

Мы будем двигаться довольно быстро, от простых понятий конуса и веера к довольно сложным идеям алгебраической геометрии. В такой ситуации, чтобы не потерять нить изложения, решайте задачи к каждой лекции (в конце каждой главы; во время лекций я буду считать, что вы немного подумали над задачами к предыдущей лекции), общайтесь между собой, задавайте мне вопросы по вечерам. Я буду рад на них ответить!

Я готовил этот курс по следующим классическим источникам:

1. В.И. Данилов: Геометрия торических многообразий, 1978
2. W. Fulton: Introduction to Toric Varieties, 1993

К сожалению, пока я готовил лекции я не успел подготовить картинки. Их будет много и они будут рисоваться на доске. Кроме того, я боюсь что в заметках довольно много опечаток.

2 Базовые понятия

2.1 Решётки, конуса и целые точки

В данных лекциях *решётка* - это абелева группа конечного ранга, то есть группа изоморфная $\mathbb{Z}^n$. С решёткой M связаны рациональное и вещественное пространства размерности n,

$$M \subset M_{\mathbb{Q}} \subset M_{\mathbb{R}},$$

то есть нужно взять базис M и породить им векторное пространство над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ соответственно. При рассмотрении торических многообразий нам часто будет нужна решётка и её двойственная, мы всегда обозначаем их M и N:

$$M \simeq \mathbb{Z}^n, \quad N = M^\vee := \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^n.$$

После выбора согласованных базисов $M \simeq \mathbb{Z}^n$, $N \simeq \mathbb{Z}^n$ спаривание между M и N это обычное скалярное произведение

$$\langle (a_1, \dots, a_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n.$$

Полупространство в $M_{\mathbb{Q}}$ - это множество $x \in M_{\mathbb{Q}}$ таких что $\phi(x) \geq 0$ для некоторой линейной функции $\phi : M_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$. Таким образом полупространство всегда содержит ноль и “лежит с одной стороны” от гиперплоскости $Ker(\phi)$. Иногда может быть удобно считать, что всё пространство $M_{\mathbb{Q}}$ - это тоже полупространство (когда $\phi = 0$).

Конус в решётке M - это пересечение конечного числа полупространств в $M_{\mathbb{Q}}$. В частности, конус всегда выпуклый, замкнутый и содержит начало координат. *Конёк* конуса - это максимальное $\mathbb{Q}$-линейное подпространство содержащееся в нём.

Иногда нам будет удобно считать что наши объекты - полупространства, конуса, коньки и так далее лежат не в $M_{\mathbb{Q}}$, а в $M_{\mathbb{R}}$. От этого ничего не изменится.

Пример 2.1. *Пусть $M = \mathbb{Z}^2$. Тогда полупространство $x \geq 0$ это конус с коньком $x = 0$. Угол $x \geq 0, y \leq x$ это конус с коньком 0. Наконец, 0 и $M_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^2$ это тоже конуса.*

Конус у которого нулевой конёк, будем называть *конус с вершиной.* Любой конус можно представить как декартово произведение своего конька на конус с вершиной.

Интуитивно понятно, что такое грань конуса. Формальное определение такое: *грань* конуса $\sigma \subset M_{\mathbb{Q}}$ это $\tau = \phi^{-1}(0) \cap \sigma$, где ϕ - любая линейная функция, неотрицательная на σ. Гиперплоскость $\phi^{-1}(0)$ иногда называют поддерживающей гиперплоскостью: весь конус лежит с одной стороны от неё.

Легко проверить, что грань конуса это конус, а также, что быть гранью - это транзитивное понятие. Одномерные грани конуса называют *граничными лучами.* Конус с вершиной порождается своими граничными лучами: если $v_1, \dots, v_k$ - ненулевые вектора на граничных лучах σ, то

$$\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot v_1 + \dots + \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot v_k. \tag{2.1}$$

Если потребовать, чтобы вектора v_i лежали в решётке M, и были минимальными, то они определены однозначно.

Конус называется *базисным*, если он порождён частью базиса M, то есть в формуле (2.1) вектора $v_1, \dots, v_k$ лежат в M и могут быть дополнены до базиса этой решётки. По определению, базисный конус имеет нулевой конёк.

Если $\sigma \subset M$ это конус, то к нему можно рассмотреть *двойственный конус* в двойственной решётке $N = M^\vee$:

$$\sigma^\vee = \{n \in N_{\mathbb{Q}} : \langle m, n \rangle \geq 0 \quad \forall m \in \sigma\} \subset N_{\mathbb{Q}}.$$

Можно сказать, что двойственный конус для σ - это множество гиперплоскостей, поддерживающих σ.

Пример 2.2. *Пусть $M = \mathbb{Z}^2$, $N = M^\vee = \mathbb{Z}^2$.*

$$\begin{aligned} \{x \geq 0\}^\vee &= \{(a, b) : a \geq 0\} \\ \{x \geq 0, y \leq x\}^\vee &= \{(a, b) : a \geq 0, b \geq -a\} \\ \{0\}^\vee &= N_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

(Здесь нужны картинки.)

Легко проверить следующие свойства двойственных конусов. Если $\tau \subset \sigma$, то $\sigma^\vee \subset \tau^\vee$, а также $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$. Конус имеет вершину тогда и только тогда когда двойственный к нему порождает всё пространство.

В этом курсе нас часто будет интересовать такой вопрос: как описать *целые точки* конуса $\sigma \subset M_{\mathbb{Q}}$, то есть множество

$$S_\sigma := \sigma \cap M.$$

Как мы увидим, это вопрос закодирован в геометрии торического многообразия построенного по σ. Заметим, что как и сам конус σ, множество целых точек

$\sigma \cap M$ это полугруппа по сложению (в этом курсе полугруппа - это объект который удовлетворяет всем аксиомам группы, кроме существования обратных элементов. В частности, в полугруппе $\sigma \cap M$ есть тождественный элемент 0. Возможно, полугруппы в этом смысле обычно называют моноидами).

Предложение 2.3. *Полугруппа S_σ конечно порождена, то есть существуют $b_1, \dots, b_N \in S_\sigma$ такие что любой элемент $b \in S_\sigma$ это комбинация $b_1, \dots, b_N$ с неотрицательными коэффициентами.*

Заметим, что мы не утверждаем, что $N = n$:

Пример 2.4. *Пусть $M = \mathbb{Z}^2$, $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot (1,1) + \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot (-1,1)$. Тогда три целые точки $(1,1), (-1,1), (0,1)$ порождают $\sigma \cap M$, но никакие две целые точки его не порождают.*

Прежде чем доказывать Предложение, введём ещё одно понятие. Пусть $\sigma \subset M$ - конус с вершиной, и граничными лучами на образующих $v_1, \dots, v_k \in M$ (то есть v_i минимальные ненулевые целые точки на лучах σ). *Фундаментальный параллелепипед* для σ - это множество

$$\Pi_\sigma := \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in M, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1\} \subset M_\mathbb{R}.$$

Поскольку множество целых точек $\Pi_\sigma \cap M$ компактное и дискретное, то оно конечное. Например в последнем примере, фундаментальный параллелепипед содержал пять целых точек.

Доказательство Предложения. Пусть $b_1, \dots, b_N$ это все целые точки фундаментального параллелепипеда. Докажем, что они порождают S_σ как полугруппу. Поскольку лучи $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot v_i$ порождают конус σ, то для любой целой точки $b \in \sigma \cap M$ найдутся $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ так что

$$b = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{k} [\alpha_i] v_i + \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - [\alpha_i]) v_i.$$

Оба элемента в формуле лежат в полугруппе порождённой $b_1, \dots, b_N$. □

Веер Σ - это непустой конечный набор конусов в N, удовлетворяющий следующим трём условиям:

1. Любые два конуса из веера пересекаются по их общей грани
2. Любая грань любого конуса из веера тоже лежит в веере
3. Все конуса в веере - это конуса с вершиной (то есть имеют нулевой конёк)

Учитывая свойство (2) веер определяется своими конусами максимальной размерности (все остальные конуса - это грани таких).

Носитель веера Σ, $|\Sigma|$ - это объединение всех его конусов. Веер Σ называется *полным* если $|\Sigma| = \mathbb{N}_\mathbb{Q}$.

Заметим, что наш веер лежит (и всегда будет лежать) в решётке N, двойственной к M. Торические многообразия будут строиться так называемой склейкой по двойственным конусам $\sigma^\vee$ для конусов $\sigma \in \Sigma$.

В качестве простого пример, рассмотрим веер составленный из координатных квадрантов в $N = \mathbb{Z}^2$, координатных лучей и начала координат. В таком случае двойственными конусами к координатным квадрантам будут соответствующие координатные квадранты в M, двойственными конусами к координатным лучам будут координатные полуплоскости, а двойственным конусом к началу координат будет всё пространство N.

Заметим нетривиальное соотношение: грани конуса веера соответствует больший двойственный конус. Это соотношение будет важно в будущем при склейке торических многообразий.

2.2 Аффинные алгебраические многообразия

Алгебраическую геометрию строят над фиксированным алгебраически замкнутым полем k, например над $k = \mathbb{C}$, полем комплексных чисел. Объекты алгебраической геометрии это множества решений алгебраических уравнений в данном поле k. Например, про уравнение

$$x^2 + y^2 = 1$$

можно думать геометрически, как подмножество $(x, y) \in k^2$ удовлетворяющих данному равенству.

Аффинное алгебраическое многообразие - это множество X решений системы уравнений

$$\begin{gathered} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{gathered}$$

где $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$.

