А. Н. Ширяев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,

МГУ им. М. В. Ломоносова

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ И БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

1.1. В 1827 г. шотландский ботаник Роберт Браун наблюдал под микроскопом помещенные в воду крошечные крупинки цветочной пыльцы.

Он заметил, что эти крупинки совершают крайне беспорядочные, зигзагообразные движения. Согласно его же словам, наблюдаемые движения “не связаны с потоками в жидкости, с испарением, а присущи самим частицам”.

Это движение впоследствии было названо *броуновским движением*.

Сама суть этого движения была понята лишь позднее – было объяснено, что оно вызвано тем, что молекулы жидкости (воды) производят огромное число хаотических ударов по частицам за сколь угодно малый интервал времени.

Механизм броуновского движения был впервые объяснен в 1905 г. А. Эйнштейном в статье

“On the motion of small particles suspended in
a stationary liquid demanded by
the molecular-kinetic theory of heat”
(Ann. Phys. Ser 4, 7 (1905), 549-560).

Близкими к работе А. Эйнштейна были работы М. Смолуховского 1906 г.

Суть метода А. Эйнштейна состояла в том, что для математического изучения броуновского движения он применяет вероятностно-статистический подход, показывая, что плотность $\varphi_t(x)$ вероятности положения частицы (по каждой из координат) в момент времени t удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \varphi_t(x)}{\partial x^2},$$

из чего он заключает, что за время t частица смещается на расстояние порядка $\sqrt{t}$.

А затем (во второй части работы) А.Эйнштейн выясняет зависимость коэффициента диффузии D от ряда физических величин (числа Авогадро, температуры, вязкости жидкости).

1.2. Работа А. Эйнштейна (1905 г.) сразу привлекла внимание физиков, поскольку давала (косвенное) доказательство существования атомов и молекул, которое затем было экспериментально подтверждено в работах французского физика Ж. Перрена (Jean Perrin) в 1908 г.

Следующий шаг в математическом объяснении траекторных свойств броуновского движения частиц был сделан в 1920–1930-х годах американским математиком Н. Винером, в честь которого броуновское движение называют также

винеровским процессом.

Этот процесс играет значительную роль в современной теории случайных процессов.

Вот что писал Н. Винер в своей книге “Я – математик” (М., 2001, рус. пер. издания “I am Mathematician”, 1956):

“*Само по себе броуновское движение не было совсем неисследованной областью физики. Но в фундаментальных работах Эйнштейна и Смолуховского, посвященных этой проблеме, изучалось или*

- *поведение некоторой частицы в какой-то фиксированных момент времени, или*
- *зависящие от времени статистические характеристики большой совокупности частиц.*

Математические же свойства траекторий отдельных частиц никак не затрагивались. В этом последнем направлении почти ничего не было известно, если не считать глубокого замечания французского физика Перрена, отметившего в своей книге "Атомы" ("Les atomes", Paris, 1913), что крайне нерегулярные траектории частиц, совершающих броуновское движение, заставляют вспомнить непрерывные, нигде не дифференцируемые кривые математиков.

В этом замечании говорится о непрерывности, поскольку частицы не совершают никаких мгновенных скачков, и о недифференцируемости – поскольку кажется, что ни в какой момент времени эти частицы не обладают точно определенным направлением движения."

1.3. Свойства траекторий броуновского движения имеют естественное объяснение, если рассматривать это движение как

предел случайного блуждания.

Идеализируя броуновское движение, будем считать, что "удары" происходят в моменты $1, 2, \ldots$. Тогда положение частицы (по каждой координате) можно описывать так:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \tag{1}$$

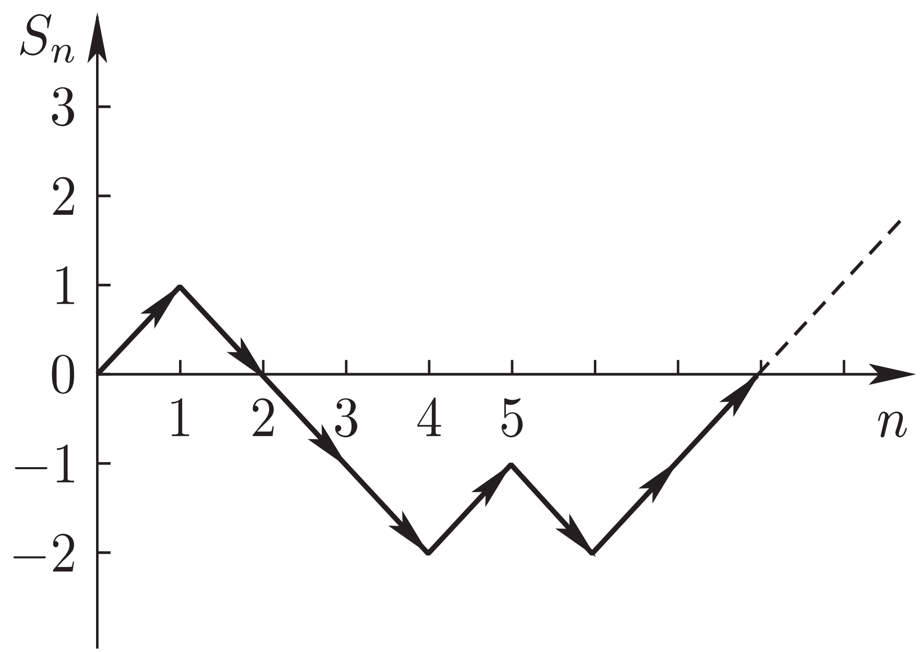
где X_i – "величина удара" в момент времени i.

В простейшем случае можно считать, что X_i принимают ДВА значения:

$\boxed{+1 \text{ (толчок вправо)}}$ и $\boxed{-1 \text{ (толчок влево)}}$

При этом можно считать (почему – объясним позже), что величины $X_1, X_2, \ldots$ *независимы*.

Полагая $S_0 = 0$, видим, что S_n, $n \geq 0$, можно представить в виде *блуждания* – как изображено на приводимом рисунке:



Чтобы дать строго определение

случайного блуждания $S = (S_n)_{n \ge 0}$,

надо ввести некоторые **ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПОНЯТИЯ**.

Мы видим, что величины $(X_1, \dots, X_n)$ (при любом $n \ge 1$) принимают значения $(\pm 1, \dots, \pm 1)$. Всего таких разных значений величин $(X_1, \dots, X_n)$ будет, очевидно, 2^n.

Надо описать, что мы вкладываем в понятие *случайности* блуждания (в моменты времени $t = 1, \dots, n$).

Обозначим $\omega = (x_1, \ldots, x_n)$ конечные последовательности, где $x_i = \pm 1$. Тогда множество таких последовательностей ω будем обозначать Ω:

$$\Omega = \{\omega\}.$$

В теории вероятностей это множество называется

$$\underline{\underline{\text{пространством элементарных исходов (или “случаев”)}}}.$$

Желая иметь разнообразные комбинации $(X_1, \ldots, X_n)$, принимающие разные значения $\omega = (x_1, \ldots, x_n)$, будем писать

$$S_n(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$$

и считать, что для данного $\omega = (x_1, \ldots, x_n)$

$$X_i(\omega) = x_i \quad (= \pm 1).$$

Описанная выше схема – это стандартная схема в теории вероятностей, если мы хотим говорить о случайности последовательности $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$. Именно

$$\omega = (x_1, \ldots, x_n)$$

и можно считать **“случайностью”**.

При этом величины $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ (как функции от “случая” ω) называют

случайными величинами.

В пространстве $\Omega = \{\omega\}$ можно рассматривать

РАЗНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА.

- Например, множество тех ω, для которых $S_n(\omega) = k$:

$$A = \{\omega\colon\ S_n(\omega) = k\},$$

т.е. множество элементарных исходов ω, для которых сумма $S_n(\omega)$ принимает значение, равное k.

- Если $|k| > n$, то, очевидно,

$$A = \varnothing \text{ − пустое множество.}$$

- Если $\Omega = \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$, то примером подмножества можем служить множество

$$A = \{\omega = (x_1, x_2)\colon\ x_2 = 1\}, \quad \text{т.е.} \quad \{(1,1),(-1,1)\}.$$

Вообще, если $\Omega = \{\omega\}$ и $|\Omega| = N < \infty$ (в нашем случае $N = 2^n$), то каждому $\omega_k \in \Omega$, $1 \le k \le N$, можно приписать “вес” $\mathbf{p}(\omega_k)$ $(0 \le \mathbf{p}(\omega_k) \le 1)$ так, что

$$\mathbf{p}(\omega_1) + \cdots + \mathbf{p}(\omega_N) = 1. \qquad (2)$$

Если A – подмножество Ω, то **ВЕРОЯТНОСТЬЮ** (события) A называется величина

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathbf{p}(\omega_i). \qquad (3)$$

Случай, когда $\mathbf{p}(\omega_1) = \cdots = \mathbf{p}(\omega_N) = 1/N$ и, значит,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \quad (N(\Omega) = N),$$

где $N(A)$ – число тех ω_i, которые составляют множества A, называется **классическим**.

Ясно, что в классическом случае подсчет $\mathbf{P}(A)$ сводится к подсчету числа исходов, приводящих к событию A. Собственно, именно этим занимались в давние времена, например Лука Пачоли (1445–1517(?)), Челио Кальканнини (1479–1541), Никола Тарталья (1500–1557), Джероламо Кардано (1501–1576), а также Блез Паскаль (1623–1662) и Пьер Ферма (1601–1665), переписка которых считается началом *исчисления вероятностей*. Эта переписка началась в связи с некоторыми игровыми вопросами, поставленными перед Паскалем кавалером де Мере.

Один из вопросов был таким: как справедливо разделить ставку в прерванной игре, когда один игрок имел, скажем, 4 выигрыша, а другой – 3. Казалось бы, что надо ставку делить в отношении $4:3$, а на самом деле, как нашли Паскаль и Ферма, в отношении $3:1$.

