Методичка по симплициальным комплексам и гомологиям

Антон Айзенберг
ayzenberga@gmail.com

19 июля 2019 г.

Содержание

1 Вместо введения (о чем топология и вообще)

1.1 Гомеоморфизмы

Топология — наука о формах. Под формами, конечно, можно понимать разное. Формальное теоретико-множественное определение понятия “топологии на множестве” можно найти во многих источниках. Те, кто просто хочет иметь строгое определение топологии перед глазами, могут обратиться к википедии, а те, кто хочет в теоретико-множественную топологию серьезно вникнуть, — почитайте Элементарную топологию [6] и поделайте оттуда упражнения.

Для нас будет достаточно такого понимания: топологическое пространство, или форма, — это некоторое подмножество в $\mathbb{R}^n$. При этом нужно договориться о том, какие подмножества считать одинаковыми, а какие — разными. Базовое понятие тут — гомеоморфизм.

Определение 1.1. *Гомеоморфизм* из топологического пространства X в топологическое пространство Y — это непрерывная биекция $f\colon X \to Y$, обратная к которой тоже непрерывна. Если существует хотя бы один гомеоморфизм между X и Y, то говорят, что X *гомеоморфно* Y, обозначение $X \cong Y$.

Замечание 1.2. Есть пример, объясняющий, зачем требовать от гомеоморфизма все, что написано в определении. Рассмотрим отображение f из полуоткрытого интервала $[0, 2\pi)$ в окружность $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$, заданное формулой $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Это отображение непрерывно. И оно взаимно однозначно, а значит есть обратное отображение $f^{-1}\colon S^1 \to [0, 2\pi)$. Однако обратное отображение уже не является непрерывным: точки $(1, 0)$ и $(\cos(-\epsilon), \sin(-\epsilon))$ близки на окружности, но соответствующие им точки 0 и $2\pi - \epsilon$ далеки на интервале $[0, 2\pi)$. А раз обратное отображение f^{-1} разрывно, f не является гомеоморфизмом.

Пример 1.3. Имеем $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$ (открытый интервал гомеоморфен прямой). Это потому что есть функция $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)$, которая осуществляет биекцию из $(-1, 1)$ в $\mathbb{R}$, непрерывна, и обратная к ней (сиречь, $\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(y)$) тоже непрерывна.

Из этого примера, несмотря на его простоту, можно углядеть, что ограниченное множество может быть гомеоморфно неограниченному (т.е. свойство ограниченности не является инвариантом гомеоморфизма). Однако полезно знать, что

Предложение 1.4. *Образ компакта при непрерывном отображении является компактом. В частности, если $X \cong Y$ и X — компакт, то Y — тоже компакт.*

Напомним, что *компакт* — это замкнутое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 1.5. Осознать, что утверждение выше — это переформулировка теоремы Вейерштрасса из стандартного курса матанализа.

Упражнение 1.6. Явно постройте гомеоморфизм между кругом и квадратом.

Пример 1.7. Две точки на прямой $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ не гомеоморфны трем точкам $\{-2, 3, \pi\} \subset \mathbb{R}$. Очевидно, потому что между этими множествами нет биекций вообще.

Пример 1.8. Два отрезка $X = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ не гомеоморфны трем отрезкам $Y = [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5] \subset \mathbb{R}$. Интуитивная идея: у них разное число компонент связности. Формально, компонента связности пространства Z — это наибольшее по включению связное подмножество пространства Z. Подмножество называется *связным*, если оно одновременно открыто и замкнуто в топологии Z. Если вам интересно, попробуйте понять, почему это определение совпадает с интуитивным, по крайней мере для приведенных примеров.

Существует еще одно определение связности и, соответственно, компонент связности: линейная связность (оно больше соответствует тому, что мы знаем из работы с графами). Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ существует непрерывная кривая с концами в x_1 и x_2, полностью лежащая в X. Тут надо понимать, что определения связности и линейной связности, вообще говоря, не эквивалентны. Но различие проявляется на экзотических фрактальных примерах, которых у нас тут не будет.

Неформально можно понимать гомеоморфизм как возможность продеформировать одно множество в другое, при этом разрешается как угодно растягивать множество, но не рвать, не резать и не склеивать. Вооружившись этой идеей, перейдем к примерам подмножеств в $\mathbb{R}^2$, см. Рис.1. Попробуйте осознать гомеоморфизмы $X_1 \cong X_2$, $Y_1 \cong Y_2$, $Z_1 \cong Z_2$, $K_1 \cong K_2$, $L_1 \cong L_2$.

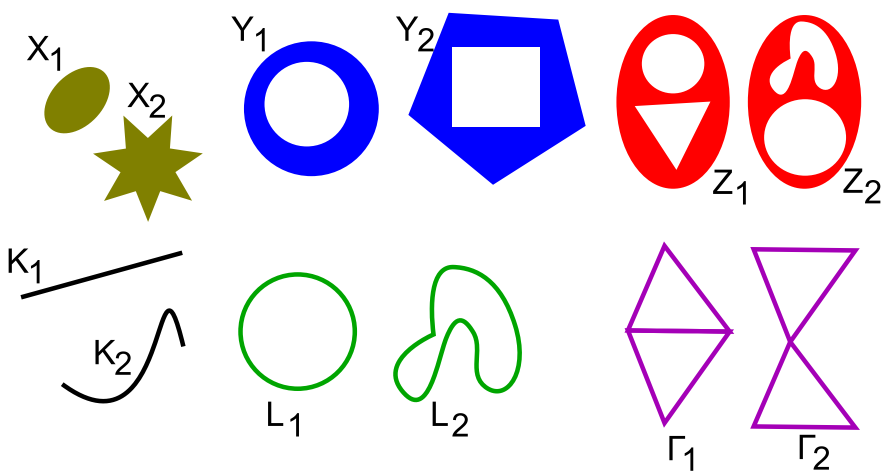

Рис. 1: Топологические пространства в $\mathbb{R}^2$

Пример 1.9. Любое пространство верхнего ряда НЕ гомеоморфно любому пространству нижнего ряда. Интуитивно тут опять же все понятно: те, что сверху, двумерные, а те, что снизу, одномерные. Обратите внимание: все эти подмножества лежат на 2-мерной плоскости $\mathbb{R}^2$ вашего экрана, но их собственная размерность может не совпадать с 2.

Размерность пространства уж точно должна быть инвариантом гомеоморфизма, иначе понятие гомеоморфизма было бы каким-то странным. Строгого определения размерности тут не будет: в первой половине 20 века люди из общей топологии напридумывали такое количество разных жутких определений размерности общих топологических пространств, что от этого изобилия до сих пор страдают на кандидатском экзамене по топологии как аспиранты, так и экзаменаторы. Большинство этих определений сейчас никому не нужны.[1]

Пример 1.10. Пространства K_1 и L_1 не гомеоморфны. В настоящий момент самый простой способ это увидеть — выкинуть из пространства одну точку. Если из K_1 выкинуть какую-нибудь точку (за исключением концов отрезка), то оно распадется на две компоненты связности. Если из L_1 выкинуть любую точку, то оно по-прежнему будет состоять из одной компоненты связности.

Этот аргумент можно дальше развивать. Например, можно посчитать для пространств из нижнего ряда количество точек, при выкидывании любой из которых пространство теряет связность. Для K_1 и K_2 таких точек бесконечно много — все, кроме двух концов. Для L_1 и L_2 таких точек нет. Для Γ_1 таких точек тоже нет. Для Γ_2 — такая точка ровно одна. В частности, получаем, что Γ_1 и Γ_2 не гомеоморфны.[2]

Замечание 1.11. Можно заметить, что фигуры в нижней строке Рис. 1 являются графами. Если точнее, то плоскими графами (плоский граф — это граф, нарисованный на плоскости без самопересечений). Можно придумать такое синтетическое определение гомеоморфизма графов (любых, не обязательно плоских). Определим операцию: в графе G разрешается взять любое ребро и добавить на него вершину (ребро разбивается на два ребра). Определим обратную операцию: можно взять любую вершину степени 2, стереть эту вершину, и слить два ребра в одно. Два графа называются гомеоморфными, если один из другого можно получить последовательностью описанных операций.

Для графов это определение эквивалентно общему определению гомеоморфизма. По-другому можно эту мысль выразить следующим образом. Скажем, что граф $\tilde{G}$ является подразбиением графа G, если $\tilde{G}$ получается из G добавлением дополнительных вершин на ребрах. Тогда графы G и H гомеоморфны в том и только том случае, когда существуют подразбиения $\tilde{G}$ и $\tilde{H}$ этих графов, которые изоморфны между собой.

Из синтетического определения гомеоморфизма графов можно вывести какие-нибудь полезные факты. Например, что количество n_k вершин степени $k \neq 2$ является инвариантом гомеоморфизма. В частности, количество висячих вершин является инвариантом.

Перейдем к двумерным пространствам. Как нам различить двумерные топологические пространства из верхнего ряда Рис.1? Тут выкидывание точек и связность не

[1] За исключением хаусдорфовой, или фрактальной, размерности. Это понятие уже давно перекочевало в медицинские приложения. Но стоит заметить, что хаусдорфова размерность как раз таки инвариантом гомеоморфизма не является (легко построить два гомеоморфных фрактала, имеющих разные хаусдорфовы размерности)

[2] Хотя выглядят похоже. Эта похожесть описывается другим, более слабым понятием гомотопической эквивалентности, см. ниже.