Простейшее аффинное многообразие это аффинное n-мерное пространство $\mathbb{A}^n = k^n$.

Переход из геометрии к алгебре заключается в том, чтобы по многообразию X построить его *кольцо регулярных функций*:

$$k[X] := k[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m).$$

Смысл этого определения такой. В алгебраической геометрии мы рассматриваем алгебраические многообразия и полиномиальные функции на них. Например, регулярные функции на аффинном пространстве это полиномы:

$$k[\mathbb{A}^n] = k[x_1, \ldots, x_n].$$

Если мы хотим ограничивать полиномиальные функции $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ на подмногообразие $X \subset \mathbb{A}^n$, то такое ограничение не будет инъективным: разные $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ могут ограничиваться на X как одна и та же функция. Это происходит когда $f - g$ лежит в идеале порождённом уравнениями $f_1, \ldots, f_m$, поэтому когда мы отфакторизуем этот идеал, мы получаем кольцо функций на X.

Самый простой пример аффинного алгебраического многообразия это $X = \mathrm{pt}$, точка (то есть одноточечное множество). В этом случае $k[X] = k$ (все функции на точке константы). Заметим, что $\mathrm{pt} = \mathbb{A}^0$ (нульмерное векторное пространство).

Во всех случаях которые мы будем рассматривать, $k[X]$ будет кольцом без делителей нуля. Это равносильно тому, что X не является нетривиальным объединением двух меньших многообразий.

Заметим что по определению $k[X]$ - это не только кольцо, но конечно-порождённая k-алгебра.

Кроме объектов мы рассматриваем ещё и *морфизмы*, то есть отображения алгебраических многообразий. Отображение $\phi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n'}$ называется полиномиальным, если все его компоненты это многочлены (от n переменных). Если $X \subset \mathbb{A}^n$, $X' \subset \mathbb{A}^{n'}$ алгебраические многообразия, а $\phi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ полиномиальное отображение, такое что $\phi(X) \subset X'$, то ϕ задаёт *полиномиальное отображение* из X в X'.

Пример 2.5. *Рассмотрим кривую $X \subset \mathbb{A}^2$, заданную уравнением $y^2 = x^3$. Тогда отображение $\phi : \mathbb{A}^1 \to X$ заданное как $\phi(t) = (t^3, t^2)$ это полиномиальное отображение.*

Если $\phi : X \to X'$ полиномиальное отображение, то имеем отображение k-алгебр **в другую сторону**

$$\begin{aligned} \phi^* : k[X'] &\to k[X] \\ \phi^*(h) &= h \circ \phi. \end{aligned}$$

Про эту операцию можно думать как про замену координат. В примере $\phi : \mathbb{A}^1 \to X$ выше, имеем $k[\mathbb{A}^1] = k[t]$, $k[X] = k[x,y]/(y^2 - x^3)$, $\phi^* : k[x,y]/(y^2 - x^3) \to k[t]$ задаётся как $\phi(h(x,y)) = h(t^3, t^2)$.

На самом деле, *Теорема Гильберта о Нулях* задаёт взаимно-однозначное соответствие между конечно-порождёнными k-алгебрами и аффинными многообразиями.[1] Эта биекция может быть распространена на морфизмы, со сменой направлений. Такие соответствия называются *контравариантными*, в отличия от *ковариантных*, которые сохраняют, а не переворачивают, направления морфизмов. В данных лекциях у нас будут встречаться и ковариантные, и контравариантные соответствия.

Часть этой биекции - это конструкция по каждой конечно-порождённой k-алгебре R аффинного алгебраического многообразия X. Это соответствие называется взятием спектра: $X = \mathrm{Spec}(R)$. По определению, $\mathrm{Spec}(R)$ состоит из максимальных идеалов кольца R, то есть идеалов $I \subset R$, не содержащихся в строго большем идеале (обычно в $\mathrm{Spec}(R)$ включают не только максимальные, но и простые идеалы. Нам это будет не нужно).

[1] Для экспертов: для ясности я притворяюсь, что нильпотентных элементов не бывает, и отождествляю многообразия и схемы.

Наконец, мы введём *топологию Зарисского* на аффинном алгебраическом многообразии, то есть понятие открытых и замкнутых множеств. Если X аффинное многообразие, то замкнутое подмножество X' это тоже самое, что *алгебраическое подмногообразие*, то есть подмножество, заданное полиномиальными уравнениями. Например, кривая $y^2 = x^3$ - это замкнутое подмножество аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$. Легко проверить, что любое пересечение и конечное объединение замкнутых множеств - замкнутое.

Открытым множеством (или открытым подмногообразием) называется дополнению к замкнутому, то есть множество, где данный набор полиномов не обращается в ноль. Таким образом, множество $y^2 - x^3 \neq 0$ это открытое подмножество аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$. Любое объединение, а также конечное пересечения открытых множеств - открытые.

Нам часто будет встречаться алгебраическое многообразие $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \backslash \{0\}$, его кольцо регулярных функций это $k[x, x^{-1}]$. Последнее кольцо называется кольцом полиномов Лорана (от одной переменной) и будем также обозначать его как $k[x^{\pm}]$.

2.3 Задачи

Задача 1. *Покажите, что конус имеет нулевой конёк тогда и только тогда когда двойственный к нему конус порождает всё пространство (то есть не содержится в строго меньшем подпространстве).*

Задача 2. *Пусть $v_1, \dots, v_n$ линейно-независимые вектора в n-мерной решётке M, то есть определитель $D = \det(v_1, \dots, v_n)$ у $n \times n$ матрицы составленной из координат векторов v_i не равен нулю.*

Покажите, что $v_1, \dots, v_n$ базис M тогда и только тогда когда определитель $\det(v_1, \dots, v_n) = \pm 1$. Про $|D|$ полезно думать как про объём фундаментального параллелепипеда: это можно считать определением - либо определителя, либо объёма, как вам больше нравится!

Покажите что число целых точек полуоткрытого фундаментального параллелепипеда

$$\Pi_\sigma^\circ := \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in M, \quad 0 \leq \alpha_i < 1\} \subset M_\mathbb{R}$$

равно $|D|$.

Задача 3. *Нарисуйте следующий веер и набор двойственных к нему конусов. $M = N = \mathbb{Z}^2$. Веер Σ составлен и конусов и их граней*

$$\begin{aligned} \sigma_1 : &\quad y \geq 0, \quad y \geq x, \\ \sigma_2 : &\quad x \geq 0, \quad y \leq x, \\ \sigma_3 : &\quad x \leq 0, \quad y \leq 0. \end{aligned}$$

Задача 4 (Веер внешних нормалей к многоугольнику)**.** *Пусть Δ - выпуклый многоугольник в $M_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^2$. Мы предполагаем, что вершины Δ принадлежат $M = \mathbb{Z}^2$, и в таком случае будем называть Δ целочисленными.*

Отождествим M и двойственную решётку N с помощью стандартного скалярного произведения: $M = N$.

Поскольку Δ целочисленный, то нормали к его рёбрам имеют рациональный наклон. Мы будем рассматривать внешние нормали с минимальными целочисленными координатами, этим свойством они определяются однозначно.

Подумайте, почему вектора внешних нормалей порождают полный двумерный веер. Покажите, что при параллельном переносе и центральном растяжении многоугольника, его веер внешних нормалей не меняется. Постройте веера внешних нормалей к (a) треугольнику с вершинами $(0,0),(0,1),(1,0)$, (b) квадрату с вершинами $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$.

Опишите набор двойственных конусов к вееру внешних нормалей, в терминах исходного многоугольника. Нарисуйте их для треугольника и квадрата.

Задача 5. *Докажите, что если X аффинное многообразие, $f \in k[X]$ ненулевая функция, то $X \setminus \{f = 0\}$ тоже аффинное многообразие. Что такое $k[X \setminus \{f = 0\}]$?*

Задача 6. *Опишите в явном виде топологию Зарисского на $\mathbb{A}^1$.*

Задача 7. *Опишите все морфизмы $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m^n$. (Здесь $\mathbb{G}_m^n$ - это декартово произведение $\mathbb{G}_m$ на себя n раз. $\mathbb{G}_m^n$ можно определить ещё и так: $\mathbb{G}_m^n$ это открытое подмногообразие в $\mathbb{A}^n$, заданное как $x_1 \cdots x_n \neq 0$, то есть ни одна из координат не должна обращаться в ноль.)*

3 Аффинные торические многообразия

3.1 Аффинное многообразие построенное по конусу

Если $\sigma \subset M_{\mathbb{Q}}$ конус, то как мы доказали в прошлой лекции, множество целых точек $S_\sigma = \sigma \cap M$ это конечно-порождённая полугруппа. Мы рассматриваем полугрупповую алгебру

$$R_\sigma = k[S_\sigma] := \bigoplus_{m \in S_\sigma} k \cdot x_m,$$

где умножение определяется с помощью $x_m \cdot x_{m'} = x_{m+m'}$. $k[S_\sigma]$ это аналог и обобщение кольца полиномов $k[x_1, \ldots, x_n]$. А именно получаем

$$k[\mathbb{Z}^n_{\geq 0}] = k[x_1, \ldots, x_n]$$
$$k[\mathbb{Z}^n] = k[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]$$

В общем случае, поскольку S_σ - конечно порождённая полугруппа, мы видим, что R_σ - это конечно-порождённая k-алгебра. Кроме того, поскольку $S_\sigma \subset M$, то R_σ - это градуированная k-подалгебра в алгебре *полиномов Лорана* $k[M] = k[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]$. ("Градуированная" в этом случае значит, что если комбинация $\sum a_m x_m \in R_\sigma$, то все $a_m x_m \in R_\sigma$.)

