Задачи по комбинаторике триангуляций

Листок 2

Задача 1. Пусть K — симплициальный комплекс, $I \in K$ и $J \in \operatorname{link}_K I$. Докажите, что $\operatorname{link}_{\operatorname{link}_K I} J = \operatorname{link}_K(I \sqcup J)$.

Задача 2. (а) Докажите, что симплициальный комплекс K является n-мерным гомологическим многообразием в том и только том случае, когда выполнено условие $\forall I \in K$, $I \neq \varnothing$:

$$\beta_j(\operatorname{link}_K I) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 0, n - |I| \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(б) Докажите, что симплициальный комплекс K является n-мерной гомологической сферой в том и только том случае, когда условие выше выполнено для всех симплексов $I \in K$, включая $I = \varnothing$.

Задача 3. Докажите, что для симплициального дифференциала (отображения границы) $\partial_j \colon C_j(K; \Bbbk) \to C_{j-1}(K; \Bbbk)$ выполнено соотношение $\partial_j \circ \partial_{j+1} = 0$, или, эквивалентно, $\operatorname{Im} \partial_{j+1} \subseteq \operatorname{Ker} \partial_j$.

Задача 4. Пусть для симплициального комплекса K символ f_j обозначает количество j-мерных симплексов (т.е. $\dim_{\Bbbk} C(K; \Bbbk)$), а $s_j = \dim_{\Bbbk} \operatorname{Ker} \partial_j$. Выразите через числа f_j и s_j (а) размерности образов $\dim_{\Bbbk} \operatorname{Im} \partial_j$; (б) числа Бетти β_j симплициального комплекса K.

Задача 5. Докажите, что для любого симплициального комплекса K выполнено

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \ldots = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \ldots$$

(это число называется эйлеровой характеристикой симплициального комплекса K).

Задача 6. Докажите, что $\beta_0(K)$ равно числу компонент связности симплициального комплекса K.

Задача 7. Вычислите гомологии $H_i(K; \mathbb{Q})$ и соответствующие числа Бетти для следующих симплициальных комплексов

(а) K — граф на 4-х вершинах, с ребрами $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}$;

(б) K — граница квадрата;

(в) K — треугольник (симп.комплекс, состоящий из всех подмножеств множества $[3] = \{1, 2, 3\}$);

(г) K — граница тетраэдра.