Другая задача была связана с вопросом о том, что более правдоподобно – иметь по крайней мере одну шестерку в 4 бросаниях правильной кости или иметь по крайней мере пару шестерок $(6,6)$ в 24 одновременных бросаниях двух правильных костей. (Вероятность в первом случае равна $1-(\frac{5}{6})^4 \approx 0.516$, а во втором $1-(\frac{35}{36})^{24} \approx 0.491$.)

Для классического способа задания вероятностей можно получить далеко не очевидные ответы.

Рассмотрим **ЗАДАЧУ о СОВПАДЕНИЯХ**.

Пусть в урне находится M шаров, занумерованных числами $1, 2, \ldots, M$. Производится выбор с возвращением объема n.

$\boxed{\text{ЧТО ЗДЕСЬ ЕСТЬ } \Omega = \{\omega\}?}$

Должно быть понятно, что

$$\Omega = \{\omega\colon\ \omega = (a_1, \ldots, a_n),\ a_i = 1, \ldots, M\}.$$

Число таких элементарных исходов равно $N(\Omega) = M^n$,
и мы считаем, что имеем дело с классическим способом, так что $\mathbf{p}(\omega) = 1/M^n$.

Поставим такой вопрос: какова вероятность события (множества)

$$A = \{\omega\colon\ a_i \neq a_j,\ i \neq j\},$$

т.е. события, заключающегося в **отсутствии повторений**?

Понятно, что число таких возможностей $(M)_n$ есть

$$N(A) = M(M-1)\cdots(M-n-1)$$

$$((M)_n = A_M^n \text{ – число размещений}).$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{(M)_n}{M^n} = \Big(1 - \frac{1}{M}\Big)\Big(1 - \frac{2}{M}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{n-1}{M}\Big).$$

Поставленная задача допускает следующую интересную интерпретацию.

Пусть в классе n учеников. Будем считать, что день рождения каждого ученика приходится на один из 365 дней ($= M$).

Будем также рассматривать выбор дня рождения как выбор шара из урны с $M = 365$ шарами.

ВОПРОС: какова вероятность $P_{365}(n)$ того, что в классе найдутся *по крайней мере* два ученика с совпадающими днями рождения?

Из того, что мы уже подсчитали, следует, что

$$P_{365}(n) = 1 - \frac{(365)_n}{365^n}.$$

При достаточно большом M (у нас $M = 365$)

$$\ln \frac{(M)_n}{M^n} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\Big(1 - \frac{k}{M}\Big) \sim -\frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n-1} k = -\frac{1}{M} \frac{n(n-1)}{M}$$

(мы использовали, что $\ln(1-x) \sim -x$ при малых x). Значит,

$$P_M(n) = 1 - \frac{(M)_n}{365^n} \sim 1 - \exp\Big\{-\frac{n(n-1)}{2M}\Big\}.$$

Следующая таблица дает $P_{365}(n)$:

n	4	16	22	23
$P_{365}(n)$	0.01636	0.28360	0.47569	0.50730

n	40	64	70	100
$P_{365}(n)$	0.89123	0.99711	0.99916	$1 - 3.07249 \cdot 10^{-7}$

Видим, что (вопреки ожидаемому!) размер класса, где с вероятностью 1/2 найдутся по крайней мере **ДВА** ученика с совпадающими днями рождения, не столь уж велик – он равен всего лишь 23.

1.4. Если $A \cap B = \varnothing$ (т.е. A и B не пересекаются), то

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B). \tag{4}$$

(Если $A \cap B = \varnothing$, то обычно пишут $\mathbf{P}(A+B)$ вместо $\mathbf{P}(A \cup B)$.)

Итак, отправляясь, от случая Ω с $|\Omega| = N < \infty$, возникшего при рассмотрении случайного блуждания ($N = 2^n$), приходим к тому, что мы определили триплет

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}),$$

где $\mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega\}$ и $\mathbf{P}$ – вероятность, определенная формулой (3):

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathbf{p}(\omega_i).$$

Совокупность множеств $\mathcal{A}$ образует $\underline{\underline{\text{алгебру}}}$:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$;

2) если $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$, то множества $A \cup B$, $A \cap B$ также принадлежат $\mathcal{A}$;

3) если $A \in \mathcal{A}$, то $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

Триплет $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ есть пример так называемого

ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОСТРАНСТВА.

Такие пространства лежат в основе всех вероятностных рассуждений в случае **конечных** пространств Ω.

1.5. Но этого, разумеется, не хватает для случаев не конечных пространств Ω. А. Н. Колмогоров определил общие

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

таким образом:

- $\mathcal{F}$ есть σ-алгебра, т.е. совокупность всех подмножеств Ω, являющаяся алгеброй и такая, что выполнено усиление свойства 2) из определения алгебры:

$$\text{если } A_n \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, \ldots, \text{ то } \bigcup A_n \in \mathcal{F} \text{ и } \bigcap A_n \in \mathcal{F};$$

- $\mathbf{P}$ есть σ-аддитивная (счетно-аддитивная) вероятностная мера: если $A_1, A_n, \ldots$ – попарно непересекающиеся множества, то

$$\mathbf{P}\Big(\sum A_i\Big) = \sum \mathbf{P}(A_i) \qquad (0 \le \mathbf{P}(\cdot) \le 1,\ \mathbf{P}(\Omega) = 1).$$

(Рассмотрение σ-алгебр $\mathcal{F}$, а не алгебр $\mathcal{A}$ нужно для того, чтобы “ухватывать” предельные образования, состоящие из счетного числа множеств.)

Коль скоро у нас имеется вероятностное пространство, можно определить понятие случайной величины $X = X(\omega)$ и ее распределения

$$P^X(B) = \mathbf{P}(\omega\colon\ X(\omega) \in B).$$

Заметим, что для корректного определения последней вероятности нужно, чтобы множество $\{\omega\colon\ X(\omega) \in B\}$ принадлежало $\mathcal{F}$.

Множества B – не произвольны. Если X – действительные величины, то в качестве множеств B берутся так называемые

борелевские множества

на прямой. Они получаются так.

Рассмотрим прямую $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ и определим интервалы

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}\colon\ a < x \le b\}.$$

Через $\mathcal{A}$ обозначается система множеств A в $\mathbb{R}$,состоящая из конечного числа непересекающихся интервалов вида $(a, b]$:

$$A \in \mathcal{A}, \quad \text{если} \quad A = \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i].$$

Но это **НЕ ЕСТЬ** σ-алгебра:

$$\text{если } A_n = \Big(0, 1 - \frac{1}{n}\Big] \in \mathcal{A}, \text{ то } \bigcup A_n = (0, 1) \notin \mathcal{A}.$$

Однако оказывается, что существует наименьшая σ-алгебра $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, содержащая алгебру $\mathcal{A}$. Вот она-то и называется

борелевской σ-алгеброй на $\mathbb{R}$.

Доказательство существования этих σ-алгебр таково. Класс $\mathcal{F}^*$ *всех* подмножеств $\mathbb{R}$ есть σ-алгебра, так что по крайней мере одна σ-алгебра, содержащая $\mathcal{A}$, существует. Теперь образуем $\sigma(\mathcal{A})$ – систему множеств, принадлежащих любой σ-алгебре, содержащей $\mathcal{A}$. Эта система множеств есть тоже σ-алгебра и притом наименьшая из содержащих $\mathcal{A}$.

Точное определение **СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ** таково.

Функция $X(\omega)$: $\Omega \to \mathbb{R}$ называется

СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ,

если для каждого борелевского $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\{\omega\colon\ X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Рассмотрение таких величин гарантирует, что определена вероятность

$$P^X(B) = \mathbf{P}\{\omega\colon\ X(\omega) \in B\};$$

в частности, если $B = (-\infty, x]$, то функция

$$F^X(x) = P^X((-\infty, x]) = \mathbf{P}\{\omega\colon\ X(\omega) \le x\}$$

называется <u>функцией распределения</u> случайной величины $X(\omega)$.

1.6. Для простоты мы сейчас предположим, что пространство $\Omega = \{\omega\}$ **конечно**: $|\Omega| = N < \infty$. Если $X = X(\omega)$ – случайная величина, то представление о ее среднем значении дает **математическое ожидание**

$$\mathsf{E}X = \sum_{k=1}^{N} X(\omega_k)\mathbf{p}(\omega_k).$$

А уклонение случайной величины $X(\omega)$ от среднего значения определяется **дисперсией**

$$\mathsf{D}X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2, \quad \text{т.е.} \quad \mathsf{D}X = \sum_{k=1}^{N} \mathsf{E}(X(\omega_k) - \mathsf{E}X)^2.$$

Ясно, что $\mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2 = \mathsf{E}X^2 - 2\mathsf{E}X \cdot \mathsf{E}X + (\mathsf{E}X)^2 = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$. Тем самым, дисперсию $\mathsf{D}X$ можно определить и так:

$$\mathsf{D}X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2.$$

2.1. Вернемся к случайному блужданию

$$S_k = X_1 + \cdots + X_k, \qquad 1 \le k \le n.$$

Мы будем опускать аргумент “случайности” ω в величинах X_i, S_k, т.е. писать X_i вместо $X_i(\omega)$ и S_k вместо $S_k(\omega)$).

Зададимся сейчас вопросом о том, как найти

$$P_n(k) = \mathbf{P}(S_n = k),$$

т.е. вероятность того, что в момент времени n траектория придет в точку k.

Для начала будем считать, что

$$\mathbf{p}(\omega) = \frac{1}{2^n}, \qquad \omega = (x_1, \dots, x_n),$$

т.е. если $\omega = (x_1, \dots, x_n)$ и $p(x_1) = \dots = p(x_n) = 1/2$, то $\mathbf{p}(\omega)$ есть просто произведение $p(x_1) \cdots p(x_n)$. (Это – классический случай.)