Аффинное торическое многообразие построенное по конусу σ это

$$X_\sigma = \operatorname{Spec} R_\sigma.$$

Согласно соответствию между аффинными многообразиями и k-алгебрами, имеем $k[X_\sigma] = R_\sigma$, то есть элементы $h \in R_\sigma$ - это функции на X_σ. Мы будем думать про функции x_m как про *координаты* на M.

Размерность аффинного торического многообразия X_σ - это размерность конуса σ (то есть размерность линейного подпространства $M_\mathbb{Q}$ порождённого σ). Обычно наши конусы $\sigma \subset M_\mathbb{Q}$ будут порождать $M_\mathbb{Q}$; тогда $\dim(X_\sigma) = \dim M = n$.

Пример 3.1. *Пусть $M = \mathbb{Z}$, одномерная решётка. В ней есть всего четыре конуса. Для нулевого конуса получаем $R = k$, $X = \mathrm{pt}$, для всей прямой получаем $R = k[u, u^{-1}]$, $X = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Для полупрямых получаем кольца полиномов $R = k[u], X = \mathbb{A}^1$, $R = k[u^{-1}], X = \mathbb{A}^1$.*

Пример 3.2. *Пусть $M = \mathbb{Z}^2$. Если σ квадрант $\mathbb{Q}_{\geq 0}(1,0) + \mathbb{Q}_{\geq 0}(0,1)$, получаем $R = k[u, v]$, $X = \mathbb{A}^2$.*

Пример 3.3. *Пусть снова $M = \mathbb{Z}^2$. Если σ конус $\mathbb{Q}_{\geq 0}(-1,1) + \mathbb{Q}_{\geq 0}(1,1)$, заметим, что множество целых точек в этом конусе порождено векторами $b_1 = (-1,1)$, $b_2 = (0,1)$, $b_3 = (1,1)$ с одним соотношением $b_1 + b_3 = 2b_2$, поэтому получаем $R = k[u, v, w]/(uw - v^2)$, $X = \{(u, v, w) : uw = v^2\} \subset \mathbb{A}^3$.*

Рассмотренные выше два многообразия имеют размерность два, поэтому мы называем их поверхностями.

3.2 Точки аффинного торического многообразия

Мы определили торическое многообразие X_σ через регулярные функции на нём. Например, элементы $x_m \in R_\sigma$ - это координаты. А как же точки? Для того чтобы их описать мы используем взаимно-однозначное соответствие между многообразиями и конечно-порождёнными алгебрами, которое контравариантно, то есть переворачивает направления отображений:

$$\begin{aligned} X_\sigma &= \mathrm{Hom}(\mathrm{pt}, X_\sigma) = \\ &= \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Spec}(R_\sigma)) = \\ &= \mathrm{Hom}(R_\sigma, k) = \\ &= \mathrm{Hom}(S_\sigma, (k, \times)). \end{aligned}$$

Здесь в первой и второй строчках Hom - это множество морфизмов в категории многообразий, в третьей строчке - в категории k-алгебр, а в последней - в категории полугрупп.

В явном виде, пусть $\alpha : S_\sigma \to (k, \times)$ это гомоморфизм полугрупп. Заметим, что S_σ это полугруппа по сложению, а $(k, \times)$ это полугруппа по умножению, то есть $\alpha(m + m') = \alpha(m)\alpha(m')$ и $\alpha(0) = 1$.

Пусть гомоморфизму α соответствует точка $P_\alpha \in X_\sigma$, и пусть x_m это одна из координат на X_σ. Что же значит вычислить значение координаты x_m на точке P_α? Ответ такой:

$$x_m(P_\alpha) = \alpha(m) \in k.$$

Например, пусть σ - конус с вершиной. Тогда на многообразии X_σ есть "торическая" точка, с нулевыми координатами. А именно, зададим $\alpha_0 : S_\sigma \to (k, \times)$ так что $\alpha_0(0) = 1$, $\alpha_0(m) = 0$ для $m \neq 0$. Заметим, что это определение задаёт гомоморфизм полугрупп именно потому, что σ конус с вершиной (то есть имеет нулевой конёк).

Соответствующую точку будем обозначать $0 \in X_\sigma$; по определению все её координаты $x_m(0)$ равны нулю (кроме тривиальной "координаты" $x_0 = 1$).

Кроме соответствия между точками и гомоморфизмами полугрупп, имеется ещё одно соответствие. Любой гомоморфизм алгебр $k[X_\sigma] \to k$ сюръективен и его ядро это максимальный идеал $m \subset k[X_\sigma]$, который для точки $P \in X_\sigma$ мы будем обозначать m_P.

3.3 Гладкость

Гибкость алгебраической геометрии заключается в том, что базовые геометрические определения даются в терминах алгебры $k[X]$. Продемонстрируем это на примере понятия гладкости. Гладкость алгебраического многообразия - интуитивное понятие. В дифференциальной геометрии и математическом анализе мы можем сказать, что парабола $y = x^2$ или окружность $x^2 + y^2 = 1$ гладкие (у них нигде не обнуляются производные) в то время как кривая $y^2 = x^3$ негладкая или особая.

Пусть $X \subset \mathbb{A}^N$ алгебраическое многообразие, и пусть $P = (a_1, \ldots, a_N) \in X$ точка на нём. Тогда идеал

$$m_P = (x_1 - a_1, \ldots, x_N - a_N) \subset k[X]$$

будет максимальным идеалом в кольце $k[X]$. Векторное пространство

$$m_P/m_P^2$$

называется *кокасательным пространством* к X в точке P. Очевидно, что кокасательное пространство имеет размерность не больше N. Многообразие X называется *гладким* в точке P если размерность кокасательного пространства в этой точке равна размерности многообразия, в противном случае мы говорим, что P - *особая точка* многообразия X.

На практике, как и в математическом анализе, нахождение особых точек сводится к вычислению производных (про это будет одна из задач).

Дадим теперь критерий неособости торического многообразия в терминах его конуса. Будем считать, что конус σ порождает n-мерную решётку M (в противном случае заменим решётку на меньшую, при этом торическое многообразие очевидно не изменится). Напомним, что в таком случае конус будет базисным, если он порождён базисом решётки.

Предложение 3.4. *(1) Если σ - конус с вершиной, то аффинное торическое многообразие X_σ неособо тогда и только тогда когда σ - базисный конус. В этом случае имеем $X_\sigma = \mathbb{A}^n$.*

(2) В общем случае, неособые торические многообразия имеют вид $X_\sigma = \mathbb{A}^{n-l} \times (\mathbb{G}_m)^l$, где l - размерность конька σ.

Пример 3.5. *Конус порождённый векторами* $(-1,1)$, $(1,1)$ *не является базисным для решётки* $\mathbb{Z}^2$, *и соответствующая аффинная торическая поверхность* $uw = v^2$ *не является гладкой в торической точке* $(u,v,w) = (0,0,0)$.

Доказательство. (1) Если конус базисный, то мы можем считать, что он порождён базисными векторами $e_1, \ldots, e_n$. В этом случае конечно $X_\sigma = \mathbb{A}^n$.

Наоборот, пусть X_σ неособое многообразие. Рассмотрим максимальный идеал $m_0 \subset R_\sigma$ порождённый целыми точками $\sigma \cap M$ (так называемый идеал аугментации). Этот идеал соответствует торической точке 0 торического многообразия (все координаты равны нулю). Рассмотрим кокасательное пространство m_0/m_0^2 в этой точке. По определению, m_0^2 порождён элементами $x_{m+m'}$ ($m, m' \in S_\sigma$, $m, m' \neq 0$), а значит

$$m_0/m_0^2 = \frac{\bigoplus_{0 \neq m' \in S_\sigma} k \cdot x_m}{\bigoplus_{0 \neq m, m' \in S_\sigma} k \cdot x_{m+m'}},$$

и размерность m_0/m_0^2 в точности равна количеству целых точек $\sigma \cap M$, которые не являются нетривиальными суммами других таких точек. Будем называть такие точки *неразложимыми*.

Все образующие $v_1, \ldots, v_N$ лучей конуса σ являются неразложимыми и поскольку σ порождает $M_\mathbb{Q}$, у него по крайней мере n лучей, то есть $N \geq n$. С другой стороны, из-за гладкости X_σ получаем, что размерность m_0/m_0^2 равна n, а значит у σ ровно $N = n$ лучей и все целые точки σ являются комбинациями $v_1, \ldots, v_n$. Отсюда легко следует, что конус базисный.

(2) Если конус имеет конёк, то $\sigma = \sigma' \times M''_\mathbb{Q}$, где $M = M' \oplus M''$, и конус $\sigma' \subset M'$ это конус с вершиной. Легко видеть, что $R_\sigma = R_{\sigma'}[z_1^\pm, \ldots, z_l^\pm]$, а значит $X_\sigma = X_{\sigma'} \times \mathbb{G}_m^l$, где l размерность M''. При этом гладкость X_σ равносильна гладкости $X_{\sigma'}$. Наконец, согласно (1), если $X_{\sigma'}$ гладкое, то $X_{\sigma'} \simeq \mathbb{A}^{n-l}$, $X_\sigma \simeq \mathbb{A}^{n-l} \times \mathbb{G}_m^l$. □

3.4 Морфизмы

Согласно соответствию между многообразиями и алгебрами, любой гомоморфизм полугрупп $\sigma' \cap M' \to \sigma \cap M$ задаёт морфизм (полиномиальное отображение) в другую сторону $X_\sigma \to X_{\sigma'}$. Простейший пример - это вложение конусов: если $\sigma' \subset \sigma \subset M_\mathbb{Q}$ конуса, то $R_{\sigma'}$ - это подкольцо в R_σ, а значит имеем морфизм $X_\sigma \to X_{\sigma'}$. Таким образом построение торического многообразия по конусу это контравариантное соответствие.