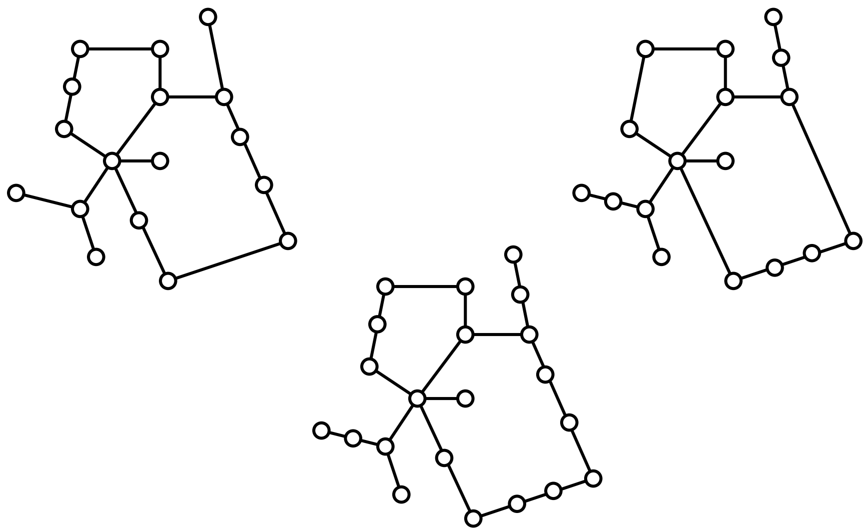

Рис. 2: Графы сверху не изоморфны. Но у них есть общее подразбиение, показанное снизу. Значит графы гомеоморфны.

помогают: какую точку не выкидывай, пространство остается связным. Неформально говоря, аргумент тут такой: у пространств X_i дырок нет, у пространств Y_i дырка одна, а у пространств Z_i две дырки. Осталось только определить понятие "дырка". Оказывается, что этого сделать нельзя. Зато можно формализовать понятие "количество i-мерных дырок топологического пространства X" — для этой формализации нужны гомологии и числа Бетти пространства X, см. параграф 3.

Замечание 1.12. Можно было бы попытаться формализовать подсчет числа дырок следующим образом. Заметим, что если из плоскости $\mathbb{R}^2$ вырезать X_1, то останется связное множество. Если из плоскости вырезать Y_1, то останется множество из двух компонент связности. А если вырезать Z_1, то останется трехкомпонентное множество. Но тут возникает некоторое количество фундаментальных вопросов.

Во-первых, формализация. Из картинки вроде бы очевидно, что, например, L_1 разделяет плоскость на две части. Общее утверждение звучит так:

Теорема 1.13 (Теорема Жордана). *Непрерывная замкнутая несамопересекающаяся кривая в $\mathbb{R}^2$ разделяет плоскость на две компоненты связности.*

И оно весьма нетривиально[3].

Во-вторых, есть тонкость: если нарисовать Y_1 на плоскости, то у дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus Y_1$ будет две компоненты связности, а если то же самое множество Y_1 рассмотреть как подмножество в $\mathbb{R}^3$, то дополнение $\mathbb{R}^3 \setminus Y_1$, конечно, будет связным. Поэтому надо следить за тем, в каком объемлющем пространстве мы сидим.

[3]Рассказывают, что на Мехмате когда-то читался спецкурс из 10 лекций, посвященный исключительно этому доказательству

В-третьих, вот такое утверждение “если пространства $N_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $N_2 \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфны, то $\mathbb{R}^n \backslash N_1 \cong \mathbb{R}^n \backslash N_2$” неверно. Примером тому служит знаменитая “рогатая сфера Александера”, придуманная в начале 20-го века (см. википедию). Утверждение о том, что число компонент связности у пространств $\mathbb{R}^n \backslash N_1$ и $\mathbb{R}^n \backslash N_2$ совпадает, при этом верно. Последнее утверждение доказывается с помощью теории двойственности Александера, о которой упомянуто в разделе 3.10.

1.2 Гомотопии

Еще один общетопологический концепт, который нужно знать, но про который я подробно писать не буду, а сошлюсь на, например, [12] — это гомотопии и гомотопические эквивалентности.

Определение 1.14. Два непрерывных отображения $f, g\colon X \to Y$ между топологическими пространствами называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение $F\colon X \times [0,1] \to Y$, такое что $F(x,0) = f(x)$ и $F(x,1) = g(x)$. Обозначение $f \simeq g$. Само отображение F называется *гомотопией* между отображениями f и g.

Гомотопию можно понимать как семейство отображений $f_t\colon X \to Y$, $f_t(x) = F(x,t)$, которое с течением времени $t \in [0,1]$ “непрерывно деформирует” отображение $f_0 = f$ в отображение $f_1 = g$.

Пример 1.15. Рассмотрим два отображения $f, g\colon [-2,2] \to [-2,2]$, одно тождественное $g(x) = x$, а другое — все в точку, $f(x) = 0 \in [-2,2]$, $\forall x \in [-2,2]$. Эти два отображения гомотопны. Действительно, можно задать непрерывную деформацию между f и g, положив, например

$$f_t(x) = F(x,t) = tx.$$

При $t = 0$ все отображается в одну точку, при $t = 1$ все отображается тождественно, как мы и хотели.

Пример 1.16. Аналогично предыдущему примеру можно рассмотреть два отображения из круга с дыркой в себя, см. Рис. 3. Одно отображение f — тождественное, а другое, g, схлопывает точки пространства Y на замкнутую кривую L, лежащую внутри Y. Эти два отображения гомотопны, потому что можно построить непрерывную интерполяцию между ними: в момент времени t отправить точку $y \in Y$ куда-то на полпути между $f(y)$ и $g(y)$ в соотношении $t\colon (1-t)$.

Определение 1.17. Два топологических пространства X и Y называются *гомотопически эквивалентными*, если существует пара отображений $h\colon X \to Y$ и $k\colon Y \to X$, такая что композиция $h \circ k\colon Y \to Y$ гомотопна тождественному отображению $\mathrm{id}_Y\colon Y \to Y$, а композиция $k \circ h\colon X \to X$ гомотопна тождественному отображению $\mathrm{id}_X\colon X \to X$. Обозначение $X \simeq Y$.

Если при этом одно из отображений, скажем $k\colon Y \to X$, является вложением подпространства, то подпространство Y называется *деформационным ретрактом* пространства X. При этом говорят, что X (деформационно) ретрагируется на Y.

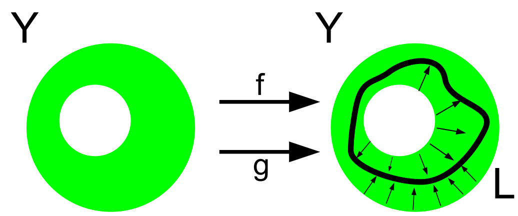

Рис. 3: Гомотопные отображения из Y в Y

Пример 1.18. Пространства Y и L из картинки 3 гомотопны. В качестве $h\colon Y \to L$ можно взять отображение g из примера 1.16, проецирующее продырявленный круг на кривую. В качестве отображения $k\colon L \to Y$ можно взять естественное вложение этой кривой. Тогда $h \circ k\colon L \to L$ — это уже тождественное отображение id_L, а композиция в обратном порядке, $k \circ h\colon Y \to Y$ — по построению совпадает с проекцией g, которая, как мы выяснили в примере 1.16, гомотопна отображению id_Y. Кривая L является деформационным ретрактом множества Y.

Упражнение 1.19. Проверьте, что гомотопность является отношением эквивалентности на множестве непрерывных отображений из X в Y, а гомотопическая эквивалентность — эквивалентностью на классе всех топологических пространств.

Говоря простыми словами, гомотопическая эквивалентность нам разрешает не только непрерывно деформировать топологические пространства, как было в случае гомеоморфизма, но и истончать их, или, наоборот, утолщать. В частности, размерность у гомотопически эквивалентных пространств может быть разная. Такого интуитивного понимания гомотопической эквивалентности нам будет вполне достаточно[4]. Так, на Рис. 1, пространства X_1, X_2, K_1, K_2 гомотопически эквивалентны, пространства Y_1, Y_2, L_1, L_2 гомотопически эквивалентны, и пространства $Z_1, Z_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ гомотопически эквивалентны. А вот между собой эти три четверки попарно не гомотопически эквивалентны, что мы к концу этого текста, надеюсь, поймем. Случай пространств X_1, X_2, K_1, K_2 особенно важен.

Определение 1.20. Топологическое пространство X называется *стягиваемым*, если оно гомотопически эквивалентно пространству, состоящему из одной точки: $X \simeq \mathrm{pt}$.

Иными словами, пространство X стягиваемо, если оно деформационно ретрагируется на любую (или на какую-нибудь) свою точку.

Пример 1.21. Выпуклые множества стягиваемы (потому что можно выбрать точку внутри множества, и непрерывно гомотетировать это множество с центром в этой точке, пока оно не превратится в точку, т.е. при коэффициенте гомотетии 0). Графы-деревья стягиваемы (докажите!). Сиреневая загогулина на Рис. 4 стягиваема.

[4]Стоит отметить, что существует более прямолинейный подход к определению гомотопической эквивалентности как раз через операции “истончения” и “утолщения”. Правда, в итоге получается понятие *простой гомотопической эквивалентности*, которое чуть более сильное, чем обычная гомотопическая эквивалентность

Дом Бинга на Рис. 4, справа, стягиваем. Структура дома Бинга такова: есть две комнаты, в нижнюю идет вентиляционная шахта с крыши, а в верхнюю — шахта из пола, и в комнатах есть перегородки, как показано на рисунке. Попробуйте доказать, что дом Бинга стягиваем. Стандартная подсказка тут такая: истончать топологическое пространство тут уже некуда, но можно вначале немного утолстить. Попробуйте представить, что стены дома Бинга сделаны из тонкого слоя пластилина, и представьте, как бы вы сделали такую штуку из прямоугольного бруска пластилина.