Для величин $X_i(\omega) = x_i$ мы естественно получаем

$$\mathbf{P}(X_i(\omega) = -1) = \mathbf{P}(X_i(\omega) = +1) = \frac{1}{2}.$$

Нетрудно видеть, что при таком способе задания вероятностей (весов) $\mathbf{p}(\omega) = p(x_1)\cdots p(x_n)$

$$\mathbf{P}(X_i(\omega) = x_i,\ X_j(\omega) = x_j) = \mathbf{P}(X_i(\omega) = x_i)\mathbf{P}(X_j(\omega) = x_j).$$

Это означает по определению, что величины $X_i(\omega)$ и $X_j(\omega)$

независимы.

То же верно и для любого числа таких величин. Таким образом, когда веса задаются так, что $\mathbf{p}(\omega) = p(x_1)\cdots p(x_n)$ $(= 1/2^n)$, мы можем сказать, что

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

есть сумма n независимых случайных величин.

2.2. Рассмотрим подробнее вероятность $P_n(k) = \mathbf{P}(S_n = k)$ (подобными вероятностями в случае броуновского движения интересовался А. Эйнштейн.)

Сейчас будем считать n любым. Тогда, помня, что из значения k мы можем перейти в соседние значения $k+1$ и $k-1$, получаем, что $P_{n+1}(k) = \mathbf{P}(S_{n+1} = k)$ обладает свойством

$$P_{n+1}(k) = \frac{1}{2}P_n(k+1) + \frac{1}{2}P_n(k-1),$$

или

$$P_{n+1}(k) - P_n(k) = \frac{1}{2}[P_n(k+1) - 2P_n(k) + P_n(k-1)].$$

Если же единичное время заменить на Δt, а единичные скачки – на Δx, то по аналогии с предыдущим свойством получим

$$P_{(n+1)\Delta t}(k\Delta x) - P_{n\Delta t}(k\Delta x) = \frac{1}{2}[P_{n\Delta t}((k+1)\Delta x) - 2P_{n\Delta t}(k\Delta x) + P_{n\Delta t}((k-1)\Delta x)].$$

что, конечно, есть **дискретный аналог** уже упомянутого уравнения (теплопроводности)

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi_t(x)}{\partial x^2},$$

выведенного А. Эйнштейном.

Положим сейчас (вместо $S_n = X_1 + \cdots + X_n$)

$$S_t = \Delta x(X_1 + \cdots + X_{[t/\Delta t]}),$$

где по-прежнему $\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\mathsf{E}S_t = \Delta x(\mathsf{E}X_1 + \cdots + \mathsf{E}X_{[t/\Delta t]}) = 0, \tag{5}$$

$$\mathsf{D}S_t = (\Delta x)^2(\mathsf{E}X_1^2 + \cdots + \mathsf{E}X_{[t/\Delta t]}^2) = (\Delta x)^2\Big[\frac{t}{\Delta t}\Big]. \tag{6}$$

Напомним, что $X_1, \ldots, X_{[t/\Delta t]}$ <u>независимы</u> и поэтому

$$\begin{aligned}\mathsf{D}S_t &= (\Delta x)^2\Big[\mathsf{E}(X_1 + \cdots + \mathsf{E}X_{[t/\Delta t]})^2 - (\mathsf{E}(X_1 + \cdots + \mathsf{E}X_{[t/\Delta t]}))^2\Big] \\ &= (\Delta x)^2\Big[\mathsf{E}X_1^2 + \cdots + \mathsf{E}X_{[t/\Delta t]}^2\Big] = (\Delta x)^2\Big[\frac{t}{\Delta t}\Big].\end{aligned}$$

Из (6) мы видим, как должны быть согласованы Δt и Δx, когда они стремятся к нулю, чтобы в пределе при $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ получилось конечное значение $\mathsf{D}S_t$. Именно, ясно, что Δx должно иметь порядок $\sqrt{\Delta t}$.

Положим $\Delta t = 1/N$ и $\Delta x = \sqrt{\Delta t} = 1/\sqrt{N}$ (потом мы будем полагать $N \to \infty$). Таким образом,

$$S_t = \frac{1}{\sqrt{N}}(X_1 + \cdots + X_{[Nt]}).$$

Так как здесь надо учесть зависимость от N, то будем эту величину S_t обозначать $B_t^{(N)}$ (по причине, которая станет ясной чуть позже.)

Итак, $B_t^{(N)} = \dfrac{1}{\sqrt{N}}(X_1 + \cdots + X_{[Nt]}) = \sqrt{t}\,\dfrac{X_1 + \cdots + X_{[Nt]}}{\sqrt{Nt}}$.

Оказывается, что в пределе (при $N \to \infty$) этот процесс $(B_t^{(N)}, t \geq 0)$ перейдет в процесс $(B_t, t \geq 0)$, который есть не что иное, как

БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ.

§ 3.

Наши величины X_i принимали два значения $+1$ и -1. Сейчас нам удобнее считать, что X_i принимают снова два значения, но на этот раз 1 и 0, с вероятностями

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbf{P}(X_i = 0) = q, \quad \text{где} \quad p + q = 1.$$

Так получаемые величины $X_1, \dots, X_n$ и $S_k = X_1 + \dots + X_k$ образуют так называемую схему Бернулли с вероятностями "успеха" p и "неуспеха" q. В этом случае

$$\Omega = \{\omega\colon\ \omega = (x_1, \dots, x_n),\ x_i = 0, 1\}, \quad \mathbf{p}(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} q^{n - \sum_{i=1}^n x_i},$$

где $\sum_{i=1}^n x_i$ – число "успехов" за n шагов.

Имеем

$$P_n^k = \mathbf{P}(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad (= C_n^{n-k});$$

C_n^k – это число способов, которыми k неразличимых единичек ("дробинок") можно разместить по n местам ("ячейкам"). (В каждую ячейку размещается не более одной дробинки.)

Если дробинки “различимы”, то такое число размещений есть число размещений из n по k, обозначаемое A_n^k или $(n)_k$, при этом

$$(n)_k = n(n-1)\cdots(n-(k-1)).$$

Но мы интересуемся неразличимыми дробинками (единичками), и каждому такому размещению **неразличимых** дробинок отвечает в точности $k!$ положений **различимых** дробинок.

Значит, число размещений k неразличимых дробинок по n местам равно

$$\frac{(n)_k}{k!}, \text{ что, в свою очередь, равно } \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Это число мы и обозначим через C_n^k.

§ 4.

4.1. Заметим, что в предшествующих рассуждениях мы фиксировали n, а значит, в сущности мы рассматривали модель

$$(\Omega^n, \mathcal{A}^n, \mathbf{P}^n), \tag{7}$$

где $\mathbf{P}^n(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Весьма замечательно, что если ввести новое пространство **бесконечных** последовательностей

$$\Omega = \{\omega\}, \quad \text{где} \quad \omega = (x_1, x_2, \ldots),$$

то существует мера $\mathbf{P}$, определенная на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств в Ω, такая, что ее ограничение $\mathbf{P}|\mathcal{A}_n = \mathbf{P}^n$ (под $\mathcal{A}_n$ понимается алгебра в Ω, когда ограничения накладываются только на первые координаты $x_1, \ldots, x_n$).

Из приведенных рассуждений уже видно, что модели типа (1) могут быть вложены в *единую* модель $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ и, более того, в модель $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где $\mathcal{F}$ – уже σ-алгебра.

Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, как уже говорилось, называется

вероятностным пространством.

Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ называется

РАСШИРЕННЫМ вероятностным пространством.

Но для построения плодотворной математической теории эта модель $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ оказывается слишком широкой, особенно для приложений. Поэтому за основу берут модели $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с σ-алгеброй $\mathcal{F}$.

4.2. У случайных блужданий много интересных свойств, и, в сущности, истинная теория вероятностей началась именно с изучения этих блужданий.

Впервые такие случайные блуждания появились в трактате Якоба Бернулли "Ars Conjectandi" ("Искусство предположений"; 1713 г.), где была доказана первая предельная теорема теории вероятностей, которая утверждает, что

$$\frac{S_n}{n} \to p, \quad n \to \infty, \quad \text{по вероятности},$$

т.е.

$$\mathbf{P}\left(\omega \in \Omega\colon \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \to 0, \quad n \to \infty, \quad \text{для всякого } \varepsilon > 0.$$

Если пользоваться нашими начальными определениями, то это можно было бы записать в эквивалентном виде:

$$\mathbf{P}^n\left(\omega \in \Omega^n\colon \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \to 1, \quad n \to \infty, \quad \text{для всякого } \varepsilon > 0.$$

Понятно, что

$$\mathbf{P}^n\Big(\omega \in \Omega^n\colon \ \Big|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\Big| \le \varepsilon\Big) = \mathbf{P}^n(|S_n - np| \le \varepsilon n)$$

$$= \mathbf{P}^n(np - n\varepsilon \le S_n \le np + \varepsilon n) = \sum_{np-n\varepsilon \le k \le np+\varepsilon n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{np-n\varepsilon \le k \le np+\varepsilon n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}. \qquad (8)$$

Мы видим, что при $0 < p < 1$, $n \to \infty$, $n - k \to \infty$ дело сводится к тому, чтобы доказать, что правая часть (8) стремится к 1. Здесь трудности возникают с факториалами. Однако поскольку $n, k, n-k \to \infty$, то для их факториалов $n!\,, k!\,, (n-k)!$ можно воспользоваться формулой Стирлинга:

$N! \sim \sqrt{2\pi N}\Big(\dfrac{N}{e}\Big)^N$ (символ $\sim$ означает, что отношение левой и правой частей стремится к 1).

Между прочим, доказывать формулу Стирлинга можно так. Обозначим $r_0 = 1$ и

$$r_N = \frac{N!}{N^{N+1/2}e^{-N}}.$$

Тогда $\ln \dfrac{r_N}{r_{N-1}} \sim \dfrac{1}{2N^2}$ и $\sum \dfrac{1}{N^2} < \infty$. Следовательно, существует

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{r_n}{r_{n-1}} = \lim_N \ln r_N = \ln(\lim_N r_N) = \ln r_\infty,$$

т.е.

$$N! \sim N^{N+1/2}e^{-N} \cdot c,$$

где $c = r_\infty$ – некоторая константа. Нужно лишь показать, что $c = \sqrt{2\pi}$. (Сейчас мы этого делать не будем.)

