Задачи по комбинаторике триангуляций

Листок 4

Набор элементов $\theta_1, \dots, \theta_n \in A$ *называется однородной системой параметров для связной градуированной алгебры* A*, если*

1. *Элементы* θ_i *однородные.*
2. $\theta_1, \dots, \theta_n$ *алгебраически независимы в* A*, т.е. подалгебра, порожденная элементами* θ_i *изоморфна алгебре многочленов от* n *переменных.*
3. A *является конечнопорожденным модулем над подалгеброй* $\Bbbk[\theta_1, \dots, \theta_n]$*, т.е. существуют элементы* $m_1, \dots, m_s \in A$*, такие что любой элемент* $a \in A$ *представляется в виде*

$$a = P_1(\theta_1, \dots, \theta)_n m_1 + \dots + P_s(\theta_1, \dots, \theta)_n m_s$$

(возможно, не единственным способом).

Градуированная версия леммы Нётер о нормализации: у конечно порожденной алгебры A *существует однородная система параметров. Если, кроме того,* A *порождена элементами степени* 1 *и* $|\Bbbk| = \infty$*, то существует линейная система параметров (т.е.* $\{\theta_i\} \subset A_1$*).*

Идеал $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \subset A$*, порожденный однородной системой параметров, называется параметрическим идеалом. Фактор-алгебра* A/Θ *является конечномерным векторным пространством.*

Задача 1. Рассмотрим алгебру Стенли–Райснера границы треугольника: $A = \Bbbk[\partial\Delta^2] = \Bbbk[v_1, v_2, v_3]/(v_1v_2v_3)$. (а) Докажите, что элементы v_1v_2 и v_3^2 не являются алгебраически независимыми в A, (б) элементы v_1 и v_2 алгебраически независимы, но не являются линейной системой параметров, (в) элементы $\theta_1 = v_1 - v_3$, $\theta_2 = v_2 - v_3$ являются линейной системой параметров. Докажите, что $\Bbbk[\partial\Delta^2]/\Theta \cong \Bbbk[v]/(v^3)$.

Пусть V*,* W *— векторные пространства над полем* $\Bbbk$*. Билинейное отображение* $f\colon V \times W \to \Bbbk$ *называется невырожденным, если для любого* $v \in V$*,* $v \neq 0$ *существует* $w \in W$*, такой что* $f(v, w) \neq 0$*, и наоборот: для любого* $w \in W$*,* $w \neq 0$ *существует* $v \in V$*, такой что* $f(v, w) \neq 0$*.*

Задача 2. Если существует невырожденное билинейное отображение $f\colon V \times W \to \Bbbk$, то $\dim V = \dim W$.

Задача 3. Пусть $A = \bigoplus_{j=0}^{n} A_j$ — алгебра с двойственностью Пуанкаре, и $\omega \in A_1$ — некоторый элемент. Докажите, что инъективность линейного отображения $\times\omega\colon A_j \to A_{j+1}$ эквивалентна сюръективности линейного отображения $\times\omega\colon A_{n-j-1} \to A_{n-j}$.

Пусть h_j *—* h*-числа границы симплициального многогранника* P^n*. Положим*

$$g_0 = h_0 = 1, \quad g_j = h_j - h_{j-1}, \ \textit{при}\ 1 \leqslant j \leqslant [n/2]$$

Задача 4. Используя существование элемента Лефшеца, докажите что для симплициального многогранника выполнено $g_j \leqslant \binom{g_1+j-1}{j}$ при $1 \leqslant j \leqslant [n/2]$.

Задача 5.* Докажите эквивалентность равенств $h''_j = h''_{n-j}$ и

$$h_j - h_{n-j} = (-1)^j \binom{n}{j} (\chi(S^{n-1}) - \chi(K))$$

для гомологического $(n-1)$-многообразия.

Задача 6. Вычислите h'-числа и h''-числа триангуляции поверхности рода g (сферы с g ручками), имеющей m вершин.

Задача 7. (оценка Юнгермана–Рингеля) Докажите, что у триангуляции сферы с g ручками как минимум $\left\lceil \dfrac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rceil$ вершин.