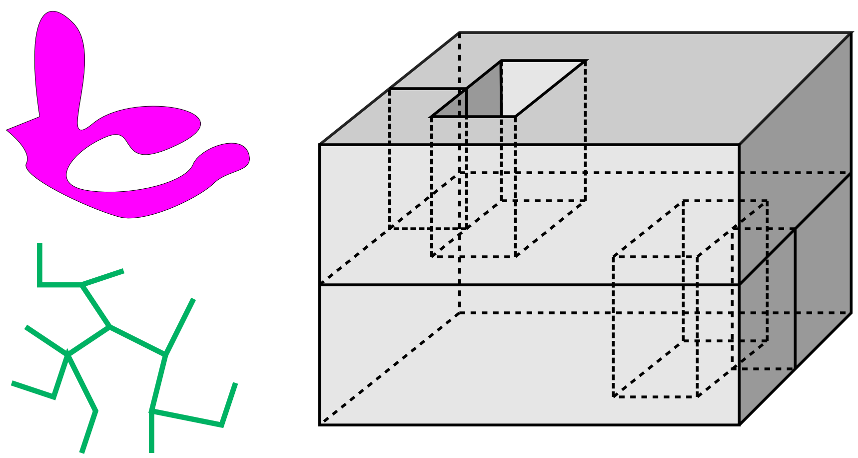

Рис. 4: Примеры стягиваемых пространств

Пример 1.22. Окружность $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ не стягиваема (это будет понятно после подраздела 3.5). Пара точек не стягиваема (докажите!). Более общо: докажите, что стягиваемое пространство является линейно связным. Пустое топологическое пространство нестягиваемо, поскольку из точки в пустое множество отображений нет вообще[5], а значит определение гомотопической эквивалентности не выполнено.

2 Симплициальные комплексы

2.1 Комбинаторное определение симплициального комплекса

Поскольку мы хотим с помощью топологии производить какие-то вычисления, нам нужно зафиксировать некий класс топологических пространств, которые можно комбинаторным и конечным образом описать и загнать в компьютер. Естественный пре-

[5]В теории множеств есть такой формализм: множество отображений из непустого множества в пустое множество — пусто, а множество отображений из пустого множества в пустое множество состоит из единственного элемента, “тождественного отображения”. Если вспомнить, что множество отображений из m-элементного множества в n-элементное множество имеет мощность n^m, то довольно естественно, что $0^m = 0$ при $m > 0$, но при этом полагают $0^0 = 1$. Кстати, из пустого множества в любое множество существует ровно одно отображение ($n^0 = 1$).

тендент на эту роль — симплициальные комплексы: с этого понятия и началась комбинаторная топология.

Часть того, что написано в этом и последующих разделах, взята из [1]. Там некоторые понятия определены более развернуто.

В дальнейшем число элементов множества M обозначается $|M|$ либо $\sharp M$, а 2^M обозначает множество всех подмножеств множества M. Часто будет использоваться обозначение $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Определение 2.1. *Симплициальным компле́ксом*[6] на конечном множестве вершин M называется совокупность $K \subset 2^M$ подмножеств множества M, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1. если $I \in K$ и $J \subset I$, то $J \in K$;
2. $\varnothing \in K$.

Элементы множества M называются *вершинами* симплициального комплекса K, элементы $I \in K$ — его *симплексами*, а если $i \in I$, то говорят, что i есть вершина симплекса I. Множество вершин M мы будем иногда обозначать $V(K)$. Число $|I| - 1$ называется *размерностью* симплекса I и обозначается $\dim I$. Размерность симплициального комплекса K есть по определению максимальная размерность его симплексов. Заметьте, что формально пустой симплекс имеет размерность -1 (к такому формализму можно привыкнуть, он довольно полезен).

Пример 2.2. Симплициальный комплекс размерности $\leqslant 1$ — это граф (без петель и кратных ребер).

Заметим, что из определения отнюдь не следует, что вершина (рассматриваемая как одноэлементное множество) является симплексом. Назовем вершину $i \in V(K)$ призрачной, если $\{i\} \notin K$. Призрачная вершина не может быть вершиной никакого симплекса в K, как легко следует из определения. Поэтому, как правило, призрачные вершины можно просто выкинуть из рассмотрения.

Мы привыкли думать о графах в терминах картинок. Полезно также уметь превращать абстрактный симплициальный комплекс в форму, то есть в топологическое пространство, см. Рис. 5. Это топологическое пространство (называемое *геометрической реализацией* симплициального комплекса) можно описать аналогично тому, как это делается с графом: каждой вершине $i \in M$ ставится в соответствие точка e_i, для каждого ребра $\{i, j\} \in K$ рисуется отрезок между e_i и e_j, для каждой тройки $\{i, j, k\} \in K$ рисуется треугольник, натянутый на e_i, e_j, e_k, четверке точек соответствует тетраэдр, и так далее. Еще, если мы рисуем его в некотором пространстве, то хочется, чтобы этот агрегат не самопересекался, где не следует. Для этого точки e_i надо брать в достаточно общем положении в пространстве достаточно большой размерности. Любой симплициальный комплекс на m вершинах заведомо можно нарисовать в m-мерном пространстве, как показывает следующее определение.

[6] В слове комплекс ударение ставится на букву е, спасибо французам

Определение 2.3. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — базис пространства $\mathbb{R}^m$, и пусть $\triangle_I = \mathrm{conv}(e_i \mid i \in I)$ — симплекс, натянутый на базисные векторы, соответствующие индексам из подмножества $I \subset [m]$. Подмножество $|K| = \bigcup_{I \in K} \triangle_I \subset \mathbb{R}^m$ называется *(стандартной) геометрической реализацией* симплициального комплекса K.

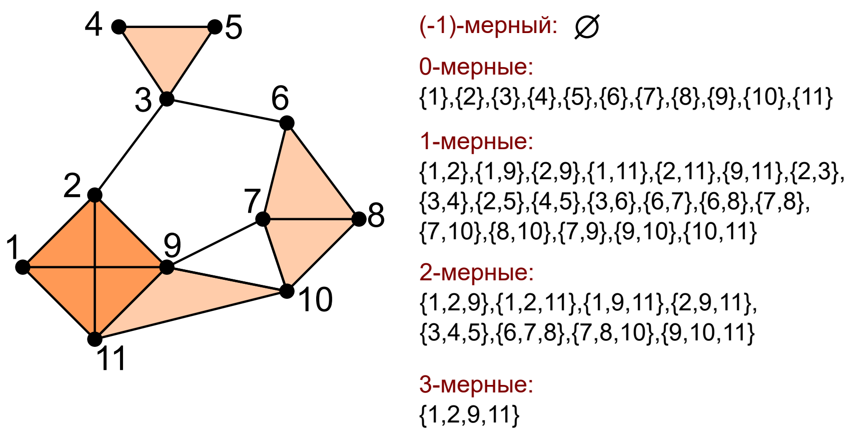

Рис. 5: Симплициальный комплекс задан справа при помощи списка всех своих симплексов. А слева изображена его геометрическая реализация. Стандартная геометрическая реализация определена в $\mathbb{R}^{11}$, но для удобства картинка сделана двумерной

Упражнение 2.4. Докажите, что пространство $|K|$ компактно.

Упражнение 2.5. Докажите, что у n-мерного симплициального комплекса существует геометрическая реализация в $\mathbb{R}^{2n+1}$. (Т.е., симплициальный комплекс можно нарисовать в $\mathbb{R}^{2n+1}$ без самопересечений. Подсказка: накидайте вершины симплициального комплекса в $\mathbb{R}^{2n+1}$ случайным образом и докажите, что все получится.)

Замечание 2.6. Часто при работе с топологией симплициальных комплексов фраза "геометрическая реализация" и соответствующее обозначения проглатываются. Например, говорят, что комплекс K_1 гомеоморфен K_2, и пишут $K_1 \cong K_2$, имея в виду их геометрические реализации.

Определение 2.7. Симплекс $I \in K$ называется *максимальным по включению*, если не существует такого $J \in K$, что J строго содержит I. Симплициальный комплекс K называется *чистым (или размерностно однородным)* если все его максимальные по включению симплексы имеют одинаковую размерность.

Пример 2.8. На Рис. 5 максимальны по включению: $\{1, 2, 9, 11\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{6, 7, 8\}$, $\{7, 8, 10\}$, $\{9, 10, 11\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 6\}$, $\{7, 9\}$. Этот комплекс нечист.

Замечание 2.9. Конечно, в целях экономии времени и места мы могли бы задавать симплициальный комплексы не в виде перечня всех симплексов, а в виде перечня только максимальных по включению симплексов (потому что все остальные симплексы можно восстановить, перебирая все возможные подмножества максимальных).

Пример 2.10. Пусть $n\,\mathrm{pt}$ обозначает симплициальный комплекс, состоящий из n точек (формально, $n\,\mathrm{pt} = \{\varnothing, \{1\}, \ldots, \{n\}\} \subset 2^{[n]}$). Для простоты, пишем pt вместо $1\,\mathrm{pt}$.

Пример 2.11. Обозначим через Δ_M полный симплициальный комплекс на множестве вершин M, т.е. комплекс, содержащий все подмножества множества M ($\Delta_M = 2^M$). Через $\partial\Delta_M$ будем обозначать симплициальный комплекс, который состоит из всех подмножеств множества M кроме самого M ($\partial\Delta_M = 2^M \backslash \{M\}$). Будем называть Δ_M симплексом[7] на множестве M, а $\partial\Delta_M$ — границей симплекса на множестве M.

Легко проверить, что стандартная геометрическая реализация комплекса Δ_M — это действительно симплекс (в выпукло-геометрическом смысле), а стандартная реализация комплекса $\partial\Delta_M$ — это граница симплекса.

Определение 2.12. Симплициальные комплексы K и L называются *изоморфными*, если существует биекция между множествами их вершин, индуцирующая биекцию между K и L.