В дальнейшем, при склейке торических многообразий из аффинных мы будем переходить к двойственным конусам веера. Взятие торического многообразия у двойственного конуса это уже ковариантное соответствие. А именно, пусть заданы конуса с вершинами $\sigma \subset N_\mathbb{Q}$, $\sigma' \subset N'_\mathbb{Q}$ и линейное отображение решёток $\phi : N \to N'$, такое что $\phi(\sigma) \subset \sigma'$. Тогда имеем отображение двойственных решёток и конусов $\phi^\vee : \sigma'^\vee \to \sigma^\vee$, которое индуцирует отображение

$$X_{\sigma^\vee} \to X_{\sigma'^\vee}.$$

Самый важный частный случай этой конструкции такой. Пусть τ - грань конуса σ (оба конуса из $N_{\mathbb{Q}}$). Мы сейчас опишем соответствующее отображение $X_\tau \to X_\sigma$. Оно окажется *открытым вложением*, то есть инъективным отображением у которого образ - множество открытое в топологии Зарисского.

Начнём с того, что напишем по определению грани $\tau = m^\perp \cap \sigma$, где $m \in \sigma^\vee$ (вспомним, что двойственный конус - это множество поддерживающих гиперплоскостей $m^\perp$). Очевидно, можно считать, что m лежит в M. Значит $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{Q} \cdot m = \sigma^\vee + \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot (-m)$ (для доказательства первого равенства нужно перейти к двойственным конусам).

Для полугрупп получаем $S_{\tau^\vee} = S_{\sigma^\vee} + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-m)$, значит на уровне колец регулярных функций имеем

$$R_{\tau^\vee} = R_{\sigma^\vee}[x_m^{-1}],$$

а на уровне аффинных многообразий

$$X_{\tau^\vee} = X_{\sigma^\vee} \setminus \{x_m = 0\},$$

то есть $X_{\tau^\vee}$ это открытое подмножество $X_{\sigma^\vee}$ состоящее из точек с ненулевой координатой x_m.

Пример 3.6. *Пусть σ это положительный квадрант в $N_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^2$, тогда $\sigma^\vee$ это положительный квадрант в $M_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^2$ и $X_{\sigma^\vee} = \mathbb{A}^2$. Пусть $m \in S_\sigma$, то есть $m = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, а координата x_m равна $x^a y^b$. Пусть $\tau = m^\perp \cap \sigma$ - грань σ. В зависимости от m, τ может быть одним из двух граничных лучей, конусом σ целиком (тривиальная грань) или началом координат. В любом случае имеем*

$$R_{\tau^\vee} = R_{\sigma^\vee}[x_m^{-1}] = k[x,y][x^{-a}y^{-b}] = \begin{cases} k[x,y], & a = b = 0 \\ k[x^\pm, y], & a > 0, b = 0 \\ k[x, y^\pm], & a = 0, b > 0 \\ k[x^\pm, y^\pm], & a > 0, b > 0 \end{cases}.$$

В этих четырёх случаях получаем открытые подмножества $\mathbb{A}^2$, $\mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1$, $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m$, $\mathbb{G}_m^2$ в торическом многообразии $\mathbb{A}^2$.

Заметим, что если $\tau = 0$ это вершина конуса σ, то $X_{\tau^\vee}$ это открытое множество точек, где все координаты x_m ненулевые. При этом $X_{\tau^\vee} = \mathbb{G}_m^n$. Этот факт находится в соответствии с тем, что $\dim X_\sigma^\vee = n$ (потому что σ с вершиной, так что $\sigma^\vee$ порождает $M_{\mathbb{Q}}$), а размерности $\mathbb{G}_m^n$ "очевидно" равна n. Открытое подмногообразие $\mathbb{G}_m^n$ в торическом многообразии называется большим тором. Впоследствии, когда мы будем склеивать торические многообразия из аффинных, большие торы в них будут тривиально склеиваться между собой.

Замечание 3.7. *Торические многообразия называются торическими, потому что они содержат открытый тор $\mathbb{G}_m^n$, который рассматривается как алгебраическая группа (то есть группа $(k^*)^n$, которая является одновременно алгебраическим многообразием и групповые операции будут морфизмами), так что её действие на себе сдвигами продолжается до действия на X. К сожалению у нас нет времени разобраться в деталях в этой конструкции.*

3.5 Задачи

Задача 8. *Проверьте что аффинное многообразие X заданное одним уравнением $f(x_1, \ldots, x_N) = 0$ в $\mathbb{A}^N$ (многообразие заданное одним уравнением называется гиперповерхностью) особая тогда и только тогда когда все производные f обнуляются в какой-то точке X.*

Найдите все особые точки кубической кривой $y^2 = x^3 + Ax + B$ $(A, B \in k)$.

Задача 9. *Классифицируйте аффинные торические поверхности следующим образом. Пусть $r \geq 1$, $1 \leq a < r$, $\gcd(a, r) = 1$. Тогда $X_{r,a}$ это аффинная торическая поверхность заданная конусом между векторами $(1, 0)$, $(-a, r)$. Покажите, что любая аффинная торическая поверхность построенная по конусу с вершиной изоморфна одной из поверхностей $X_{r,a}$. Например, торическая поверхность построенная по конусу между порождённый лучами $(-1, 1)$ и $(1, 1)$ изоморфна $X_{2,1}$.*

Покажите, что $X_{r,a}$ и $X_{r',a'}$ будут изоморфны тогда и только тогда, когда $r = r'$ и либо $a \equiv a' \mod r$, либо $a \cdot a' \equiv 1 \mod r$.

Задача 10. *Опишите обратимые функции на $X_{\sigma^\vee}$, то есть обратимые элементы в кольце $k[X_{\sigma^\vee}]$.*

Задача 11. *Пусть Z произвольное аффинное многообразие. Опишите множество морфизмов $Hom(Z, X_\sigma)$ в терминах алгебры $k[Z]$ и полугруппы S_σ.*

Используя это описание, подумайте, любой ли морфизм между аффинными торическими многообразиями происходит из линейного отображения решёток и конусов.

4 Общие торические многообразия

4.1 Склейка торического многообразия заданного веером

Веер будет служить роль инструкции по которой мы склеим общее торическое многообразие из аффинных. Поясним на примере, что мы имеем в виду под склейкой. Рассмотрим две копии аффинной прямой $\mathbb{A}^1$. Чтобы различать эти две копии пусть на одной координата называется z, а на другой w (другими словами мы рассматриваем $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(k[z])$, $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(k[w])$). Чтобы *склеить* эти два аффинных многообразия, нужно указать *функции перехода* от координаты z к координате w. Если например, мы положим $z = w$, то в результате склейки получится одна копия $\mathbb{A}^1$. Чтобы склеить что-то нетривиальное нужно чтобы функции перехода были определены не везде. Например, положим $w = z^{-1}$. Это означает, что точки с ненулевыми координатами на двух копиях аффинных прямых склеиваются, в то время как начало координат не отождествляются ни с какими другими точками. Полученное многообразие называется проективной прямой $\mathbb{P}^1$. Неформально говоря мы приклеили к аффинной прямой точку на бесконечности. Действительно, все точки $\mathbb{P}^1$ имеют координату z, кроме единственной точки у которой $w = 0$, то есть “z равно бесконечности”. Таким образом координаты z, w определены не везде, а на открытых множествах $\mathbb{P}^1$. Там, где обе координаты определены выполняется соотношение $z = w^{-1}$.

В более абстрактных терминах, если даны многообразия X, Y, с открытыми подмножествами U, V, а также изоморфизм $\phi : U \to V$, то можно рассмотреть их склейку, то есть множество

$$X \cup_\phi Y,$$

которое содержит X, Y, как открытые подмножества, и в котором $U \subset X$ отождествлено с $V \subset Y$ с помощью ϕ. Эта конструкция обобщается на склейку конечного множества аффинных многообразий и является определением общего (то есть неаффинного) алгебраического многообразия.

Пусть Σ - веер в пространстве $N_\mathbb{Q}$. По каждому конусу $\sigma \in \Sigma$ построим аффинное многообразие $X_{\sigma^\vee}$. Вспомним, что если τ - грань σ, то $X_{\tau^\vee}$ - это открытое подмножество $X_{\sigma^\vee}$, заданное условием, что некоторая координата x_m не равна нулю. Именно этот факт позволяет нам провести склейку $X_{\sigma^\vee}$ и $X_{\sigma'^\vee}$ для конусов $\sigma, \sigma' \in \Sigma$. А именное, по определению веера $\sigma \cap \sigma' = \tau$ это тоже конус из веера, и он является гранью σ и σ'.