Имея формулу Стирлинга, легко установить, что

$$\mathbf{P}^n\left(\omega \in \Omega^n\colon \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Это, в сущности, был путь Я. Бернулли.

Позже оказалось, что можно дать другое доказательство закона больших чисел – одновременно и более простое, и работающее для более общих случайных величин, принимающих не только два значения (как в схеме Бернулли). Основано это доказательство на

неравенстве Чебышёва,

которое утверждает следующее.

НЕРАВЕНСТВЕ ЧЕБЫШЁВА. Пусть $X = X(\omega)$ – неотрицательная случайная величина. Тогда для $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(X(\omega) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{E}X}{\varepsilon}. \tag{9}$$

(Для простоты можно считать, что случайная величина $X = X(\omega)$ принимает конечное число значений.)

Доказательство этого неравенства поразительно просто:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X(\omega)I_{\{X(\omega)\geq\varepsilon\}}(\omega) + X(\omega)I_{\{X(\omega)<\varepsilon\}}(\omega) \\ &\geq \varepsilon I_{\{X(\omega)\geq\varepsilon\}}(\omega), \end{aligned} \tag{10}$$

где $I_A(\omega)$ – индикатор множества A: $\quad I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$

Из (10) получаем $\mathsf{E}X(\omega) \geq \varepsilon \mathsf{E}I_{\{X(\omega)\geq\varepsilon\}}(\omega) = \varepsilon\mathbf{P}(X(\omega) \geq \varepsilon)$, что и дает неравенство Чебышёва.

Покажем, как из этого неравенства вывести

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

для схемы Бернулли, т.е. что для $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \to 1.$$

Положим $\widetilde{S}_n = S_n - np$, где $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbf{P}(X_i = 0) = q \qquad (p + q = 1)$$

и величины X_i независимы.

Легко подсчитать, что если $\widetilde{X_i} = X_i - p$, то для $\widetilde{S}_n = \widetilde{X_1} + \dots + \widetilde{X_n}$ имеем $\mathsf{E}\widetilde{S}_n = 0$, $\mathsf{E}\widetilde{S}_n^2 = npq$. Тогда

$$\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| \geq \varepsilon\Big) = \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{\widetilde{S}_n}{n}\Big| \geq \varepsilon\Big) = \mathbf{P}(|\widetilde{S}_n| \geq n\varepsilon) = \mathbf{P}(\widetilde{S}_n^2 \geq (n\varepsilon)^2)$$
$$= \frac{\mathsf{E}\widetilde{S}_n^2}{(n\varepsilon)^2} = \frac{\sum_{1\leq i,j\leq n} \mathsf{E}\widetilde{X_i}\widetilde{X_j}}{(n\varepsilon)^2} = \frac{npq}{(n\varepsilon)^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2} \to 0, \quad n \to \infty,$$

где мы воспользовались тем, что $\mathsf{E}\widetilde{X_i}\widetilde{X_j} = 0$ для $i \neq j$ и

$$\mathsf{E}\widetilde{X_i}^2 = \mathsf{E}(X_i - p)(X_i - p) = \mathsf{E}X_i^2 - 2p\mathsf{E}X_i + p^2$$
$$= p - 2p^2 + p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Итак мы познакомились с

первой предельной теоремой теории вероятностей
– **законом больших чисел**.

Этот закон, несмотря на его простоту, широко используется в статистике и, совсем неожиданно, дает возможность, например, просто доказать известную теорему Вейерштрасса (1840 г.) – это сделал С. Н. Бернштейн в 1912 г.

ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА утверждает следующее: любая функция $F \in C[0,1]$ может быть на $[0,1]$ сколь угодно хорошо приближена полиномами G:

$$\|F - G\| = \sup_{0 \le x \le 1} |F(x) - G(x)|.$$

Доказательство С. Н. Бернштейна удивительно просто.

Действительно, рассмотрим схему Бернулли с вероятностью успеха $p = x$, где $0 < x < 1$. Введем полиномы

$$G(x) = \mathsf{E}\Big[F\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} F\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

Тогда

$$\begin{aligned} G(x) - F(x) &= \mathsf{E}\Big[F\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - F(x)\Big] \\ &= \mathsf{E}\Big[\Big(F\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - F(x)\Big) I\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - x\Big| \le \varepsilon\Big)\Big] \\ &\qquad + \mathsf{E}\Big[\Big(F\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - F(x)\Big) I\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - x\Big| > \varepsilon\Big)\Big] \\ &=: [1] + [2]. \end{aligned}$$

Пусть $\omega(\varepsilon) = \max(|F(b) - F(a)\colon\ |b-a| \leq \varepsilon)$ – модуль непрерывности функции F.

Тогда модуль $|[1]|$ не превосходит $\omega(\varepsilon)$.

Для $|[2]|$ имеем:

$$|[2]| \leq 2\|F\| \cdot \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - x\Big| > \varepsilon\Big) \leq 2\|F\| \frac{x(1-x)}{\varepsilon^2 n}.$$

Отсюда ясно, что выбором малого $\varepsilon > 0$ и большого n величина $\|F - G\|$ может быть сделана сколь угодно малой.

4.3. Следующей после закона больших чисел были:
теорема Муавра (1718) – для схемы Бернулли при $p = \frac{1}{2}$,
теорема Лапласа (1812) в случае произвольного $0 < p < 1$.

Сейчас эта теорема носит название

“ТЕОРЕМА МУАВРА–ЛАПЛАСА”

– это простейший случай так называемой

центральной предельной теоремы.

Чтобы понять истоки теоремы Муавра–Лапласа, напомним, что

$$\mathsf{E}\frac{S_n}{n} = p \quad \text{и} \quad \mathsf{E}\left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2 = \frac{pq}{n}. \tag{11}$$

Второе свойство в (11) подсказывает, что (в среднем)

$$\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \sim \sqrt{\frac{pq}{n}}, \quad \text{или} \quad |S_n - pn| \sim \sqrt{npq}. \tag{12}$$

Чтобы понять, в каком смысле эти выражения близки, естественно рассмотреть величину

$$\frac{S_n - pn}{\sqrt{npq}}.$$

Это случайная величина, и можно рассмотреть вероятность события

$$\left\{a \le \frac{S_n - pn}{\sqrt{npq}} < b\right\} = \left\{np + a\sqrt{npq} \le S_n < np + b\sqrt{npq}\right\}$$
$$= \left\{a\sqrt{\frac{pq}{n}} \le \frac{S_n}{n} - p < b\sqrt{\frac{pq}{n}}\right\}$$

(ср. с (12)).

ТЕОРЕМА МУАВРА–ЛАПЛАСА утверждает, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(a \le \frac{S_n - pn}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx. \qquad (13)$$

Как это доказать? Мы имеем

$$\mathbf{P}\left(a \le \frac{S_n - pn}{\sqrt{npq}} < b\right) = \sum_{np+a\sqrt{npq} \le k < np+b\sqrt{npq}} C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (14)$$

При больших n величины k и $n-k$ сравнимы с n. Тем самым, мы можем преобразовать $C_n^k = n!\,/(k!\,(n-k)!\,)$, воспользовавшись формулой Стирлинга для $n!$, $k!$, $(n-k)!$. Тогда правая часть (8) примет вид

$$\frac{n^{n+1/2} p^k q^{n-k}}{k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \qquad (15)$$

Положим $k = np + x\sqrt{npq}$, где $a \le x \le b$. Поскольку k принимает целочисленные значения, то $\Delta k = 1$. Отсюда следует, что

$$1 = \Delta k = \Delta x\sqrt{npq}, \quad \text{т.е.} \quad \Delta x = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
(15) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{n^{n+1}p^{k+1/2}q^{n-k+1/2}}{k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}}\,\frac{1}{\sqrt{npq}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\Big(\frac{k}{np}\Big)^{k+1/2}\Big(\frac{n-k}{nq}\Big)^{n-k+1/2}\Big]^{-1}\frac{1}{\sqrt{npq}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\,\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\Big)^{np+x\sqrt{npq}+1/2}\Big(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\,\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\Big)^{nq-x\sqrt{npq}+1/2}\Big]^{-1}\Delta x.
\end{aligned}$$

Дальше надо поступить так. Поскольку $x/\sqrt{n}$ мало, то множителями $1/2$ в показателях можно пренебречь. Теперь возьмем $\ln[\ldots]$ (с учетом отбрасывания членов с $1/2$). Тогда

$$
\begin{aligned}
&(np + x\sqrt{npq}) \ln\Big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\Big) + (nq - x\sqrt{npq}) \ln\Big(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\Big) \\
&\quad \sim (np + x\sqrt{npq})\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} - \frac{x^2}{2n}\frac{q}{p}\Big) \\
&\qquad + (nq - x\sqrt{npq})\Big(-\frac{x}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} - \frac{x^2}{2n}\frac{p}{q}\Big) \\
&\quad = \Big(x\sqrt{npq} - \frac{x^2}{2}q + x^2 q\Big) + \Big(-x\sqrt{npq} - \frac{x^2}{2}p + x^2 p\Big) = \frac{x^2}{2}
\end{aligned}
$$

– мы воспользовались тем, что если y мало, то $\ln(1 + y) \sim y - y^2/2$ и $\ln(1 - y) \sim -y - y^2/2$.

Тем самым,

$$\mathbf{P}\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \sim \sum_{a \le x < b} \frac{\exp\{-x^2/2\}}{\sqrt{2\pi}}\,\Delta x \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx.$$

Итак, теорема Муавра–Лапласа

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$$

доказана.