Попросту говоря, симплициальные комплексы изоморфны, если они отличаются друг от друга только переобозначением вершин. Как и в случае графов, понятия изоморфизма и гомеоморфизма различаются. Изоморфные комплексы, конечно, гомеоморфны. Но бывают комплексы, которые не изоморфны, но гомеоморфны.

Пример 2.13. Граница любого трехмерного многогранника гомеоморфна обычной круглой сфере

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Гомеоморфизм можно построить так: поместить начало координат внутрь многогранника, и спроецировать многогранник из начала координат на круглую сферу. В частности, границы тетраэдра, октаэдра и икосаэдра, утянутые с википедии на Рис. 6 все друг другу гомеоморфны. При этом эти комплексы, конечно, не изоморфны: например, у них разное число вершин.

2.2 Гомеоморфизмы симплициальных комплексов

На будущее довольно полезно ввести стандартные обозначения для часто встречающихся топологических пространств

$$S^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}, \qquad n - \text{мерная сфера;}$$

$$D^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n}^2 \leqslant 1\}, \qquad n - \text{мерный диск (или шар);}$$

[7] Я слышал, что некоторые программисты на ФКН называют симплексом выпуклую оболочку любого конечного набора точек. Выражаю свой протест против такого соглашения. Выпуклая оболочка конечного числа точек — это многогранник. А симплекс — это выпуклая оболочка аффинно независимого набора точек. Симплексы размерностей 1, 2 и 3, — это отрезок, треугольник и тетраэдр соответственно.

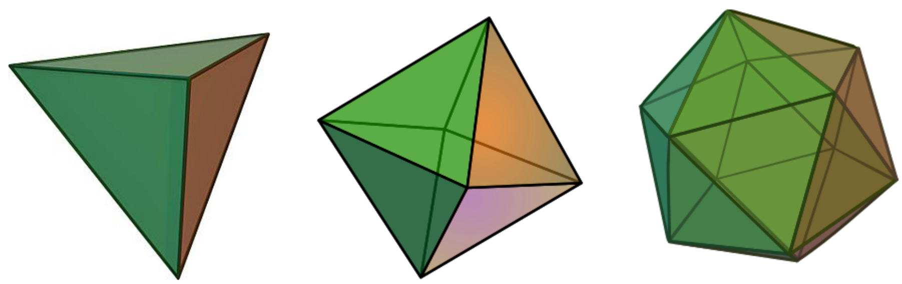

Рис. 6: Примеры симплициальных комплексов — границы симплициальных многогранников ("симплициальный" значит, что любая собственная грань является симплексом. В данном случае — либо вершиной, либо ребром, либо треугольником)

Замечание 2.14. Абсолютно аналогично примеру (2.13), граница любого n-мерного симплициального многогранника гомеоморфна круглой $(n-1)$-мерной сфере S^{n-1}. А значит все такие триангуляции гомеоморфны между собой. При этом комбинаторика у симплициальных многогранников может быть самой разной, см. подробности в [1].

Упражнение 2.15. Докажите, что любой n-мерный многогранник гомеоморфен D^n, а его граница гомеоморфна сфере $\partial D^n = S^{n-1}$.

Определение 2.16. Пусть X — топологическое пространство, а K — симплициальный комплекс, такой что $|K| \cong X$. Тогда K называется *триангуляцией* пространства X.

Замечание 2.17. Конечно, существуют нетриангулируемые пространства, то есть пространства, у которых нет ни одной триангуляции. Например, открытый интервал $(0,1) \subset \mathbb{R}$: как мы знаем из Предложения 1.4, свойство компактности — это инвариант гомеоморфизма, все симплициальные комплексы компактны, а открытый интервал — нет. Но это неинтересный пример: мы могли бы в определении симплициального комплекса не требовать, чтобы вместе с любым симплексом комплекс содержал и все его грани. При таком определении отрезок без своих концов был бы "симплициальным комплексом". Такие открытые и полуоткрытые пространства называются *ручными*, или *определимыми*[8], какие-то подробности про такие пространства можно найти в [7].

Примеры диких нетриангулируемых пространств — это некоторые фракталы. Например, в треугольнике Серпинского, Рис. 7, бесконечно много дырок, чего от конечного симплициального комплекса вряд ли ожидаешь. Другая причина, по которой многие фракталы не триангулируемы — наличие сколь угодно мелких особенностей. Если взять геометрическую реализацию симплициального комплекса, и посмотреть под микроскопом какую-нибудь его точку, то начиная с какого-то момента ничего нового увеличение давать не будет, см. Рис. 8. А у треугольника Серпинского при увеличении будут видны все новые и новые дырочки.

[8] tame, definable

Заметим, однако, что есть примеры совсем экзотические. Забегая вперед, приведем следующее важное определение. Топологическое пространство называется *n-мерным многообразием (топологическим многообразием без края)*, если у любой его точки существует окрестность, гомеоморфная пространству $\mathbb{R}^n$. Это означает, что если у такого пространства рассматривать под микроскопом любую точку, то увидим обычное евклидово пространство. Можно ли триангулировать такое пространство? До относительно недавнего времени этот вопрос назывался "*гипотезой триангулируемости*" (гипотеза состояла в том, что триангулировать можно). В 80-х годах прошлого века было доказано, что существуют компактные 4-мерные многообразия, которые невозможно триангулировать. В размерностях 5 такие примеры тоже есть, но это было доказано только в 21 веке, см. [9]. Эти примеры показывают, что для триангулируемости не достаточно, чтобы пространство было хорошо устроено в малых масштабах.

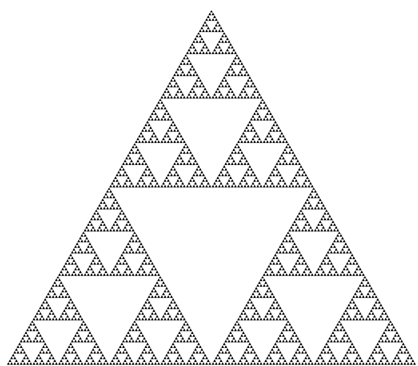

Рис. 7: Треугольник Серпинского — нетриангулируемое топологическое пространство.

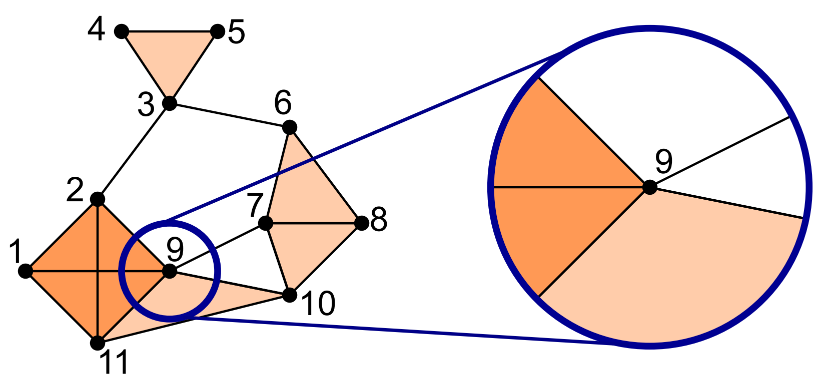

Рис. 8: Смотрим на вершину симплициального комплекса под микроскопом

У нас есть понятие симплициального комплекса, и есть понятие гомеоморфизма. Естественно было бы попытаться придумать синтетическое определение гомеоморфизма симплициальных комплексов, подобно тому, как это было сделано для графов в Замечании 1.11.

Определение 2.18. Симплициальные комплексы K и L называются кусочно-линейно гомеоморфными (или PL-гомеоморфными), если существуют симплициальное подразбиение $\tilde{K}$ комплекса K и симплициальное подразбиение $\tilde{L}$ комплекса L, такие что $\tilde{K}$ и $\tilde{L}$ изоморфны.

Строгое определение подразбиения и прочих понятий кусочно линейной топологии мы не приводим. Желающие могут их найти, погрузившись в книгу Рурка–Сандерсона [10]. Но, надеюсь, что Рис. 9 дает примерное представление, о чем идет речь.

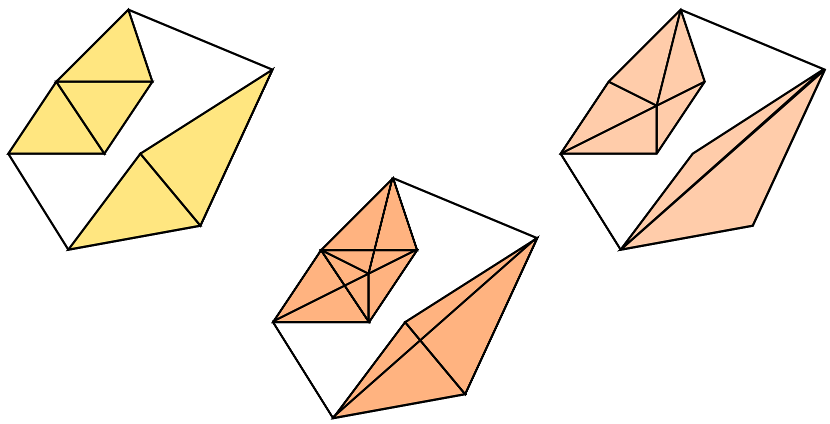

Рис. 9: Сверху показаны два комплекса, а снизу — их общее симплициальное подразбиение. Значит, комплексы сверху кусочно линейно гомеоморфны

Замечание 2.19. В отличие от графов, определение PL-гомеоморфизма для общих симплициальных комплексов не эквивалентно гомеоморфизму (хотя, конечно, из кусочно линейного гомеоморфизма следует обычный). Вопрос о том, следует ли из гомеоморфизма симплициальных комплексов их PL-гомеоморфизм, исторически очень важен, и носит специальное название Hauptvermutung, “основная гипотеза комбинаторной топологии” (гипотеза, собственно, была в том, что PL-гомеоморфизм следует из гомеоморфизма, но ее опровергли в 60-х годах прошлого века). Исторический экскурс см. на wiki. Упомянем только, что существуют две вполне конкретные триангуляции 5-мерной сферы S^5, которые не PL-гомеоморфны (речь идет о теореме Кэннона–Эдвардса, чуть больше подробностей есть в [1]).