Воспользуемся так называемой Теоремой о Разделяющей Гиперплоскости: существует линейная функция $m \in N_\mathbb{Q}^\vee = M_\mathbb{Q}$ такая что σ лежит по одну сторону от гиперплоскости $m^\perp$, а σ' по другую. Мы можем считать, что $m \in M$ и что $m|_\sigma \geq 0$, $m|_{\sigma'} \leq 0$. При этом конечно $m|_\tau = 0$. Получаем

$$\begin{aligned} S_{\tau^\vee} &= S_{\sigma^\vee} + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-m), \quad m \in S_{\sigma^\vee} \\ S_{\tau^\vee} &= S_{\sigma'^\vee} + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot m, \quad -m \in S_{\sigma'^\vee} \end{aligned}$$

и значит для колец регулярных функций и аффинных многообразий имеем:

$$\begin{aligned} R_{\tau^\vee} &= R_{\sigma^\vee}[x_m^{-1}], \quad X_{\tau^\vee} = X_{\sigma^\vee} \setminus \{x_m = 0\} \\ R_{\tau^\vee} &= R_{\sigma'^\vee}[x_{-m}^{-1}], \quad X_{\tau^\vee} = X_{\sigma'^\vee} \setminus \{x_{-m} = 0\}. \end{aligned}$$

Вывод заключается в том, что существует координата $x = x_m$, определенная на $X_{\sigma^\vee}$, такая что её обратная $x^{-1} = x_{-m}$ определена на $X_{\sigma'^\vee}$ и

$$X_{\sigma^\vee} \cap \{x_m \neq 0\} = X_{\sigma'^\vee} \cap \{x_{-m} \neq 0\} = X_{\tau^\vee}.$$

Это позволяет произвести склейку многообразия $X(\Sigma)$ из всех $X_{\sigma^\vee}$ так что

$$X_{\sigma^\vee} \cap X_{\sigma'^\vee} = X_\tau,$$

для всех конусов $\sigma \cap \sigma' = \tau$ из веера.

Открытые аффинные подмногообразия $X_{\sigma^\vee} \subset X_\Sigma$ называют *аффинными картами.*

Пример 4.1. *Рассмотрим веер порожденный двумерными конусами σ, σ' с граничными векторами $(1,0),(0,1)$ и $(0,1),(-1,1)$ соответственно. Поскольку оба двумерных конуса базисные, то мы склеиваем две аффинные карты, изоморфные $\mathbb{A}^2$. Чтобы описать их склейку, вычислим, что $k[X_{\sigma^\vee}] = k[x,y]$, где $x = x_{(1,0)}$, $y = x_{(0,1)}$, в то время как $k[X_{\sigma'^\vee}] = k[u,v]$, где $u = x_{(-1,0)}$, $v = x_{(1,1)}$. Таким образом функции перехода между картами это*

$$u = x^{-1}$$

$$v = xy.$$

Пересечение аффинных карт имеет вид $\mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1$.

Пример 4.2. *Пусть $v_0, \dots, v_n$ - вектора порождающие n-мерную решётку N с соотношением $v_0 + \dots + v_n = 0$. Например, если $e_1, \dots, e_n$ - базис решётки $\mathbb{Z}^n$, то мы можем положить*

$$v_1 = e_1, \quad \dots, \quad v_n = e_n, \quad e_0 = -e_1 - \dots - e_n$$

Рассмотрим полный веер порождённый $v_0, \dots, v_n$, то есть веер с конусами порождёнными наборами $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$, $k \leq n$. В этом случае многообразие X_Σ это проективное пространство $\mathbb{P}^n$. По определению, это многообразие склеенное из $n+1$ копии аффинного пространства $\mathbb{A}^n$, где любые два аффинные пространства пересекаются по $\mathbb{A}^{n-1} \times \mathbb{G}_m$.

4.2 Морфизмы

Пусть Σ веер в $N_\mathbb{Q}$, а Σ' веер в $N'_\mathbb{Q}$, мы хотим задавать морфизмы из $X = X(\Sigma)$ в $X' = X(\Sigma)$. Что вообще такое морфизм из одного многообразия в другое? Морфизмы многообразий заданы локально, то есть на своём покрытии аффинными многообразиями с тем условием, что они являются согласованными (то есть равными) на пересечениях.

Возвращаясь к примеру $\mathbb{P}^1$ с координатами z, w и $w = z^{-1}$. Мы можем построить морфизм $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ по правилу $z' = z^2$, $w' = w^2$, потому что он задан полиномиально и не зависит от выбора координат. С другой стороны $z' = z^2$, $w' = w^3$ не является определением морфизма.

Для примера рассмотрим регулярные функции на $X(\Sigma)$, то есть морфизмы $X \to \mathbb{A}^1$. Напомним, что для аффинного торического многообразия $X_{\sigma^\vee}$ имеем

$$\mathrm{Hom}(X_{\sigma^\vee}, \mathbb{A}^1) = k[X_{\sigma^\vee}] = k[S_{\sigma^\vee}] \subset k[M],$$

полугрупповая алгебра состоящая из некоторых мономов (тех, которые лежат в конусе). Посмотрим, как можно склеить такие функции. Пусть σ, σ' это конуса в $N_\mathbb{Q}$, которые пересекаются по их общей грани τ, как обычно. Тогда регулярные функции на объединении $X_{\sigma^\vee} \cup_{X_{\tau^\vee}} X_{\sigma'^\vee}$ это

$$k[X_{\sigma^\vee} \cup_{X_{\tau^\vee}} X_{\sigma'^\vee}] = R_{\sigma^\vee} \cap R_{\sigma'^\vee} = R_{\sigma^\vee + \sigma'^\vee} = R_{(\sigma+\sigma')^\vee}.$$

Обобщая это вычисление на объединение всех аффинных карт получаем

$$k[X(\Sigma)] = k[(\sum_{\sigma \in \Sigma} \sigma)^\vee \cap M],$$

то есть нужно взять конус, порождённый всеми конусами из веера, двойственный к нему, а нём целые точки. Таким образом, если веер Σ не содержится в полупространстве (например это так если веер полный), то его конусы порождают $N_\mathbb{Q}$ и $k[X(\Sigma)] = k$, то есть все регулярные функции на X_Σ постоянны. (Заметим, что для аффинных многообразий такого быть не может: по теореме Гильберта о нулях аффинное многообразие однозначно определяется своим кольцом регулярных функций. В частности, единственное многообразие X на котором все регулярные функции постоянны - это точка pt.)

Перейдём теперь к рассмотрению морфизмов $X(\Sigma) \to X(\Sigma')$. Чтобы задать такой морфизм нужно задать отображение решёток $\phi : N \to N'$ согласованное с веерами Σ, Σ', а именно, требуется, чтобы образ каждого конуса из Σ содержался в одном из конусов Σ': $\phi(\sigma) \subset \sigma'$.

В этом случае у нас будет морфизм аффинных торических многообразий $X_{\sigma^\vee} \to X_{\sigma'^\vee}$, и когда $\sigma \in \Sigma$ пробегают все конуса, эти морфизмы склеиваются в корректно-определённый морфизм $X(\Sigma) \to X(\Sigma')$. Проверку корректности такого определения провести нетрудно, однако мы этого делать не будем.

Пример 4.3. *Рассматривая морфизмы $X(\Sigma) \to \mathbb{A}^1$, то есть регулярные функции на $X(\Sigma)$ получаем тот же ответ что и выше.*

Пример 4.4. *Пусть $N = N'$. В таком случае морфизм $X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ бирациональный, то есть существует открытое множество $U \subset X_\Sigma$ на котором этот морфизм будет изоморфизмом. Действительно, в качестве такого открытого множества можно взять большой тор $X_{0^\vee} = \mathbb{G}_m^n$.*

4.3 Полнота

Напомним, что мы знаем, когда торическое многообразие является гладким. А именно, гладкость - локальное свойство, которое достаточно проверять для каждой аффинной карты. Мы знаем, что $X_{\sigma^\vee}$ гладкое тогда и только тогда когда конус σ базисный (действительно, мы видели, что условие на гладкость в том, что $\sigma^\vee$ будет произведением своего конька на базисный конус, а это условие в точности равносильно тому, что σ базисный). Таким образом, гладкость $X(\Sigma)$ равносильна тому, что все конусы из Σ - базисные.

Другое очень важное свойство алгебраических многообразий - полнота, и оно тоже естественно описывается в терминах веера. Неформально говоря, многообразие называется полным, если оно содержит все свои предельные точки. Например, аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ не является полным, в то время как проективное пространство $\mathbb{P}^n$ является. Мы дадим следующее определение полноты (оно не совсем стандартное, но для торических многообразий равносильно стандартному). Многообразие X называется *полным*, если любой морфизм $f : \mathbb{G}_m \to X$ можно продолжить до морфизма $\widetilde{f} : \mathbb{A}^1 \to X$, то есть следующая диаграмму будет коммутативна

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{A}^1 \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}"] \\ & X \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Например, аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ не полное именно потому, что отображение $\mathbb{G}_m \to \mathbb{A}^n$ заданное как $f(t) = (t^{-1}, 0, \ldots, 0)$ не может быть продолжено до отображения $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^n$.

Из следующего утверждение следует например, что никакое аффинное торическое многообразие не может быть полным.

Предложение 4.5. *Торическое многообразие $X = X_\Sigma$ полное тогда и только тогда когда его веер Σ полный.*

Доказательство. Наша цель в том, чтобы интерпретировать диаграмму (4.1) на языке конусов веера Σ. Заметим, что $\mathbb{A}^1$ и $\mathbb{G}_m$ это торические многообразия заданными веерами в решётке $\mathbb{Z}$: для $\mathbb{G}_m$ это веер состоящий из начала координат, а для $\mathbb{A}^1$ это веер состоящий из начала координат и положительного луча.

Согласно нашему описанию морфизмов торических многообразий, морфизм $\mathbb{G}_m \to X$ задаётся линейным отображением решёток $\mathbb{Z} \to N$ (на конуса условий нет, потому что конус для $\mathbb{G}_m$ нулевой, и он отправляется в нулевой конус из Σ), которое в свою очередь определятся образом 1, назовём его $n \in N$.