Отметим, что при $p = 1/2$ вероятность $\mathbf{P}\Big(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = 0\Big)$ легко оценить непосредственно:

$$\mathbf{P}\Big(\frac{S_n - n/2}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 0\Big) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ C_n^{n/2} \cdot 2^{-n} \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{n}}, & \text{если } n \text{ четно,} \end{cases}$$

что говорит о том, с какой ошибкой (в случае $p = 1/2$) можно по значениям S_n оценить (среднее значение) $n/2$.

4.4. Возникающие в теореме Муавра–Лапласа (и в центральной предельной теореме) функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy, \qquad -\infty < x < \infty,$$

играет и в теории вероятностей, и вообще в естествознании исключительную роль. Эта функция называется

нормальной или **гауссовской** функцией распределения.

Функция

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}, \qquad -\infty < y < \infty,$$

называется **плотностью** нормального, или гауссовского, распределения.

§ 5.

5.1. Итак, мы ознакомились с первыми математическими результатами в теории вероятностей:

закон больших чисел и теоремы Муавра–Лапласа.

Имеющаяся у нас аксиоматика теории вероятностей

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$$

где $\mathcal{F}$ – сигма-алгебра, замкнутая относительно счетных сумм и пересечений, позволяет изучать и более интересные вероятности, как, например, уже рассмотренные

$$\lim_n \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| \le \varepsilon\Big) \quad \text{или} \quad \lim_n \mathbf{P}\Big(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le x\Big)$$

Заметим, что здесь предел $\lim_n$ стоит ПЕРЕД вероятностью.

Можно, однако, пойти дальше и рассмотреть вопросы типа

$$\mathbf{P}\Big(\lim_n \frac{S_n}{n} = p\Big) = \,? \tag{16}$$

Вопрос (16) – это, в сущности, есть то, что называется

УСИЛЕННЫМ законом больших чисел.

Дадим некоторые пояснения. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство и $A_1, A_2, \ldots$ – некоторые события, т.е. множества из $\mathcal{F}$. Образуем множество $B := \limsup_n A_n$, или

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \leq n} A_k. \tag{17}$$

Это множество часто записывают в виде $B = \{A_n \text{ б.ч.}\}$, т.е. B – это множество тех ω, которые встречаются в множествах A_n, $n \geq 1$, бесконечно часто (или в бесконечном числе).

ЗАМЕЧАНИЕ. В связи с обозначениями

$$B = \limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

напомним следующее хорошо известное обозначение:

$$\text{если } x_n \in \overline{\mathbb{R}},\ n \geq 1, \text{ то} \quad \limsup x_n := \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} x_k.$$

Следующая первая лемма Бореля–Кантелли весьма полезна при рассмотрении событий типа

$$\left\{ \lim_n \frac{S_n}{n} = p \right\},$$

входящих в (16).

ПЕРВАЯ ЛЕММА БОРЕЛЯ–КАНТЕЛЛИ.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, то $\mathbf{P}(B) = 0$.

Доказательство весьма просто:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k\Big) \leq \mathbf{P}\Big(\bigcup_{k\leq n} A_k\Big) \leq \sum_{k\leq n} \mathbf{P}(A_k) \downarrow 0, \qquad n \to \infty.$$

ВТОРАЯ ЛЕММА БОРЕЛЯ–КАНТЕЛЛИ.

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)=\infty$ и события A_n, $n\geq 1$, независимы, то $\mathbf{P}(B)=1$.

Доказательство тоже просто. Имеем

$$1-\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(\overline{B})=\mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\geq n}\bar{A}_k\Big), \quad \text{где} \quad \bar{A}_k=\Omega\setminus A_k.$$

Но в силу независимости

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k\geq n}\bar{A}_k\Big)=\prod_{k\geq n}\mathbf{P}(\bar{A}_k)=\prod_{k\geq n}(1-\mathbf{P}(A_k))\leq \exp\Big\{-\sum_{k\geq n}\mathbf{P}(A_k)\Big\}=0$$

(поскольку $1-x<e^{-x}$).

Значит, и $\mathbf{P}(\overline{B})=0$, что равносильно равенству $\mathbf{P}(B)=1$.

5.2. Вернемся к нашему блужданию $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, где

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbf{P}(X_i = 0) = q \qquad (= 1 - p)$$

и все величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы. Мы уже знаем, что

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\widetilde{S}_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \quad \text{где} \quad \widetilde{S}_n = S_n - np.$$

Возьмем здесь $\varepsilon = n^{-1/2}$ и заменим n на n^2. Тогда

$$\mathbf{P}(|\widetilde{S}_{n^2}| \geq n^{5/3}) \leq pqn^{-4/3}.$$

Положим $\widetilde{A}_n = \{|\widetilde{S}_{n^2}| \geq n^{5/3}\}$. Из приведенной оценки следует, что $\sum \mathbf{P}(\widetilde{A}_n) < \infty$, и тогда по первой лемме Бореля-Кантелли имеем $\mathbf{P}(\widetilde{A}_n \text{ б.ч.}) = 0$. По смыслу множества $\{\widetilde{A}_n \text{ б.ч.}\}$ это означает, что

$$\mathbf{P}(|\widetilde{S}_{n^2}| \leq n^{5/3} \text{ для всех достаточно больших } n) = 1. \qquad (18)$$

Возьмем теперь k такое, что $n^2 \le k < (n+1)^2$. Тогда

$$|\widetilde{S}_k| \le |\widetilde{S}_{n^2}| + (n+1)^2 - n^2,$$

поскольку $|\widetilde{X}_i| \le 1$, и, значит,

$$|\widetilde{S}_k| \le n^{5/3} + 2n + 1 < 2k^{5/6}.$$

Отсюда и из (18)

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\widetilde{S}_k}{k}\right| \le 2k^{-1/6} \text{ для всех достаточно больших } k\right) = 1.$$

Это означает, что для почти всех ω

$$\lim_k \left|\frac{\widetilde{S}_k(\omega)}{k}\right| = 0, \qquad (19)$$

что и есть усиленный закон больших чисел.

В исходных терминах формула (19) означает, что

$$\lim_k \frac{S_k(\omega)}{k} = p \quad \text{для почти всех } \omega.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Возникшее здесь понятие “для почти всех ω” объясняется следующим. Например,

$$\frac{S_k(\omega)}{k} = 0 \quad \text{для } \omega = (0, 0, \ldots) \text{ при всех } k$$

Но вероятность такого исхода равна нулю и, значит, на таком исходе $\lim_k S_k(\omega)/k = 0$.

§ 6.

6.1. Продолжим рассмотрение свойств независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, принимающих два значения 1 и -1 с вероятностями

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = 1/2 \tag{20}$$

(тем самым, $\mathsf{E}X_i = 0$, $\mathsf{D}X_i = \mathsf{E}X_i^2 = 1$). Мы уже знаем, что для случайных блужданий $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$, построенных по этим случайным величинам, имеет место

закон больших чисел : $\quad \lim_n \mathbf{P}\Big(\dfrac{S_n}{n} = 0\Big) = 1$

и

усиленный закон больших чисел : $\quad \mathbf{P}\Big(\lim_n \dfrac{S_n}{n} = 0\Big) = 1.$

6.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится.

Что можно сказать о сходимости или расходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}?$$

Иначе говоря, что можно сказать о сходимости или расходимости ряда с общим членом $\pm 1/n$, где $+$ и $-$"разбросаны" в случайном порядке в соответствии с рассматриваемой последовательностью $X_1, X_2, \ldots$?

Обозначим

$$A = \left\{\omega\colon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} \text{ сходится}\right\}$$

и рассмотрим вероятность $\mathbf{P}(A)$.

Весьма замечательно, что эта вероятность $\mathbf{P}(A)$ может принимать лишь два значения: 0 и 1. Это утверждение является частным случаем следующего общего утверждения.

ЗАКОН 0 ИЛИ 1 КОЛМОГОРОВА.
Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин и пусть $A \in \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ – хвостовая σ-алгебра:

$$\mathfrak{X} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k^{\infty}, \qquad \mathcal{F}_k^{\infty} = \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

Тогда $\mathbf{P}(A)$ может принимать лишь два значения: 0 и 1.

Начнем с **ПРИМЕРОВ** **хвостовых событий**.

- $A := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n} < \infty \right\} = \left\{ \sum_{n=k}^{\infty} \frac{X_n}{n} < \infty \right\} \in \mathcal{F}_k^\infty \ \forall \ k \geq 1.$

Поэтому $A \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k^\infty$, т.е. A – хвостовое событие.

- Хвостовыми являются и события

$$\{X_n \in A_n \text{ б.ч.}\} \quad (= \limsup_n \{X_n \in A_n\}),$$

$$\{\limsup_n X_n\}, \qquad \left\{\frac{S_n}{n} \text{ сходится}\right\}.$$

- С другой стороны, события

$\{X_n = 0 \ \forall n \geq 1\}$, $\quad \left\{\lim_n (X_1 + \cdots + X_n) \text{ существует и меньше } C\right\}$.

не являются хвостовыми.

Доказательство закона 0 или 1. Идея состоит в том, чтобы доказать, что любое хвостовое событие не зависит от самого себя и, значит,

$$\mathbf{P}(A \cap A) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(A),$$

т.е. $\mathbf{P}(A) = [\mathbf{P}(A)]^2$, откуда $\mathbf{P}(A) = 0$ или 1.

Итак, пусть $A \in \mathfrak{X}$, тогда $A \in \mathcal{F}_1^\infty = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_1^n)$, где $\mathcal{F}_1^n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Но тогда можно найти такие множества $A_n \in \mathcal{F}_1^n$, что

$$\mathbf{P}(A \triangle A_n) \to 0,$$

где симметрическая разность $A \triangle A_n$ по определению задается формулой

$$A \triangle A_n = (A \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A), \qquad \mathbf{P}(A_n \cap A) \to \mathbf{P}(A). \tag{21}$$

Но если $A \in \mathfrak{X}$, то для каждого $n \geq 1$ события A и A_n независимы:

$$\mathbf{P}(A \cap A) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(A),$$

поэтому из (21) следует, что $\mathbf{P}(A) = [\mathbf{P}(A)]^2$, и, значит, $\mathbf{P}(A) =$ 0 или 1.