Замечание 2.20. Еще один вопрос, который тут полезно затронуть — насколько алгоритмически сложна задача распознавания гомеоморфизма между симплициальными комплексами? Ответ может показаться неожиданным: эта задача вообще алгоритмически неразрешима. Теорема Новикова [5] гласит, что не существует алгоритма, который отвечал бы на вопрос, гомеоморфен ли заданный симплициальный комплекс n-мерной сфере S^n, где $n \geqslant 5$.

Из всего сказанного создается (справедливое) впечатление, что фундаментальные концепции топологии с вычислительной наукой не особо дружат.

2.3 Некоторые конструкции симплициальных комплексов

Эти конструкции полезно знать для общего развития, однако если вам не терпится перейти к гомологиям, то при первом прочтении можно этот подраздел пропустить.

Определение 2.21. Пусть K_1 и K_2 — симплициальные комплексы на множествах M_1 и M_2 соответственно. *Джойном* $K_1 * K_2$ называется симплициальный комплекс на несвязном объединении $M_1 \sqcup M_2$, чьи симплексы имеют вид $I_1 \sqcup I_2 \subset M_1 \sqcup M_2$, где $I_1 \in K_1$, $I_2 \in K_2$. Симплициальный комплекс $K * \mathrm{pt}$ называется *конусом* над K (с вершиной конуса pt) и обозначается $\operatorname{Cone} K$. Симплициальный комплекс $K * (2\,\mathrm{pt})$ называется *надстройкой* над K и обозначается ΣK.

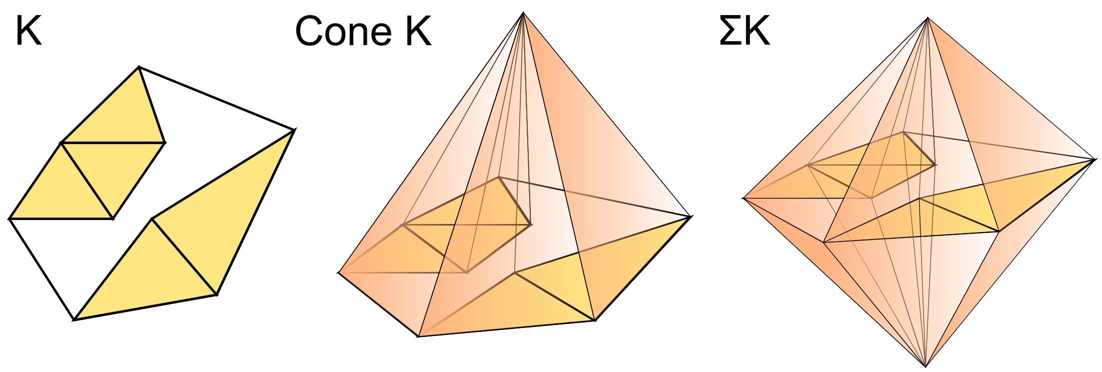

Рис. 10: Симплициальный комплекс, конус над ним и надстройка над ним

Нетрудно проверить, что $|K_1 * K_2| \cong |K_1| * |K_2|$, $|\operatorname{Cone} K| \cong \operatorname{Cone}|K|$ и $|\Sigma K| \cong \Sigma|K|$, где в правой части стоят стандартные топологические операции джойна, конуса и надстройки топологических пространств (отсылаем к другим источникам).

Упражнение 2.22. Докажите, что операция джойна ассоциативна: $(K * L) * N = K * (L * N)$, где $=$ понимается как изоморфизм симплициальных комплексов.

Упражнение 2.23. Докажите, что конус над любым симплициальным комплексом является стягиваемым топологическим пространством.

Упражнение 2.24. (0) Докажите, что $2\,\mathrm{pt} * 2\,\mathrm{pt}$ — это граница квадрата, а $2\,\mathrm{pt} * 2\,\mathrm{pt} * 2\,\mathrm{pt}$ — граница октаэдра. (1) Докажите, что n-кратный джойн $2\,\mathrm{pt} * 2\,\mathrm{pt} * \dots * 2\,\mathrm{pt}$ гомеоморфен $(n-1)$-мерной сфере S^n. (2) Докажите, что $S^n * S^k \cong S^{n+k+1}$.

Конструкция 2.25. Ввиду последнего упражнения, можно определить операцию *j-кратной надстройки*

$$\Sigma^j X = \underbrace{\Sigma\Sigma\cdots\Sigma}_{j\text{ раз}} X \cong \underbrace{2\,\mathrm{pt} * 2\,\mathrm{pt} * \dots * 2\,\mathrm{pt}}_{j\text{ раз}} * X \cong S^{j-1} * X.$$

Аналогично, можно определить *j-кратный конус*

$$\operatorname{Cone}^j X = \underbrace{\operatorname{Cone}\operatorname{Cone}\cdots\operatorname{Cone}}_{j\text{ раз}} X = \underbrace{(1pt * \cdots * 1pt)}_{j\text{ раз}} * X \cong D^{j-1} * X.$$

Последний гомеоморфизм легко углядеть из того, что джойн j одноточечных пространств — это попросту $(j-1)$-мерный симплекс, который гомеоморфен диску D^{j-1} согласно упражнению 2.15.

В определениях ниже K — симплициальный комплекс на множестве вершин M.

Определение 2.26. Пусть $l \geqslant 0$ — целое число. Симплициальный комплекс $K^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \{I \in M \mid I \in K, \dim I \leqslant l\}$ на M называется *l-мерным остовом* комплекса K.

Определение 2.27. Пусть $J \subset M$ — произвольное подмножество вершин. Симплициальный комплекс $K_J \stackrel{\text{def}}{=} \{I \subseteq J \mid I \in K\}$ называется *полным подкомплексом* комплекса K на множестве J.

Определение 2.28. Пусть $I \in K$. *Звездой* симплекса I в комплексе K называется симплициальный комплекс $\operatorname{star}_K I \stackrel{\text{def}}{=} \{J \subset M \mid J \cup I \in K\}$. *Линком* симплекса I в комплексе K называется симплициальный комплекс $\operatorname{link}_K I \stackrel{\text{def}}{=} \{J \subset M \backslash I \mid J \sqcup I \in K\}$.

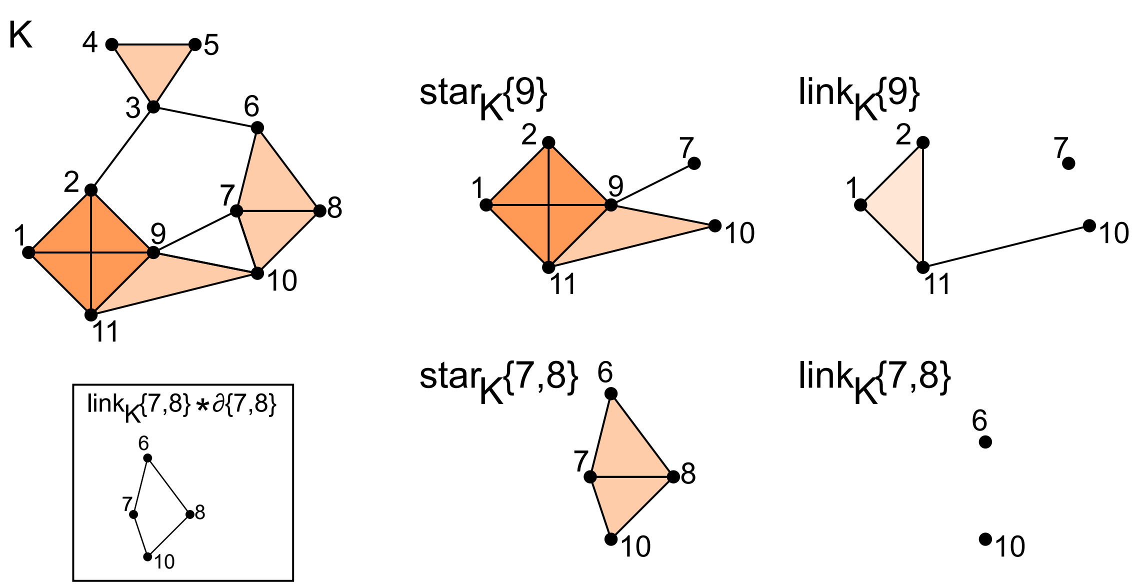

Рис. 11: Пример симплициального комплекса, звезд и линков его симплексов

Замечание 2.29. Формально, линк — это симплициальный комплекс на множестве $M\backslash I$. Однако на практике часто оказывается, что большинство из этих вершин — призрачные (т.е. не лежат ни в каких симплексах, и сами таковыми не являются). Это как раз тот случай, когда все эти призрачные вершины надо выбросить.

Из формальных определений следует, что $\operatorname{link}_K \varnothing = K$.

Упражнение 2.30. $\dim \operatorname{link}_K I \leqslant \dim K - |I|$. Если K чистый, то $\dim \operatorname{link}_K I = \dim K - |I|$.

Упражнение 2.31. $\operatorname{star}_K I = \Delta_I * \operatorname{link}_K I$. В частности, звезда любого непустого симплекса является конусом, а значит стягиваема.

Замечание 2.32. Каков геометрический смысл звезды симплекса? Звезда симплекса I — это то, что видно, если рассмотреть под микроскопом какую-нибудь точку, лежащую внутри симплекса I. Сравните Рис. 8 и 11.