В таком случае продолжение морфизма $f : \mathbb{G}_m \to X$ до морфизма $\widetilde{f} : \mathbb{A}^1 \to X$ равносильно тому, что образ конуса $x \geq 0$ в $\mathbb{N}_{\mathbb{Q}}$, то есть $\mathbb{Q}_{\geq 0}n$ лежит в каком-то из конусов Σ.

Таким образом мы получаем, что X полное тогда и только тогда когда любой $n \in N$ лежит в каком-то конусе из Σ. Это условие и есть полнота веера. □

Замечание 4.6. *В предыдущем доказательстве есть тонкость: мы никогда не утверждали что все морфизмы между торическими многообразиями могут быть заданы линейным отображением вееров (это неверно), однако в случае отображения $\mathbb{G}_m \to X(\Sigma)$ можно считать, что это так.*

4.4 Разрешение особенностей

Особые точки многообразия можно изучать, а можно *разрешать* то есть заменять на неособые, желательно минимальным способом. По определению, разрешение особенностей особого многообразия X это собственный бирациональный морфизм $X' \to X$, такой что X' неособое многообразие.

Пример 4.7. *Пусть $X = \{y^2 = x^3\}$ (кривая особая в начале координат). Отображение $\mathbb{A}^1 \to X$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ это разрешение особенностей: этот морфизм очевидно бирациональный, а собственность мы проверять не будем.*

Важная и трудная теорема Хиронаки заключается в том, что в характеристике ноль разрешение особенностей существует (в конечной характеристике это неизвестно). Для торических многообразий разрешение особенностей это вполне наглядная конструкция в терминах конусов веера, и она не требует предположения о характеристике поля.

Будем говорить, что веер Σ' это *подразбиение* конуса Σ если $|\Sigma'| = |\Sigma|$, и для любой конус $\sigma' \in \Sigma'$ содержится в каком-то конусе $\sigma \in \Sigma$.

Лемма 4.8. *Если Σ' - подразбиение конуса Σ, то морфизм $X(\Sigma) \to X(\Sigma')$ собственный и бирациональный.*

Доказательство. Как мы видели, бирациональность следует из того, что веера находятся в одной и той же решётке. Собственность следует из того что носители вееров совпадают. □

Предложение 4.9. *Для любого торического многообразия X существует разрешение особенностей $X' \to X$.*

Доказательство. Согласно нашему словарю, переводящему язык торических многообразий на язык вееров, если $X = X(\Sigma)$ построено по вееру Σ, то X' будет построено по вееру Σ', который является (a) подразбиением Σ и (b) состоящим из базисных конусов.

Мы видим, что достаточно рассмотреть случай одного конуса σ, и объяснить как подразбить его на базисные конуса. Это - индуктивный процесс. Первый шаг его в том, чтобы получить веер состоящий из симплициальных конусов. По определению, конус с вершиной называется симплициальным если его граничные лучи линейно независимы (двумерные конуса всегда симплициальны, а для трёхмерных это уже не верно). Добавляя рациональные лучи последовательно в конус размерности 3 и выше, легко добиться симплициальности конусов индукцией по размерности.

Таким образом мы можем считать, что σ - симплициальный конус. Нам нужно подразбить σ на базисные конуса. Напомним, что согласно упражнению **??**, симплициальный конус будет базисным тогда и только тогда объём его фундаментального параллелепипеда $|D|$ (который по определению есть модуль определителя D матрицы образующих граничных лучей) равен единице. Согласно тому же упражнению этот объём равен количеству точек полуоткрытого параллелепипеда.

Значит, если σ симплициальный, но не базисный, и $v_1, \ldots, v_n$ образующие его граничных лучей, то $|D| > 1$ так что найдётся точка

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in M \cap \sigma, \quad 0 < \alpha_i < 1.$$

Мы можем считать, что v минимальный целый вектор на своём луче. Теперь мы разобьём конус σ на n конусов. Новые конуса имеют в качестве граничных лучей $n-1$ векторов из $v_1, \ldots, v_n$ и новый вектор v.

Используя свойства определителей, легко видеть, что объём фундаментального параллелепипеда для новых конусов будет равен

$$\alpha_1|D|, \ldots, \alpha_n|D|,$$

в частности каждый из них имеет меньший объём, чем первоначальный параллелепипед. Продолжая по индукции мы добьёмся того, что все объёмы будут равны единице, то есть все конуса будут базисными. □

Пример 4.10. *Рассмотрим конуса с граничными векторами* $(-1, 1)$, $(1, 1)$ *в решётке* $\mathbb{Z}^2$. *Соответствующее аффинное торическое многообразие* X *негладкое, чтобы получить его разрешение, мы подразбиваем конус, добавляя луч* $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot (0, 1)$.

4.5 Задачи

Задача 12. *Опишите функции перехода между аффинными картами для* $\mathbb{P}^1$ *и* $\mathbb{P}^2$ *(а также подумайте про* $\mathbb{P}^n$ *при произвольном* n*).*

Задача 13. *Подумайте, что произойдёт с полным торическим многообразием при удалении максимального конуса из веера.*

Задача 14. *Рассмотрим веер порожденный двумерными конусами σ, σ' с граничными векторами $(1,0),(0,1)$ и $(0,1),(-1,a)$ соответственно ($a \in \mathbb{Z}$), и пусть X построенная по данному вееру торическая поверхность.*

Постройте морфизм $X \to \mathbb{P}^1$ у которого все слои изоморфны аффинной прямой $\mathbb{A}^1$. При каких значениях a, X будет изоморфна поверхности $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$?

Задача 15. *Кроме понятия полноты, существует его относительная версия - собственность. Морфизм алгебраических многообразий $X \to Y$ будем называть собственным, если в любой диаграмме морфизмов*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1 \arrow[d] \arrow[dl, dashed] \\
X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

всегда существует пунктирная стрелка, которая делает диаграмму коммутативной. Если $Y = \mathrm{pt}$, то получаем определение полноты X.

Покажите, что отображение $X(\Sigma) \to X(\Sigma')$ торических многообразий собственное тогда и только тогда когда любая точка из $N_{\mathbb{Q}}$ образ которой лежит в носителе веера Σ', сама лежит в носителе веера Σ.

Задача 16. *(1) Разрешите особенность $X_{7,3}$ на первом шаге добавив вектор $(0,1)$, приведите новую особенность к стандартной форме $X_{r,a}$, и продолжайте по индукции. У вас должна получится последовательность особенностей $X_{7,3}$, $X_{3,2}$, $X_{2,1}$.*
(2) В общем случае разрешение особенности $X_{r,a}$ связано с разложением r/a в знакопеременную непрерывную дробь

$$\frac{r}{a} = [d_1, \dots, d_t] := d_1 - \frac{1}{d_2 - \frac{1}{d_3 - \dots}} \tag{4.2}$$

(это не совсем стандартное обозначение, обычно непрерывные дроби пишутся без знаков, однако для торических многообразий нам нужны именно знакопеременные непрерывные дроби). Докажем это используя модификацию алгоритма Евклида. Пусть $d = \lceil r/a \rceil$, и $r = da - x$. Покажите что на первом шаге разрешения особенности $X_{r,a}$ мы получим особенность $X_{a,x}$, и продолжая по индукции покажите что особенность разрешается за t шагов, где t - длина непрерывной дроби (4.2) и что особенности полученные в процессе разрешения это $[d_j, \dots, d_t]$ где $1 \leq j \leq t$.
(3) Опишите разрешение особенностей $X_{7,3}$, $X_{r,1}$, $X_{r,r-1}$ в терминах непрерывных дробей.

Задача 17. *Пусть Σ - веер построенный по конусу между векторами $(0,1)$, $(1,0)$, а Σ' - его подразбиение полученное добавлением луча $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot (1,1)$. Пусть $X = X(\Sigma)$, $X' = X(\Sigma')$. Тогда $X = \mathbb{A}^2$, и у нас есть собственный бирациональный морфизм $X' \to X$, и X' гладкое. Этот морфизм называется раздутием.*

Опишите геометрию раздутия в аффинных картах. В частности, покажите, что торическая точка $(0,0) \in \mathbb{A}^2$ заменяется на копию проективной прямой $\mathbb{P}^1$, а на дополнении к этим подмногообразиям раздутие - это изоморфизм.

5 Геометрия торических поверхностей и подсчёт целых точек в многогранниках

5.1 Торические поверхности

Продемонстрируем что мы знаем и умеем на примере полных гладких торических поверхностей. Рассмотрим последовательность векторов

$$v_1, \ldots, v_k = v_0$$

в решётке N с условием, что v_i примитивны (то есть они ненулевые и минимальные на своих лучах) и расположены на плоскости в порядке обхода против часовой стрелки. Действительно, такая последовательность векторов однозначно определяет полный веер Σ, а значит полную, но возможно негладкую торическую поверхность $X(\Sigma)$. Очевидно, что минимальное количество векторов равно трём.

Пример 5.1. *Пусть $a, b, c \geq 1$ попарно взаимно-просты. Пусть $v_0, v_1, v_2 \in N$ примитивные вектора в двумерной решётке такие что*

$$av_0 + bv_1 + cv_2 = 0.$$

Полная торическая поверхность построенная по такому вееру - это так называемая взвешенная проективная плоскость $\mathbb{P}(a,b,c)$. В частности, $\mathbb{P}(1,1,1) = \mathbb{P}^2$ неособа, однако при всех других значениях a, b, c поверхность будет особая. Таким образом $\mathbb{P}^2$ единственная неособая полная торическая поверхность построенная по вееру из трёх двумерных конусов.

Гладкость нашей торической поверхности $X(\Sigma)$ равносильна требованию, что любые два последовательные вектора v_i, v_{i+1} были базисом решётки.