6.2. Надо дать критерий, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$, состоящий из независимых случайных величин с $\mathsf{E}X_n = 0$, $n \geq 1$, сходится, скажем, с вероятностью единица.

Здесь хорошо известен результат Колмогорова и Хинчина: если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}X_n^2 < \infty, \tag{22}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ сходится с вероятностью единица.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} X_n/n$, где (X_n) – бернуллиевская величина как в (20), сходится в вероятностью единица, поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}X_n^2/n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2) < \infty$.

В общем случае, когда не предполагается, что $\mathsf{E}X_n = 0$, $n \geq 1$, другой результат Колмогорова и Хинчина утверждает, что для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ из сходимости двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}X_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{D}X_n$ вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$.

6.3. Из усиленного закона больших чисел мы знаем, случайное блуждание $S_n = X_1 + \cdots X_n$, $n \geq 1$, где X_i, $i \geq 1$, – независимые бернуллиевские величины такие, что

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}, \qquad i \geq 1,$$

обладает свойством: для почти всех его траекторий

$$S_n(\omega) = o(n), \quad \text{т.е.} \quad \frac{S_n(\omega)}{n} \to 0, \qquad n \to \infty, \quad \text{п.н.} \tag{23}$$

Этот результат был установлен Э. Борелем в 1909 г.

Несколько позже (в 1914 г.) Ф. Хаусдорф показал, что, опять же с вероятностью единица,

$$\frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}\, n^{\varepsilon}} \to 0, \qquad n \to \infty, \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \tag{24}$$

Оказывается, что если $\varepsilon = 0$, то

$$\frac{|S_n(\omega)|}{\sqrt{n}} \to \infty \quad \text{п.н.}, \qquad n \to \infty, \tag{25}$$

Глядя на (23)–(25), естественно поставить вопрос:

каково поведение $S_n(\omega)$ при $n \to \infty$?

На этом пути Г. Харди и Дж. Литтлвуд (в том же 1914 г.) установили, что

$$S_n = O(\sqrt{n \ln n}), \quad n \to \infty, \quad \text{п.н.} \tag{26}$$

т.е.

$$|S_n| \leq C\sqrt{n \ln n}, \quad n \to \infty \quad (C > 0 \text{ – некоторая константа}). \tag{27}$$

В 1922 г. Г. Штейнгауз уточнил результат Харди–Литтлвуда, показав, что

$$\limsup_n \frac{S_n}{2\sqrt{2n \ln n}} \leq 1 \quad \text{п.н.} \tag{28}$$

В 1923 г. А. Я. Хинчин показал, что $S_n = O(\sqrt{n \ln\ln n})$ п.н., и на следующий год, в 1924 г. он получил то, что сейчас мы называем законом повторного логарифма:

$$\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln\ln n}} = 1 \quad \text{п.н.} \tag{29}$$

В том случае, когда величины X_i таковы, что $\mathsf{E}X_i = 0$, а $\mathsf{E}X_i^2 = \sigma^2$, вместо (29) будем иметь

$$\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \ln\ln n}} = 1 \quad \text{п.н.} \tag{30}$$

Аналогичным образом (при $\sigma^2 = 1$),

$$\liminf_n \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln\ln n}} = -1 \quad \text{п.н.} \tag{31}$$

Утверждения (29) и (31) можно записать единым образом:

$$\limsup_n \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \ln\ln n}} = 1 \quad \text{п.н.} \tag{32}$$

Поясним наглядно смысл этого свойства. Введем функции

$$\varphi^*(n) = (1+\varepsilon)\sqrt{2n \ln\ln n}, \quad \varphi_*(n) = (1-\varepsilon)\sqrt{2n \ln\ln n}, \quad (33)$$

где $\varepsilon > 0$, называемые верхней и нижней функциями. Тогда свойство (32) равносильно тому, что (п.н.) для элементарного исхода ω найдется такое $n_0(\omega)$, что для всех $n \geq n_0(\omega)$

$$|S_n| < (1+\varepsilon)\sqrt{2n \ln\ln n},$$

и в то же самое время для бесконечного числа значений n

$$|S_n| > (1-\varepsilon)\sqrt{2n \ln\ln n}.$$

Это следует вот откуда. Обозначим $\varphi(n)=\sqrt{2n\ln\ln n}$, тогда

$$\left\{\limsup_n \frac{S_n}{\varphi(n)}\le 1\right\}=\left\{\lim_n \sup_{k\ge n}\frac{S_k}{\varphi(k)}\le 1\right\}$$

$$\Longrightarrow\left\{\sup_{k\ge n_1(\varepsilon)}\frac{S_k}{\varphi(k)}\le 1+\varepsilon \text{ для всякого } \varepsilon>0 \text{ и некоторого } n_1(\varepsilon)\right\}$$

$$\Longrightarrow\left\{S_k\le(1+\varepsilon)\varphi(k)\ \begin{array}{l}\text{для всякого } \varepsilon>0 \text{ и}\\ \text{всех } k \text{ начиная с некоторого } n_1(\varepsilon)\end{array}\right\}$$

($n_1(\varepsilon)$ зависит также от ω, когда $S_k=S_k(\omega)$). Точно так же

$$\left\{\limsup_n \frac{S_n}{\varphi(n)}\ge 1\right\}=\left\{\lim_n \sup_{k\ge n}\frac{S_k}{\varphi(k)}\ge 1\right\}$$

$$\Longrightarrow\left\{\sup_{k\ge n_2(\varepsilon)}\frac{S_k}{\varphi(k)}\le 1-\varepsilon \text{ для всякого } \varepsilon>0 \text{ и некоторого } n_2(\varepsilon)\right\}$$

$$\Longrightarrow\left\{S_k\ge(1-\varepsilon)\varphi(k)\ \begin{array}{l}\text{для всякого } \varepsilon>0 \text{ и для бесконечно}\\ \text{многих } k \text{ начиная с некоторого}\\ n_3(\varepsilon)\ge n_2(\varepsilon)\end{array}\right\}.$$

Таким образом, для того, чтобы показать, что функции $\varphi^*(n)$ и $\varphi_*(n)$ являются соответственно верхней и нижней, надо доказать утверждение (29) (утверждения (30) и (31) будут следовать из (29)), т.е. доказать закон

повторного логарифма.

Мы не даем подробного доказательства этого закона, скажем лишь, что **СХЕМА ЕГО ТАКОВА**:

- сначала – с помощью **первой леммы Бореля–Кантелли** – доказывается равенство

$$\mathbf{P}(\limsup_n(\ldots) \leq 1) = 1,$$

- а затем – с помощью **второй леммы Бореля–Кантелли** – доказывается равенство

$$\mathbf{P}(\limsup_n(\ldots) \geq 1) = 1.$$

Представление о **ТЕХНИКЕ доказательства** дает доказательство утверждения Харди–Литтлвуда $S_n = O(\sqrt{n \ln n})$ (см. (26)). Более точно, покажем, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\frac{S_n}{\sqrt{(2+\varepsilon)\frac{n}{4}\ln n}} \le 1 \quad \text{п.н.}$$

при достаточно больших n. Здесь

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\Big(X_i = \frac{1}{2}\Big) = \mathbf{P}\Big(X_i = -\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}$$

(несущественно, принимают ли X_i значения $\pm 1/2$ или ± 1).

Доказательство использует

первую лемму Бореля–Кантелли :

если $A_1, A_2, \ldots$ – события с $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, то $\mathbf{P}\{A_n \text{ б.ч.}\} = 0$.

Поэтому, если взять, скажем, $A_n = \{S_n(\omega) > \sqrt{(2+\delta)\frac{n}{4}\ln n}\}$, где $\delta > 0$, то, поскольку $\mathbf{P}\{A_n \text{ б.ч.}\} = 0$, начиная с некоторого $n(\omega)$ будет выполнено неравенство

$$S_n(\omega) \leq \sqrt{(2+\delta_1)\frac{n}{4}\ln n} \quad \text{п.н.} \tag{34}$$

Выбор $A_n = \{S_n(\omega) > \sqrt{(2+\delta_1)\frac{n}{4}\ln n}\}$ определяется, разумеется, тем, что нам нужно добиться выполнения свойства $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, которое будет обеспечивать (по первой лемме Бореля–Кантелли) свойство $\mathbf{P}\{A_n \text{ б.ч.}\} = 0$.

(Напомним, что из закона повторного логарифма мы вместо (34) имеем оценку

$$S_n(\omega) \le (1+\varepsilon)\sqrt{2(n/4)\ln\ln n}, \qquad n > n_0(\omega), \quad \text{п.н.} \tag{35}$$

что, конечно, лучше, чем (34).)