Линк — это то, что остается от звезды, если изъять исходный симплекс, со всеми вытекающими последствиями. Если i — вершина симплициального комплекса K, то $\operatorname{link}_K\{i\}$ можно понимать следующим образом. Представьте вселенную формы K, и вообразите себя существом, созерцающим вселенную из наблюдательного пункта i. Тогда горизонт, который вы увидите вокруг себя и есть $\operatorname{link}_K\{i\}$.

С линком симплексов большей размерности немного сложнее. Если бы наше гипотетическое существо сидело где-нибудь посередине симплекса I, $\dim I = k$, то оно бы вдоль направлений “ортогональных” симплексу I видело бы линк $\operatorname{link}_K I$, а в направлениях параллельных симплексу видело бы границу этого симплекса, то есть $\partial|I|$. Таким образом, форма всего горизонта, которую видит существо, есть

$$\partial|I| * |\operatorname{link}_K I| \cong S^{k-1} * |\operatorname{link}_K I| \cong |\Sigma^k \operatorname{link}_K I|. \tag{2.1}$$

Пример показан на Рис. 11, в рамочке.

Упражнение 2.33. Пусть x — точка, лежащая в относительной внутренности (геометрического) симплекса I. Тогда подпространство $\partial|I| * |\operatorname{link}_K I|$ является деформационным ретрактом пространства $|\operatorname{star}_K I| \backslash x$

3 Гомологии

3.1 Введение: счет циклов в графе

Посмотрим на граф Γ, изображенный на Рис. 12. Сколько циклов в этом графе? Если под циклом понимать последовательность неповторящихся ребер, которые соединены в цепочку, конец которой совпадает с началом, то можно поднапрячься и насчитать 6 циклов: θ_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$. Теперь представим себе, что мы научились складывать циклы, и если одно ребро повторилось в двух складываемых циклах, то оно сократилось. Тогда мы можем утверждать, что $\theta_4 = \theta_1 + \theta_2$, $\theta_5 = \theta_2 + \theta_3$, $\theta_6 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$. А еще у нас появится новая штука $\theta_7 = \theta_1 + \theta_3$, которую мы, сдавая экзамен по дискретной математике, циклом назвать побоялись бы. А еще, если мы сложим любой цикл с самим собой, то получим $\theta_8 = 0$ (то есть пустой цикл, цикл без ребер).

Из этой арифметики можно сделать следующий вывод: для полного описания всех (геометрических) циклов в графе Γ нам достаточно только трех из них, например

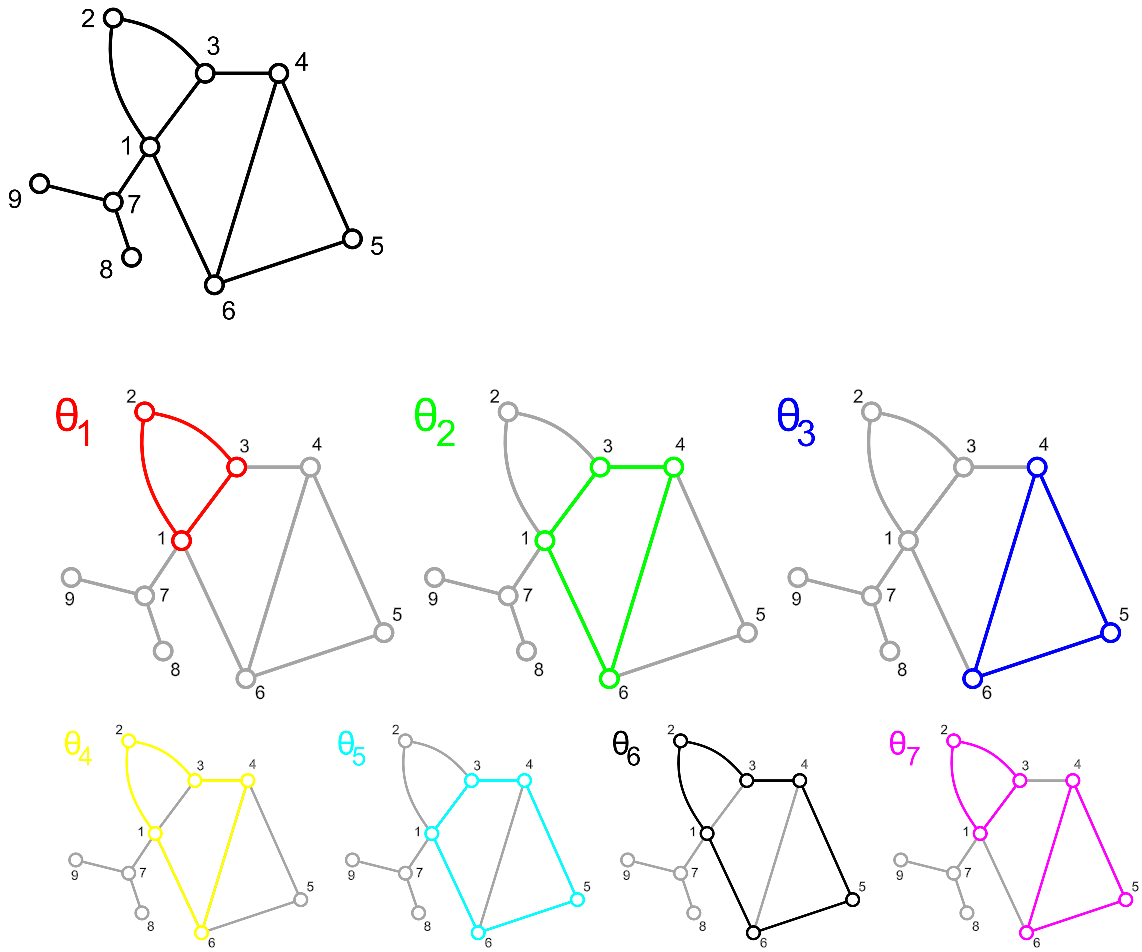

Рис. 12: Граф и алгебраические циклы в графе.

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Остальные получаются из них с помощью сложения (получаются еще какие-то странные штуки, θ_7 и θ_8, но и ладно).

Если бы мы как-то по другому нарисовали граф Γ, то, возможно, было бы естественнее рассмотреть циклы $\theta_2, \theta_5, \theta_6$. Через эти циклы любой другой тоже выражается. Получили число 3 (количество элементов в множестве $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ или во множестве $\{\theta_2, \theta_5, \theta_6\}$). Это число 3 и есть "количество 1-мерных дырок $b_1(\Gamma)$" в графе Γ, которое анонсировалось в первом параграфе.

Наведем в этом примере некоторую строгость. Рассмотрим векторное пространство $C_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2)$ над полем $\mathbb{Z}_2$ (поле вычетов по модулю 2) с базисом $\{e_1, e_2, \dots, e_s\}$, где e_i — это все возможные ребра графа Γ. Оно называется *пространством 1-мерных цепей* графа Γ (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$). Элементы пространства цепей $C_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2)$ имеют вид

$$\sigma = \varepsilon_{e_1} e_1 + \dots + \varepsilon_{e_s} e_s, \qquad \varepsilon_i \in \mathbb{Z}_2.$$

На картинке элемент σ можно изобразить, нарисовав множество $\operatorname{supp} \sigma$ тех ребер e_i, для которых $\varepsilon_i = 1$. Ребра, которые встречаются в комбинации σ с коэффициентом 0 мы не рисуем. Размерность пространства цепей $\dim_{\mathbb{Z}_2} C_1(\Gamma;\mathbb{Z}_2)$ по построению равна числу ребер графа, в нашем случае — 11.

Теперь определим подпространство 1-мерных (алгебраических) циклов в пространстве $C_1(\Gamma;\mathbb{Z}_2)$. Назовем цепь σ *циклом*, если для любой вершины графа количество инцидентных ей ребер из множества $\operatorname{supp}\sigma$ четно. Над полем $\mathbb{Z}_2$ это можно выразить вот таким условием:

$$\forall v \in V(E)\colon \bigoplus_{\substack{e\in\operatorname{supp}\sigma\\ e\ni v}} \varepsilon_e = 0$$

Поскольку все эти условия линейны, алгебраические 1-циклы образуют векторное подпространство. Обозначим его через $Z_1(\Gamma;\mathbb{Z}_2)$. Размерность $\beta_1(\Gamma) = \dim_{\mathbb{Z}_2} Z_1(\Gamma;\mathbb{Z}_2)$ называется *первым числом Бетти* графа Γ.

Упражнение 3.1. Проверьте, что для графа Γ изображенного на Рис. 12 пространство $Z_1(\Gamma;\mathbb{Z}_2)$ состоит в точности из циклов θ_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$, описанных в начале параграфа. Тем самым, получаем $\beta_1(\Gamma) = 3$.

$\beta_1(\Gamma)$ — это и есть то самое количество 1-мерных дырок, которые мы видим в графе.

Упражнение 3.2. Докажите следующую формулу для графа Γ:

$$\beta_1(\Gamma) = (\text{число ребер}) - (\text{число вершин}) + (\text{число компонент связности}).$$

3.2 Введение: первое знакомство с гомологиями

Теперь мы усложним задачу: посмотрим на симплициальный комплекс (см. Рис. 5) и попытаемся сосчитать число 1-мерных дырок в нем. Будем руководствоваться таким пониманием: 1-дырка — это что-то, что можно обхватить замкнутой кривой. Таким образом, дырка — это цикл в 1-мерном остове симплициального комплекса. Но не каждый цикл образует дырку — некоторые циклы у нас теперь затянуты симплексами бо́льших размерностей. Поэтому при подсчете дырок (или гомологий) нам нужно учитывать циклы, но не учитывать те из них, которые являются границами чего-нибудь.