Кроме того, мы знаем, что для того, чтобы разрешить особенности нам нужно подразбить веер на базисные конуса, то есть добавить векторов в последовательность.

Пример 5.2. *Разрешим особенности поверхности $\mathbb{P}(1,1,a)$, $a > 1$. Она задана веером на векторах*

$$(1,0), (0,1), (-1,-a).$$

Два конуса из веера базисные, а конус порождённый $(1,0)$, $(-1,-a)$ небазисный. Таким образом, чтобы разрешить особенности $\mathbb{P}(1,1,a)$ мы добавляем один вектор

$$(1,0), (0,1), (-1,-a), (0,-1).$$

Полученная поверхность - полная гладкая торическая поверхность склеенная из четырёх аффинных карт. Эта поверхность называется поверхностью Хирцебруха и обозначается $\mathbb{F}_a$. Мы также разрешим $a = 0, 1$. Имеем $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а $\mathbb{F}_1$ допускает собственный бирациональный морфизм $\mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$ (раздутие точки).

Легко проверить, что любая полная гладкая торическая поверхность построенная по вееру из четырёх максимальных конусов будет изоморфна поверхности Хирцебруха.

В современной алгебраической геометрии центральную роль играет так называемая программа минимальных моделей: описание всех алгебраических многообразий в терминах некоторого набора минимальных. Для поверхностей это классический и несложный результат. Для торических поверхностей вопрос сводится к комбинаторике векторов в $\mathbb{Z}^2$.

Предложение 5.3 (Программа минимальных моделей для торических поверхностей)**.** *Любая полная гладкая торическая поверхность получается из $\mathbb{P}^2$ или $\mathbb{F}_a$ конечным числом раздутий.*

Доказательство. Напомним, что раздутие - это добавление нового вектора в последовательность с сохранением базисности двумерных конусов. Таким образом, если мы рассматриваем конус на векторах v_i, v_{i+1} единственный способ добавить между ними вектор с сохранением базисности - это добавить вектор $v_i + v_{i+1}$.

Таким образом, нам необходимо показать, что в любой последовательности $v_1, \ldots, v_k$ с условием базисности, если $k \geq 5$, то найдётся j такой что

$$v_j = v_{j-1} + v_{j+1}. \tag{5.1}$$

Действительно в таком случая удаляя вектор v_j из последовательности мы получим гладкую полную поверхность с веером из $k-1$ векторов. Наконец, случай $k = 4$ даёт поверхности Хирцебруха, а $k = 3$ даёт проективную плоскость.

Задача сведена к хоть и простой, но нетривиальной комбинаторике. Заметим, что в общем случае имеем

$$v_{j+1} + v_{j-1} = a_j v_j,$$

это можно вывести рассматривая определитель, или меняя координаты так что $v_{j-1} = e_1$, $v_j = e_2$. Нам нужно доказать, что один из $a_j = 1$.

Доказательство существования индекса j со свойством (5.1) проводится в два шага.

1. Если $k \geq 4$, то в веере найдутся два противоположных вектора v и $-v$. Мы опустим этот шаг. См. детали в книге Фултона, где этот шаг - упражнение с подсказкой.

2. Покажем, что если v_1 и v_k противоположные вектора, $k \geq 4$, то найдётся $1 < j < k$ (5.1) будет выполнено. Поскольку v_1, v_2 это базис решётки, после замены координат, мы можем считать, что $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, $v_k = -e_1$, то есть

вектора $v_2, \dots, v_k$ лежат во втором квадранте (между e_2 и $-e_1$), а значит они имеют координаты

$$v_j = (-x_j, y_j), \quad x_j, y_j \geq 0 \quad (2 \leq j \leq k).$$

Пусть $z_j = x_j + y_j \geq 1$, имеем

$$z_2 = 1, \quad z_3 \geq 2, \quad z_k = 1.$$

Это значит что найдётся индекс j такой что

$$z_j > z_{j-1}, \quad z_j \geq z_{j+1},$$

в частности $z_{j-1} + z_j < z_{j+1}$. Отсюда уже легко получаем, что $a_j = 1$.

□

Полные торические поверхности можно строить через *веер внешних нормалей*. Пусть Δ - выпуклый многоугольник с вершинами в решётке M. Внутренние углы Δ задаются набор конусов так что двойственные к ним образуют полный веер Σ_Δ для двойственной решётки N. Геометрически Σ нужно представлять как веер внешних нормалей к сторонам Δ.

Заметим, что при сдвиге $\Delta + m$ $(m \in M)$ или растяжении $n \cdot \Delta$, веер Σ внешних нормалей не меняется.

Пример 5.4. *Многоугольники для $\mathbb{P}^2$ (треугольник), $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (квадрат) и $\mathbb{F}_a$ (некоторый неправильный четырёхугольник).*

5.2 Линейные расслоения на торической поверхности

Линейное расслоение на многообразии X, склеенного из аффинных карт X_α - получается как склейка набора тривиальных расслоений $X_\alpha \times \mathbb{A}^1$ функциями перехода, которые линейны по второму аргументы. Если вы думаете, что никогда не видели линейных расслоений, подумайте про ленту Мёбиуса: она проектируется на свою центральную окружность так что над конечными отрезками I_α окружности она представляет собой прямое произведение $I_\alpha \times \mathbb{R}$, однако она не является декартовым произведением окружности на $\mathbb{R}$.

Пусть Σ - веер в решётке N, как обычно. *Данными склейки линейного расслоения* называется согласованный набор

$$m_\sigma \in M/(\text{конёк}(\sigma^\vee) \cap M),$$

для всех $\sigma \in \Sigma$. Под согласованностью мы имеем в виду, что для любой грани $\tau \subset \sigma$ ограничение m_σ в $M/(\text{конёк}(\tau^\vee) \cap M)$ будет равно m_τ. Заметим, что это определение имеет смысл потому, что конёк$(\sigma^\vee) \subset$ конёк$(\tau^\vee)$ так что есть естественное отображение ограничения

$$M/(\text{конёк}(\sigma^\vee) \cap M) \to M/(\text{конёк}(\tau^\vee) \cap M).$$

Заметим, что из свойства согласованности следует что достаточно задать m_σ только для максимальных конусов $\sigma \in \Sigma$.

Например, для двумерного полного веера Σ данные склейки линейного расслоения - это задание $m_\sigma \in M$ для каждого двумерного конуса с тем условием согласованности, что если σ, σ' соседние двумерные конуса с общим граничным лучом τ, то разница $m_\sigma - m'_\sigma$ ортогональна лучу τ.

Пример 5.5. *Рассмотрим данные склейки линейных расслоений на* $\mathbb{P}^2$. *Пусть* $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$, $v_3 = (-1,-1)$, *и* $\sigma_{i,i+1}$ *- конус между* v_i *и* v_{i+1}. *В таком случае данные склейки задаются так:*

$$\begin{aligned} m_{\sigma_{12}} &= (a,b) \\ m_{\sigma_{23}} &= (a+\alpha, b) \\ m_{\sigma_{31}} &= (a, b-\alpha). \end{aligned}$$

Здесь $a, b, \alpha \in \mathbb{Z}$.

Объясним теперь как склеить линейное расслоение $L \to X(\Sigma)$ по его данным склейки. Ограничимся для простоты случаем полной торической поверхности.

Пусть σ, σ' двумерные конуса веера, пересекающиеся по лучу τ. Тогда $X_{\sigma^\vee}$, $X_{\sigma'^\vee}$ это аффинные карты $X(\Sigma)$ которые пересекаются по открытому множеству $X_{\tau^\vee}$.

Нам нужно объяснить как склеить $X_{\sigma^\vee} \times \mathbb{A}^1$ с $X_{\sigma'^\vee} \times \mathbb{A}^1$. Это можно сделать задав функцию перехода, то есть изоморфизм

$$X_{\tau^\vee} \times \mathbb{A}^1 \simeq X_{\tau^\vee} \times \mathbb{A}^1,$$

линейный по второму аргументу. Такой изоморфизм задаётся функцией

$$\xi : X_{\tau^\vee} \to \mathbb{G}_m,$$

а именно

$$X_{\tau^\vee} \times \mathbb{A}^1 \simeq X_{\tau^\vee} \times \mathbb{A}^1, \quad (P, y) \mapsto (P, \xi(P) \cdot y).$$

(Здесь нужно выбрать в какую наши функции перехода, пусть они например идут против часовой стрелки.)

Функцию ξ (обратимую функцию на $X_{\sigma^\vee}$ мы зададим через $m_\sigma - m'_\sigma \in$ конёк$(\tau^\vee)$. Заметим, что склейка линейного расслоения происходит согласованно со склейкой торического многообразия, другими словами у нас склеился морфизм

$$p : L \to X(\Sigma),$$

у которого все слои (прообразы точек) изоморфны $\mathbb{A}^1$.

Например, если все $m_\sigma = 0$ (тривиальные данные склейки), то получаем *тривиальное линейное расслоение* $p : X(\Sigma) \times \mathbb{A}^1 \to X(\Sigma)$.

Опишем теперь когда данные склейки задают изоморфные аффинные расслоения. По определению группа классов изоморфизма линейных расслоений на многообразии X называется группой Пикара $\mathrm{Pic}(X)$. Операция в этой группе - тензорное умножение линейных расслоений.

Заметим, что M действует на данных склейки сдвигом, и при этом полученное линейное расслоение не меняется.