Для доказательства (34) напомним неравенство Чебышёва: если $\xi \ge 0$, то

$$\mathbf{P}(\xi > x) \le \frac{\mathsf{E}\xi}{x}, \qquad x > 0. \tag{36}$$

Но $\mathbf{P}(\xi > x) = \mathbf{P}(e^{\alpha\xi} > e^{\alpha x})$, $\alpha > 0$, $x > 0$. Поэтому помимо (36) имеем **неравенство Чебышёва экспоненциального типа**:

$$\mathbf{P}(\xi > x) \le e^{-\alpha x}\mathsf{E}e^{\alpha\xi}. \tag{37}$$

В случае $\xi = S_n$ имеем $\mathsf{E}e^{\alpha S_n} = (\mathsf{E}e^{\alpha X_1})^n = (\frac{1}{2}e^{\alpha/2} + \frac{1}{2}e^{-\alpha/2})^n$. Поэтому

$$\mathbf{P}(S_n > x) \le e^{-\alpha x}\Big(\frac{1}{2}e^{\alpha/2} + \frac{1}{2}e^{-\alpha/2}\Big)^n. \tag{38}$$

Здесь $\alpha > 0$ произвольно и для получения "хорошей" оценки $\mathbf{P}(S_n > x)$ можно взять inf в правой части по всем $\alpha > 0$:

$$\mathbf{P}(S_n > x) \le \inf_{\alpha > 0} e^{-\alpha x}\Big(\frac{1}{2}e^{\alpha/2} + \frac{1}{2}e^{-\alpha/2}\Big)^n. \tag{39}$$

Нас будут интересовать случаи больших n, поэтому, если $x = \gamma\sqrt{n}$, то можно найти, что

$$\alpha \sim \frac{\gamma}{\sqrt{n}/4}.$$

Не занимаясь этим анализом, просто положим

$$x = \gamma\sqrt{n}, \qquad \alpha = \frac{\gamma}{\sqrt{n}/4} \tag{40}$$

(γ будет выбрано далее). Итак (поскольку $e^y \le 1 + y + \frac{y^2}{2-\varepsilon}$ для всякого малого $\varepsilon > 0$ при достаточно малых y),

$$e^{-\alpha x}\Big[\frac{1}{2}e^{\alpha/2} + \frac{1}{2}e^{-\alpha/2}\Big]^n < e^{-\frac{\gamma^2}{1/4}}$$
$$\times \Big[\frac{1}{2}\Big(1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2-\varepsilon}\cdot\frac{1}{4}\Big) + \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2-\varepsilon}\cdot\frac{1}{4}\Big)\Big]^n, \tag{41}$$

что при больших n и малых $\varepsilon > 0$ не превосходит

$$e^{-\frac{\gamma^2}{1/4}}\Big[1 + \frac{\alpha^2/4}{2-\varepsilon}\Big]^n = e^{-\frac{\gamma^2}{1/4}}\Big[1 + \frac{\gamma^2}{(2-\varepsilon)n/4}\Big]^n \le \exp\Big\{-\frac{\gamma^2}{(2+\delta)/4}\Big\},$$

где $\delta > 0$ – некоторое зависящее от ε малое число.

Теперь положим $\gamma = \sqrt{(2+\delta)\frac{\ln n}{4}}$, где δ_1 больше нуля и немного больше δ. Тогда

$$\mathbf{P}\Big(S_n > \sqrt{(2+\delta_1)\frac{n\ln n}{4}}\Big) \le e^{-(1+\delta_2)\ln n} = n^{-(1+\delta_2)}, \qquad (42)$$

где $1+\delta_2 = \dfrac{2+\delta_1}{2+\delta}$, $\delta_2 > 0$. Поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\delta_2)} < \infty$, то

$$\mathbf{P}\Big(A_n := \Big\{S_n(\omega) > \sqrt{(2+\delta_1)\frac{n\ln n}{4}}\Big\} \text{ б.ч.}\Big) = 0.$$

Итак, результат Харди–Литтлвуда (26) (с учетом расшифровки O-большого) доказан.

§ 7.

7.1. В этом разделе мы остановимся на

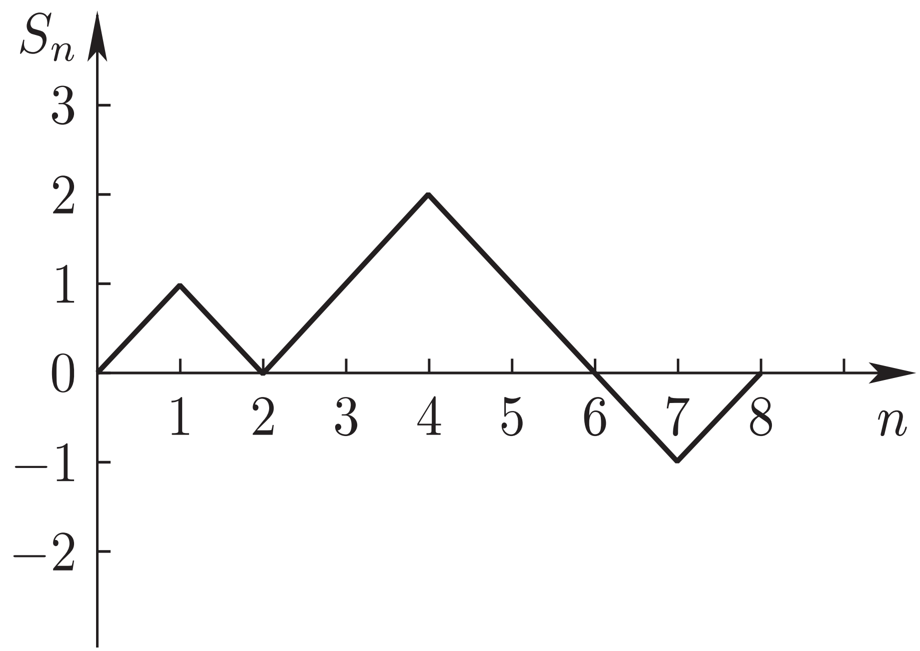
ЗАКОНЕ АРКСИНУСА.

Это один из замечательных вероятностных результатов, но плохо поддающийся интуиции. Суть его в следующем.

Пусть снова $X_1, X_2, \ldots$ – независимые бернуллиевские случайные величины с

$$\mathbf{P}(X_i = -1) = \mathbf{P}(X_i = +1) = \frac{1}{2},$$

а $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$, – случайное блуждание с $S_0 = 0$:

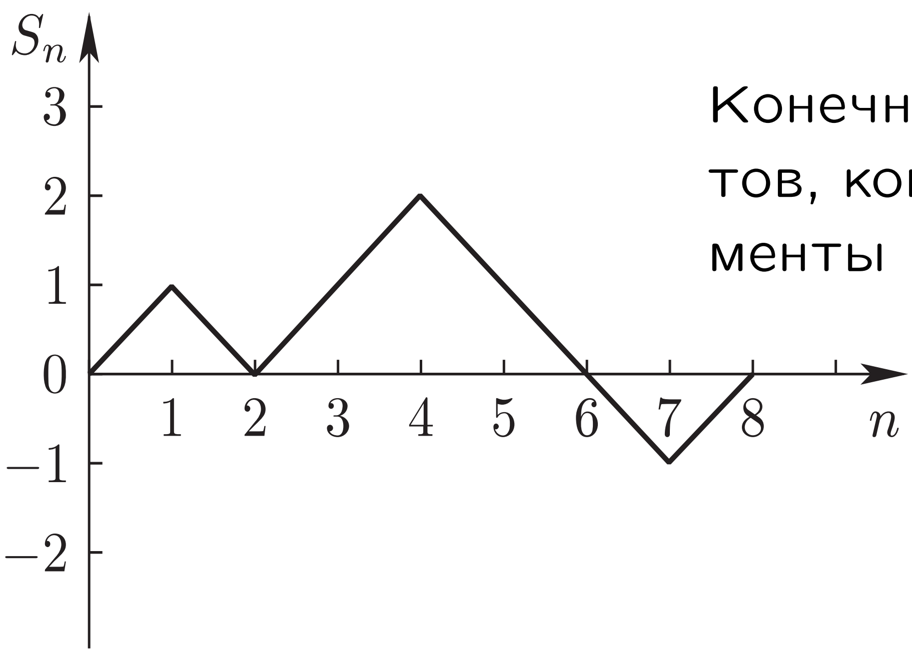


ВОПРОС:

- сколько времени $\nu(n)$ в течение n шагов случайное блуждание будет на положительной оси **?**

или, если пользоваться игровой терминологией,

- в каком числе шагов $\nu(n)$ один из игроков будет впереди другого **?**

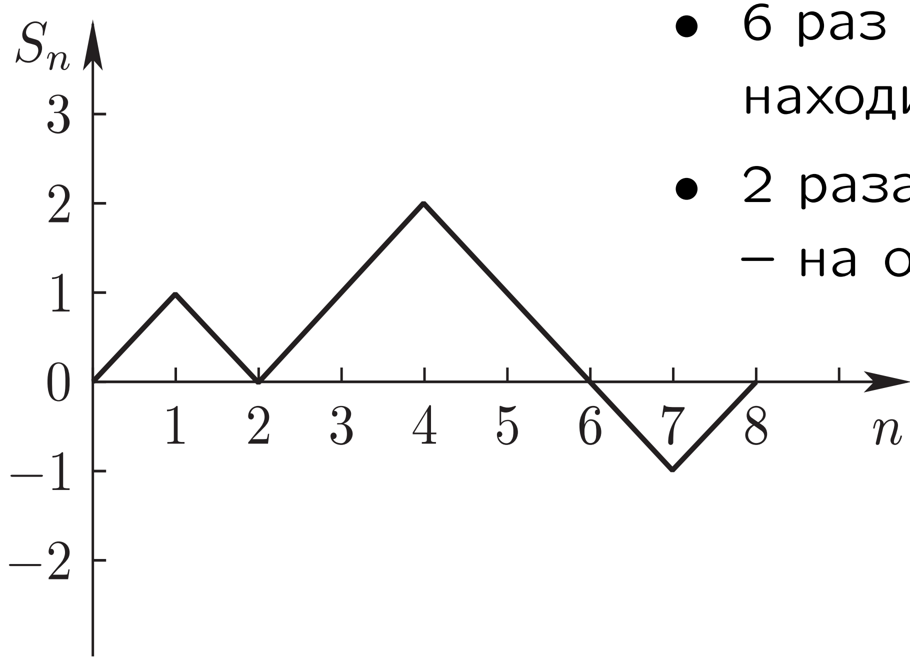


Конечно, будут еще значения моментов, когда $S_k = 0$ (на рисунке это моменты $k = 2, 6, 8$).

Условимся считать (это наше СОГЛАШЕНИЕ), что интервал $[n-1, n]$ **находится на ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ оси**, если

$$\boxed{\text{ХОТЯ БЫ ОДНО из значений } S_{n-1},\ S_n \text{ положительно.}}$$

Так что на рисунке мы



- 6 раз (в моменты $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) находились на положительной оси,
- 2 раза (в моменты $n = 7, 8$) – на отрицательной.