Пример 3.3. На Рис. 13 перечислены все базисные циклы в симплициальном комплексе, вернее, в его одномерном остове. Обратите внимание, что цикл $(1-9-11-1)$ не выписан: он выражается в виде суммы $(1-2-11-1)+(2-9-11-2)+(1-2-9-1)$ перечисленных.

Если K — симплициальный комплекс, то определим пространтсва цепей $C_1(K;\mathbb{Z}_2)$ и циклов $Z_1(K;\mathbb{Z}_2)$ как соответсвующие пространства для его одномерного остова.

Определим понятие *границы* треугольника. Если $I = \{i_0, i_1, i_2\} \in K$ двумерный симплекс в K, то определим его границу как цепь

$$\partial I = \{i_0, i_1\} + \{i_0, i_2\} + \{i_1, i_2\} \in C_1(K;\mathbb{Z}_2)$$

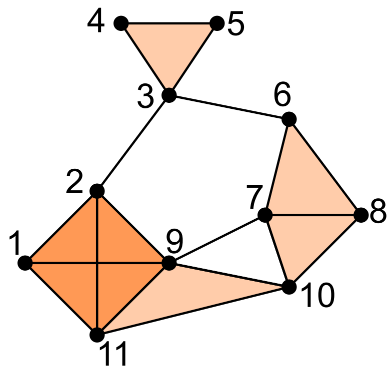

Рис. 13: 1-циклы, 1-границы и 1-гомологии симплциального комплекса

Очевидно, что эта цепь является 1-циклом (во всех смыслах: и в геометрическом и в алгебраическом), $\partial I \in Z_1(K; Z)$. Определим векторное подпространство $B_1(K;\mathbb{Z}_2) \subseteq Z_1(K;\mathbb{Z}_2)$, порожденное элементами ∂I для всех возможных двумерных симплексов $I \in K$, $\dim I = 2$. Пространство $B_1(K;\mathbb{Z}_2)$ называется *пространством* 1-*мерных границ* симплициального комплекса K.

Определение 3.4. Векторным пространством 1-*мерных гомологий* симплициального комплекса K называется фактор-пространство

$$H_1(K;\mathbb{Z}_2) = Z_1(K;\mathbb{Z}_2)/B_1(K;\mathbb{Z}_2).$$

Первым числом Бетти симплициального комплекса K называется $\beta_1(K) = \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(K;\mathbb{Z}_2)$.

Вы можете проверить, что это определение не противоречит тому, что было сказано в прошлом параграфе про графы: у графа Γ двумерных симплексов нет вообще, поэтому $B_1(\Gamma;\mathbb{Z}_2) = 0$, и мы имеем $H_1(\Gamma;\mathbb{Z}_2) = Z_1(\Gamma;\mathbb{Z}_2)$.

Пример 3.5. На Рис. 13 перечислены базисные 1-границы. Граница симплекса $\{1, 9, 11\}$ в списке не указана, потому что она выражается через границы симплексов $\{1, 2, 9\}$, $\{1, 2, 11\}$, $\{2, 9, 11\}$. Получаем, что $\dim Z_1(K;\mathbb{Z}_2) = 9$, $\dim B_1(K;\mathbb{Z}_2) = 7$, и, наконец

$$\beta_1(K) = \dim H_1(K;\mathbb{Z}_2) = \dim Z_1(K;\mathbb{Z}_2) - \dim B_1(K;\mathbb{Z}_2) = 9 - 7 = 2.$$

У комплекса на рисунке две дырки, теперь мы это честно посчитали.

Упражнение 3.6. Найдите $H_1(\partial\Delta^3;\mathbb{Z}_2)$, 1-ые гомологии границы тетраэдра.

Упражнение 3.7. Найдите $H_1(K;\mathbb{Z}_2)$, где K — 2-мерный остов 4-мерного симплекса, то есть симплициальный комплекс на множестве $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, состоящий из всех подмножеств мощности $\leqslant 3$.

Упражнение 3.8. Рассмотрим симплициальный комплекс U_3, множество вершин которого есть множество ненулевых векторов в $\mathbb{Z}_2^3$ (итого 7 вершин), а симплексы натянуты на те и только те наборы вершин, которые линейно независимы. Вычислите (вручную или на компьютере) $\beta_1(U_3;\mathbb{Z}_2)$.

Если вы выполнили эти упражнения, то понимаете, почему нам не стоит ограничиваться только 1-мерными циклами, границами и гомологиями, и почему возникает необходимость в i-мерных аналогах этих понятий. Стоит отметить, что в последних двух параграфах все векторные пространства были над полем $\mathbb{Z}_2$. Для построения теории гомологий это никакой принципиальной роли не играет: гомологии можно строить с коэффициентами в любом поле, а еще лучше — с целыми коэффициентами. Прежде чем переходить к формальному и полному определению симплициальных гомологий, полезно вспомнить кое-что из алгебры.

3.3 Напоминание из алгебры

Пусть R — коммутативное кольце. Нам, по сути, будут интересны 3 случая: кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел, поле $\mathbb{Z}_2$ вычетов $\mod 2$, и поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Кольцо R будет равно одному из этих трех[9].

Определение 3.9. *Модулем* над кольцом R (или R-модулем) называется абелева группа M, снабженная операцией $R \times M \to M$ (результат умножения элемента $r \in R$ на элемент $m \in M$ записывается просто как $r \cdot m \in M$)[10], и удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $\forall r_1, r_2 \in R, \forall m \in M \colon (r_1 r_2) \cdot m = r_1(r_2 \cdot m)$;
2. $1 \cdot m = m$;
3. $\forall r_1, r_2 \in R, \forall m \in M \colon (r_1 + r_2) \cdot m = (r_1 \cdot m) + (r_2 \cdot m)$;
4. $\forall r \in R, \forall m_1, m_2 \in M \colon r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$.

Эти аксиомы такие же как у векторного пространства. Только векторное пространство определено над полем, а теперь мы разрешили вместо поля брать произвольное коммутативное кольцо с единицей.

Упражнение 3.10. Докажите, что если R — поле, то модуль над R — это то же самое, что векторное пространство над полем (на случай, если вы учили какое-нибудь определение векторного пространства, которое не совпадает с тем, что написано выше).

Упражнение 3.11. Докажите, что любая абелева группа A является модулем над кольцом $\mathbb{Z}$. Подсказка: вам нужно построить элемент $ma \in A$ по целому числу $m \in \mathbb{Z}$ и элементу $a \in A$. Подумайте, как это надо сделать, и почему выполнены все нужные свойства.

Пример 3.12. Пусть S — произвольное конечное множество. *Свободным R-модулем на множестве S* называется модуль $R\langle S\rangle$, состоящий из всевозможных выражений

[9] Строго говоря, для того чтобы все написанное ниже было верным, требуется, чтобы R было областью главных идеалов. И $\mathbb{Z}$ и любое поле таковым является.

[10] а иногда и точку мы ставить не будем

вида $\sum_{s \in S} a_s \cdot s$, где $a_s \in R$. Сложение и умножение на элементы алгебры A определяется естественным образом. Мощность $|S|$, называется *рангом*, или *размерностью* свободного модуля $A\langle S \rangle$.

Определение 3.13. Пусть M, N — модули над кольцом R. Отображение $f\colon M \to N$ называется гомоморфизмом R-модулей (или R-гомоморфизмом), если выполнены следующие свойства

1. f является гомоморфизмом абелевых групп;
2. $\forall r \in R, \forall m \in M\colon f(rm) = rf(m)$.

Гомоморфизм модулей — это естественное обобщение понятия линейного отображения векторных пространств. Понятие ядра $\operatorname{Ker} f$ и образа $\operatorname{Im} f$ для R-гомоморфизма f определяются как для абелевых групп. Только нужно понимать, что и $\operatorname{Ker} f$ и $\operatorname{Im} f$ вновь являются R-модулями. Для пары R-модулей $M \subseteq N$ можно определить фактормодуль N/M. Определение как для абелевых групп, только на полученной группе имеется естественная структура R-модуля.

Мы видим, что $\mathbb{Z}$-модули — это просто абелевы группы, а гомоморфизмы — это просто гомоморфизмы абелевых групп. $\mathbb{Q}$-модули и $\mathbb{Z}_2$-модули это просто векторные пространства над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_2$ соответственно, а их гомоморфизмы — это линейные отображения. Слово модуль далее будет использоваться для единообразия изложения: никакой особой науки о модулях нам в ближайшее время не понадобится. Однако про $\mathbb{Z}$-модули, то есть абелевы группы, полезно кое-что вспомнить.

Предложение 3.14. *Любая конечнопорожденная абелева группа A изоморфна группе $F \times T$, где $F \cong \mathbb{Z}^k$ — свободная абелева группа, а $T \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_l}$ — конечная абелева группа*[11]*. Группу T можно определить как подгруппу в A, состоящую из элементов конечного порядка, а группа F изоморфна факторгруппе A/T.*

Определение 3.15. Группа T называется *кручением* в группе A, а k — *рангом* A. Мы будем обозначать ранг как размерность $k = \dim A$ (это не очень правильно, но суть передает).

С векторными пространствами все проще: у векторного пространства есть размерность. Если поле зафиксировано, то любые два векторных пространства одинаковой размерности изоморфны.

3.4 Симплициальные гомологии

Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Будем считать, что на множестве вершин задан естественный порядок: $1 < 2 < \cdots < m$. Фиксируем основное кольцо R — поле или кольцо $\mathbb{Z}$.