Пример 5.6. *В примере $\mathbb{P}^2$ рассмотренном выше можно считать*

$$\begin{aligned} m_{\sigma_{12}} &= (0,0) \\ m_{\sigma_{23}} &= (\alpha,0) \\ m_{\sigma_{31}} &= (0,-\alpha). \end{aligned}$$

Соответствующее линейное расслоение на $\mathbb{P}^2$ обознается $\mathcal{O}(\alpha)$.

Лемма 5.7. *Имеется изоморфизм групп*

$$\{\textit{Данные склейки линейных расслоений}\}/M \simeq \mathrm{Pic}(X),$$

где M действует на данных склейки сдвигом.

Пример 5.8. *Имеется изоморфизм $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}$, где $\mathcal{O}(\alpha)$ соответствует $\alpha \in \mathbb{Z}$. Вообще, если X - полная торическая поверхность построенная по вееру из k конусов, то $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}^{k-2}$.*

Если $p : L \to X$ линейное расслоение, то морфизм $s : X \to L$ называется его *сечением* (или глобальным сечением) если $ps = id_X$. Аналогично определяются сечения расслоения над любым открытым множеством $U \subset X$, такие сечения $s : U \to L$ называются *локальными сечениями*. Множество таких локальных сечений обозначается $\Gamma(U, L)$. Заметим, что это множество - векторное пространство над k, в частности у L есть нулевое сечение (которое каждой точке ставит в соответствие ноль в слое).

Эквивалентный способ задания линейного расслоения L - это задать его локальные сечения над всеми $X_{\sigma^\vee}$. Эти локальные сечения имеют вид

$$\Gamma(X_{\sigma^\vee}, L) = x_{m_\sigma} \cdot R_{\sigma^\vee} \subset k[M].$$

Опишем теперь глобальные сечения L в терминах данных склейки линейного расслоения. Это будет сделано в терминах некоторого многогранника. Многогранником линейного расслоения называется

$$\Delta(L) = \bigcap (\sigma^\vee + m_\sigma) \subset M_\mathbb{R}.$$

В случае полного веера, $\Delta(L)$ будет выпуклым многогранником, например для полных торических поверхностей, это выпуклый многоугольник. Для неполного веера $\Delta(L)$ может быть неограниченным (то есть это уже не совсем многогранник).

Предложение 5.9. *Имеется изоморфизм k-векторных пространств*

$$\Gamma(X(\Sigma), L) = \bigoplus_{m \in \Delta(L) \cap M} k \cdot m \subset k[M].$$

Доказательство. Согласно описанию локальных сечений $\Gamma(X_{\sigma^\vee}, L)$ имеем

$$\Gamma(X(\Sigma), L) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \Gamma(X_{\sigma^\vee}, L) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} x_{m_\sigma} \cdot R_{\sigma^\vee} = \bigoplus_{m \in \Delta(L) \cap M} k \cdot m \subset k[M].$$

□

В частности, если веер полный, то $\Delta(L)$ компактное множество (замкнутое и ограниченное), значит в нём конечное число целых точек, так что $\Gamma(X(\Sigma), L)$ - конечномерное векторное пространство. Это общий факт про алгебраические многообразий, который у нас как обычно, получился из комбинаторных соображений.

Будем обозначать глобальное сечение соответствующее $m \in \Delta(L) \cap M$ как s_m. Это обобщает понятие координат x_m на аффинных торических многообразиях. Действительно, регулярные функции - это в точности сечения тривиального расслоения.

Следствие 5.10. *Для всех $n \geq 0$ имеется изоморфизм $\Gamma(X(\Sigma), L^{\otimes} n) = \bigoplus_{m \in n \cdot \Delta(L) \cap M} k \cdot m \subset k[M]$, где $n \cdot \Delta(L)$ - это растяжение многогранника в n раз.*

Доказательство. Поскольку $L^{\otimes n}$ соответствуют данные склейки $n \cdot m_\sigma$, то получается что соответствующие конуса не меняются в то время как вершины многогранника умножаются на n (как вектора), а значит многогранник будет растянут в n раз. □

Удобно описывать линейные расслоения и их сечения в терминах кусочно-линейных функций на конусах веере. Чтобы это сделать заметим, что данные склейки (m_σ) определяют функцию на носителе веера Σ следующим образом. Каждая m_σ может рассматриваться как линейная функция на σ, и при этом согласованность данных склейки в точности равносильна тому, что эти функции корректно определяют кусочно-линейную функцию $g : |\Sigma| \to \mathbb{R}$.

Далее, элемент $m \in M$ задаёт глобальное сечение L тогда и только тогда, когда для всех $\sigma \in \Sigma$ выполняется $m \in m_\sigma + \sigma^\vee$, то есть $m - m_\sigma$, рассматриваемая как линейная функция на $N_\mathbb{R}$ будет неотрицательна на σ. Другими словами требуется, что бы между функциями m, g на $|\Sigma|$ выполнялось неравенство $m|_{|\Sigma|} \geq g$.

Пример 5.11. *Сечения линейных расслоений на $\mathbb{P}^1$. Пусть $\mathcal{O}(\alpha)$ - линейное расслоение на $\mathbb{P}^1$ построенное по данным склейки: $m = 0$ на положительном луче, $m = \alpha$ на отрицательном луче. В таком случае, кусочно линейная функция g на $\mathbb{R}$ определена как 0 при $x \geq 0$ и $\alpha \cdot x$ при $x \leq 0$.*

Мы видим, что у $\mathcal{O}(\alpha)$ есть ненулевые сечения тогда и только тогда когда $\alpha \geq 0$, и в этом случае $\dim \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\alpha)) = \alpha + 1$.

В алгебраической геометрии важно знать много или мало у линейного расслоения глобальных сечений. Поясним, что это может значить. Говорят, что линейное расслоение $p : L \to X$ *порождается своими глобальными сечениями* если для любой точки $P \in X$ найдётся сечение $s \in \Gamma(X, L)$ так что $s(P) \neq 0$.

Как обычно для торических многообразий такой вопрос может быть переформулирован в терминах веера.

Предложение 5.12. *$L \to X(\Sigma)$ порождается глобальными сечениями тогда и только тогда когда g - функция выпуклая вверх (на $|\Sigma|$).*

Доказательство. Мы дадим идею доказательства. Для того чтобы L порождалось глобальными сечениями необходимо и достаточно, чтобы линейная функция m_σ удовлетворяла $m_\sigma \geq g$ на $|\Sigma|$. Это условие в свою очередь равносильно выпуклости функции g. □

5.3 Подсчёт точек в многоугольниках

Мы видели что размерность пространства $\Gamma(X(\Sigma), L)$ равна числу точек в некотором многограннике.

Можно наоборот, по многограннику Δ построить торическое многообразие. Мы видели как это сделать в размерности два (веер внешних нормалей). Оказывается, что зафиксировать многогранник, построить по нему торическое многообразие и линейное расслоение так что $L(\Delta)$ даёт исходный многогранник. Это позволяет вычислять число целых точек в многограннике через в терминах линейных расслоений на торических многообразиях.

Кроме того, вершины $m_\sigma \in M$ многоугольника Δ определяют данные склейки для линейного расслоения L_Δ на полной торической поверхности $X = X_\Delta := X(\Sigma_\Delta)$. Можно показать, что L порождено своими глобальными сечениями.

Теорема 5.13 (Теорема Римана-Роха для гладких полных торических поверхностей)**.** *Если $L \to X(\Sigma)$ расслоение над гладкой полной торической поверхностью и L порождено своими глобальными сечениями, то*

$$\dim_k \Gamma(X, L) = \frac{1}{2}c_1(L)^2 + \frac{1}{2}c_1(L) \cdot (-K) + 1.$$

К сожалению для того чтобы объяснить что стоит в правой части равенства, нужно разбирать теорию пересечений на поверхностях (дивизоры, канонический класс K, пересечение дивизоров), а также когомологии линейных расслоений.

Если мы заменим L на $L^{\otimes n}$ в формуле, получим

$$\dim_k \Gamma(X, L^{\otimes n}) = \frac{n^2}{2}c_1(L)^2 + \frac{n}{2}c_1(L) \cdot (-K) + 1,$$

то есть формула получилась сгруппирована по степеням n.

Возвращаясь к вопросу о подсчёте числа точек в выпуклом многоугольнике с целыми вершинами, из этой формулы можно вывести такую формулу для подсчёта целых точек в $n\Delta$ (чтобы вывести формулу хорошо знать что такое класс Тодда алгебраического многообразия):

$$\#(n\Delta) = n^2 S(\Delta) + \frac{n}{2}l(\Delta) + 1.$$

Здесь # - число целых точек, $S(\Delta)$ - это площадь, а $l(\Delta)$ - периметр взятый относительно решётки M, то есть число целых точек на границе Δ. То есть при растяжении Δ - в первом приближении число целых точек равно площади, а следующий член связан уже с периметром!

Эта формула, при $n = 1$ называется *формула Пика*:

$$\#(\Delta) = S(\Delta) + \frac{1}{2}l(\Delta) + 1.$$

5.4 Задачи

Задача 18. *Опишите данные склейки линейных расслоений на поверхности Хирцебруха* $\mathbb{F}_a$.

Задача 19. *Приведите пример гладкой полной торической поверхности* X *и линейного расслоения* L *на ней так что* $\Gamma(X, L) \neq 0$, *но* L *не порождается глобальными сечениями.*

Задача 20. *Покажите, что для произвольного торического многообразия* $\mathrm{Pic}(X)$ *- свободная конечно-порожденная абелева группа.*

Задача 21. *Докажите формулу Пика (вне связи с торическими поверхностями).*

Задача 22. *Подумайте, любая ли гладкая полная торическая поверхность строится по вееру внешних нормалей к выпуклому многоугольнику.*