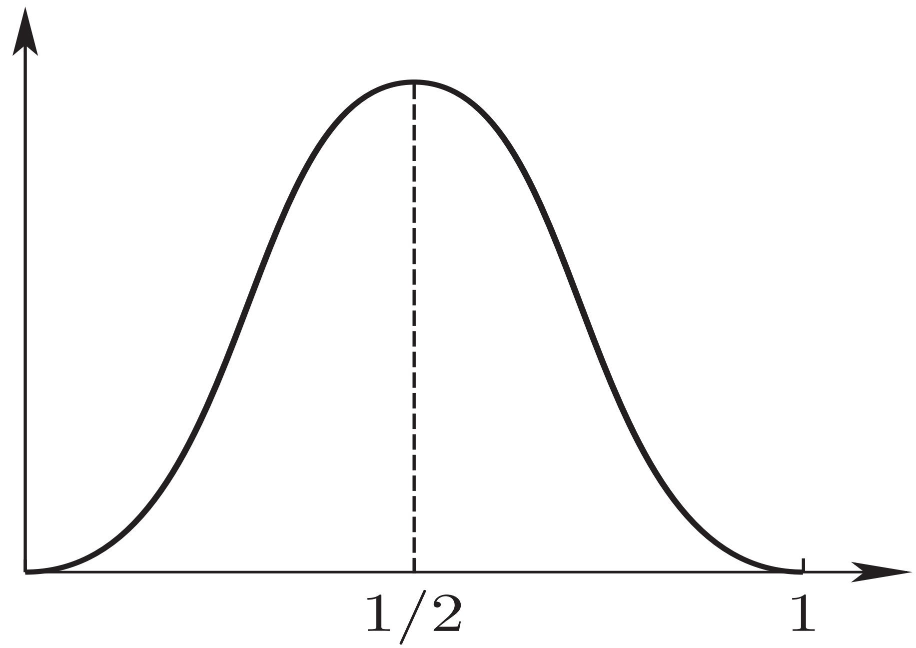
П. Леви в 1939 г. доказал (правда, для броуновского движения), что

$$\boxed{\lim_n \mathbf{P}\Big(\frac{\nu(n)}{n} \leq x\Big) = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x},} \qquad (43)$$

Это делает ясным происхождение названия

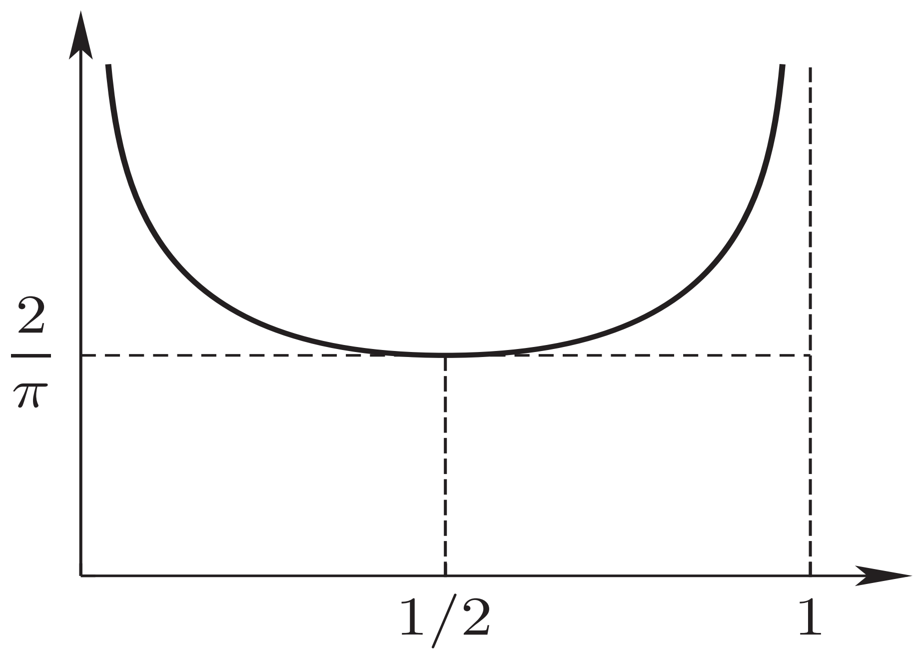
“ЗАКОН АРКСИНУСА” .

Этот результат действительно удивительный: казалось бы, интуиция подсказывает, что $\nu(n)/n \approx 1/2$ и “эмпирическая” плотность должна иметь вид



в частности быть симметричной относительно 1/2 и обращаться в нуль в точках 0 и 1.

Но (43) показывает, что ситуация на самом деле совершенно противоположная – плотность имеет вид $\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}$ и выглядит так:



Наглядно, **ЗАКОН АРКСИНУСА** утверждает, что

- случайное блуждание представляет собой **длинные затяжные** волны, которые возвращаются в нуль достаточно редко;

ГРУБО ГОВОРЯ,

- число $\varkappa(n)$ возвращений в нуль за время n имеет порядок не n (как кажется), а $\sqrt{n}$.

В конце этого параграфа мы дадим некоторые экспериментальные данные.

7.2. Идея доказательства закона арксинуса такова. По индукции можно доказать несколько неожиданное свойство

$$\mathbf{P}(\nu(2n) = 2k) = \mathbf{P}(S_{2k} = 0)\,\mathbf{P}(S_{2n-2k} = 0). \tag{44}$$

Но

$$\mathbf{P}(S_{2k} = 0) = C_{2k}^{k} \cdot 2^{-2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}},$$

$$\mathbf{P}(S_{2n-2k} = 0) = C_{2n-2k}^{n-k} \cdot 2^{-2n+2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}}$$

(по формуле Стирлинга, при больших k и $n-k$), откуда

$$\mathbf{P}\Big\{a \le \frac{\nu(2n)}{2n} < b\Big\} \sim \sum_{a \le k/n < b} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}$$

и, значит,

$$\lim_n \mathbf{P}\Big\{\frac{\nu(2n)}{2n} < x\Big\} = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}. \qquad \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Существенный момент в приведенном доказательстве – свойство (44).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Интересно отметить следующий

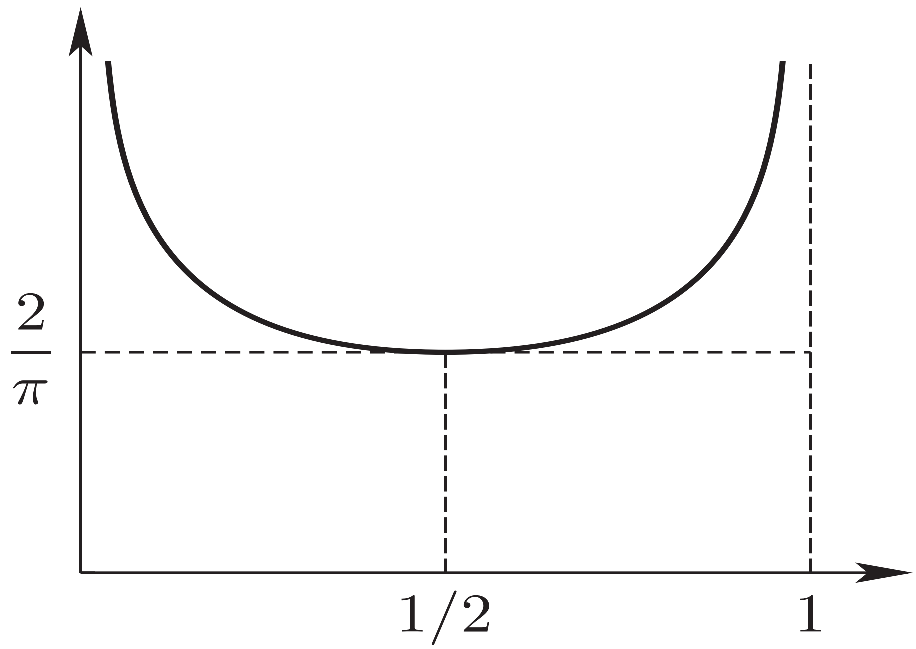
УСЛОВНЫЙ ЗАКОН АРКСИНУСА:

$$\mathbf{P}\{\nu(2n) = 2k \,|\, S_{2n} = 0\} = \frac{1}{n+1}, \qquad 0 \le k \le n,$$

где $\mathbf{P}\{\cdot \,|\, \cdot\}$ есть условная вероятность, определяемая как

$$\frac{\mathbf{P}\{\nu(2n) = 2k,\, S_{2n} = 0\}}{\mathbf{P}\{S_{2n} = 0\}}.$$

7.3. Плотность закона арксинуса имеет U-образный вид:



Если взять малые a и b, то вероятность того, что

$$\frac{1}{2} - a \leq \frac{\nu(n)}{n} < \frac{1}{2} + b$$

значительно меньше вероятности того, что

$$p - a \leq \frac{\nu(n)}{n} < p + b,$$

где p близко к нулю (но так, что $p - a > 0$) или к единице (но так, что $p + b < 1$).

Эти два случая соответствуют тому, что (при игре в “орлянку”) один из игроков будет проводить соответственно на положительной или отрицательной оси значительно больше времени, чем его противник.

Из закона арксинуса следует, что вероятность

$$\mathbf{P}\Big(\frac{\nu(n)}{n} \le \theta \quad \text{или} \quad \frac{\nu(n)}{n} \ge 1-\theta\Big) =: \mathbf{P}_\theta$$

примерно равна

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\theta \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} + \frac{1}{\pi}\int_{1-\theta}^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \frac{4}{\pi}\arcsin\sqrt{\theta}.$$

Если $\mathbf{P}_\theta = 1/2$, то можно подсчитать, что при больших n

$$\theta \approx 0.049.$$

А при $\mathbf{P}_\theta = 1/20$ (наглядно, "в одном случае из двадцати")

$$\theta \approx 0.0015.$$

Это и означает, что один из игроков будет проводить на "своей стороне" значительно больше времени, чем другой.