Задачи к лекции И.В.Аржанцева

Теория дивизоров и комбинаторика в свободной полугруппе

летняя школа "Современная математика", Дубна, 23 июля 2019 года

Задача 1. Докажите, что в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ элементы $3, 7$, $1+2\sqrt{-5}, 1-2\sqrt{-5}$ являются неприводимыми и ни один из этих элементов не делится на другие. Проверьте равенство

$$3 \cdot 7 = (1+2\sqrt{-5})(1-2\sqrt{-5}).$$

Задача 2. Докажите, что конечный моноид, содержащий более одного элемента, не является моноидом Крулля.

Задача 3. Докажите, что дивизориальное вложение полугруппы S в свободную полугруппу $F(P)$ является теорией дивизоров для S тогда и только тогда, когда для любых $a \neq b$ из $F(P)$ множество элементов из S, которые делятся на a, не совпадает с множеством элементов из S, которые делятся на b.

Задача 4. Докажите, что моноид в $(\mathbb{N}, \cdot)$, порожденный числами $3, 4, 6$, не является моноидом Крулля.

Задача 5. Постройте теорию дивизоров для моноида, порожденного в $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ элементами $(1,0), (1,1), \ldots, (1,k)$.

Задача 6. Приведите пример неразложимой последовательности с нулевой суммой длины $\sum_{i=1}^{r}(n_i - 1) + 1$ в группе $\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_r}$.

Задача 7. Пусть G – абелева группа. Докажите, что естественное вложение моноида $B(G)$ последовательностей с нулевой суммой в свободный моноид $P(G)$ является теорией дивизоров для $B(G)$. Проверьте, что группа классов дивизоров $\mathrm{Cl}(B(G))$ изоморфна группе G.