[11] Тут можно считать, что все n_i являются степенями простых чисел, согласно китайской теореме об остатках

Определение 3.16. При $j \geqslant 0$ определим группу

$$C_j(K;R) \stackrel{\text{def}}{=} R\langle I \in K \mid \dim I = j\rangle = \Big\{ \sum_{I\in K, \dim I = j} a_I I \mid a_I \in R \Big\}$$

(свободный R-модуль, порожденный множеством симплексов размерности j комплекса K). Этот модуль называется *модулем j-мерных цепей* комплекса K с коэффициентами в R.

Зададим R-гомоморфизм $\partial\colon C_j(K;R) \to C_{j-1}(K;R)$, называемый симплициальным дифференциалом. Поскольку модуль $C_j(K;R)$ свободно порожден элементами $I \in K$, $\dim I = j$, достаточно задать значение дифференциала на этих элементах. Пусть $I = \{i_0, \cdots, i_j\}$, где $i_0 < \cdots < i_j$. Положим

$$\partial I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=0}^{j} (-1)^s \{i_0, \ldots, \widehat{i_s}, \ldots, i_j\} \in C_{j-1}(K;R).$$

Замечание 3.17. Введенное определение дифференциала ∂ согласуется со стандартным обозначением для границы множества. Граница ∂I симплекса I состоит из всех его гиперграней.

Имеем последовательность гомоморфизмов модулей

$$\ldots \xrightarrow{\partial} C_j(K;R) \xrightarrow{\partial} C_{j-1}(K;R) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1(K;R) \xrightarrow{\partial} C_0(K;R) \xrightarrow{\partial} 0. \qquad (3.1)$$

Упражнение 3.18. Докажите, что $\partial\partial I = 0$ для симплекса I любой размерности.

Самое время для следующего общего определения.

Определение 3.19. Последовательность

$$\cdots M_k \xrightarrow{\partial_k} M_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} M_{k-2} \xrightarrow{\partial_k} \cdots \xrightarrow{\partial_1} M_0 \xrightarrow{\partial_0} M_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} \cdots$$

R-модулей и R-гомоморфизмов между ними называется *дифференциальным компле́ксом* (или *комплексом с гомологическим дифференциалом*), если для любого i композиция $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$.

Таким образом модули $C_j(K;R)$ и дифференциалы[12] ∂ образуют дифференциальный комплекс $(C_*(K;R), \partial)$, который называется *дифференциальным комплексом симплициальных цепей комлекса K (с коэффициентами в R).* Если у симплициального комплекса K нет ни одного симплекса размерности j, то полагают $C_j(K;R) = 0$ (такое происходит, если $j > \dim K$ или $j < 0$).

[12]Иногда удобно писать у дифференциала индекс, чтобы понимать, элементы какого модуля он принимает на вход. А можно индекс не писать, чтобы не переусложнять запись. Обычно из контекста понятно, к чему применяется ∂, поэтому мы писать индекс не будем.

Определение 3.20. Модуль j-мерных симплициальных циклов определяется как

$$Z_j(K; R) = \operatorname{Ker}(\partial\colon C_j(K; R) \to C_{j-1}(K; R)).$$

Модуль j-мерных симплициальных границ определяется как

$$B_j(K; R) = \operatorname{Im}(\partial\colon C_{j+1}(K; R) \to C_j(K; R)).$$

Упражнение 3.21. Проверьте, что это общее определение согласуется с определением групп $Z_1(K; \mathbb{Z}_2)$ и $B_1(K; \mathbb{Z}_2)$, приведенным в предыдущих параграфах.

Из упражнения 3.18 следует, что любая j-мерная граница является j-мерным циклом, то есть имеется цепочка включений R-модулей.

$$B_j(K; R) \subseteq Z_j(K; R) \subseteq C_j(K; R).$$

Определение 3.22. Модулем j-мерных симплициальных гомологий (с коэффициентами в R) называется фактор-модуль

$$H_j(K; R) \stackrel{\text{def}}{=} Z_j(K; R)/B_j(K; R).$$

Число $\beta_j(K) = \dim_R H_j(K; R)$ называется j-м числом Бетти комплекса K.

Говоря совсем формально, числа Бетти зависят не только от K, но и от кольца коэффициентов, но эту зависимость в обозначении опускают.

Упражнение 3.23. Найдите $H_2(\partial\Delta^3; \mathbb{Z}_2)$, $H_2(\partial\Delta^3; \mathbb{Z})$ и $H_2(\partial\Delta^3; \mathbb{Q})$. Опишите 2-мерные гомологии границы октаэдра.

Упражнение 3.24. Опишите модули 2-мерных гомологий 2-мерных симплициальных комплексов из упражнений 3.7 и 3.8 (с коэффициентами в вашем любимом кольце R).

Упражнение 3.25. Докажите, что $H_0(K; R) \cong R^c$, где c — число компонент связности симплициального комплекса K. В частности, $\beta_0(R)$

Упражнение 3.26. Вычислите все гомологии и числа Бетти с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ для симплициального комплекса K, изображенного на Рис. 14. То, что на рисунке дублируются точки 1, 2 и 3 — это не ошибка. Имеется в виду, что эти точки в комплексе отождествлены (то есть это в самом деле одна точка).

Двумерный диск, у которого отождествлены противоположные точки на границе, называется двумерной проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2$. В проективной геометрии 2-мерной проективной плоскостью называется множество прямых, проходящих через начало координат. Каждая такая прямая пересекает единичную сферу в двух диаметрально противоположных точках. Поэтому можно понимать $\mathbb{R}P^2$ как двумерную сферу, у которой каждую точку приклеили к противоположной. Если выкинуть из рассмотрения открытую полусферу, как раз и получается 2-мерный диск, у которого отождествлены противоположные точки на границе. Если взять любую достаточно мелкую центрально симметричную триангуляцию двумерной сферы и отождествить в ней противоположные точки, то получится триангуляция $\mathbb{R}P^2$. Триангуляция, изображенная на Рис. 14 есть не что иное как половинка от границы икосаэдра.

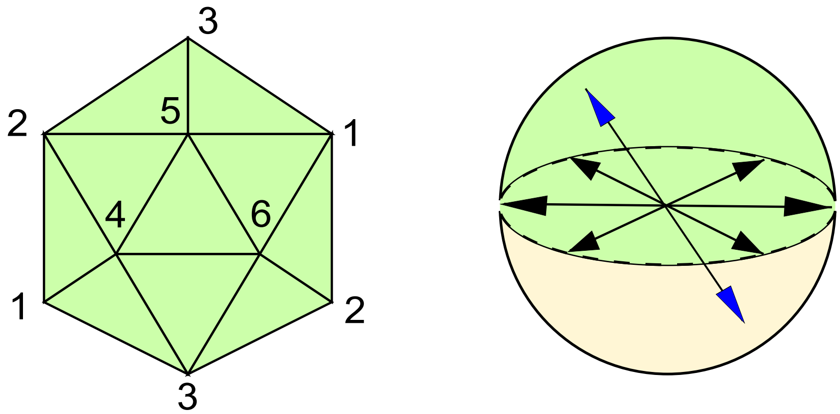

Рис. 14: Триангуляция проективной плоскости и сама проективная плоскость

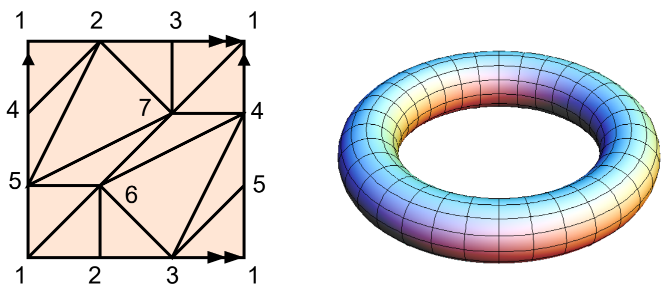

Рис. 15: Триангуляция тора и сам тор

Упражнение 3.27. Вычислите все гомологии и числа Бетти с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ у минимальной триангуляции 2-мерного тора, показанной на Рис. 15.

Упражнение 3.28. Пусть K — симплициальный комплекс, а $K^{(s)}$ — его s-мерный остов. Докажите, что $H_i(K;R) \cong H_i(K^{(s)};R)$ при $i < s$.

Определение 3.29. Пусть f_j обозначает количество j-мерных симплексов комплекса K, а n — его размерность. Массив чисел $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ называется *f-вектором* симплициального комплекса.

Из определения мы имеем $f_j = \dim_R C_j(K;R)$.

Упражнение 3.30. Пусть $k_j = \dim_R \operatorname{Ker}(\partial\colon C_j(K;R) \to C_{j-1}(K;R))$. Допустим, для симплициального комплекса K известны f-числа f_j и числа k_j. Выразите через эти данные размерности образов $\operatorname{Im}(\partial\colon C_j(K;R) \to C_{j-1}(K;R))$ и числа Бетти β_j комплекса K.

Если вы сделали это упражнение, то следующее будет простым:

Упражнение 3.31. Докажите, что при $n = \dim K$, числа Бетти и f-числа комплекса K связаны соотношением

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \dots + (-1)^n f_n = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 + \dots + (-1)^n \beta_n$$

Определение 3.32. Число $\chi(K) = f_0 - f_1 + \cdots + (-1)^n f_n$ называется *эйлеровой характеристикой* симплициального комплекса K.

Упражнение 3.33. Докажите, что эйлерова характеристика удовлетворяет формуле включения-исключения

$$\chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L).$$

3.5 Инвариантность гомологий

Сформулируем (пока без доказательства) теоремы, подчеркивающие важность гомологий.

Теорема 3.34. *Модули симплициальных гомологий и числа Бетти являются топологическим инвариантом, т.е. не зависят от триангуляции пространства. Иными словами, если K_1, K_2 — такие симплициальные комплексы, что $|K_1| \cong |K_2|$, то $H_j(K_1; R) \cong H_j(K_2; R)$ при всех j и R.*

Теорема 3.35. *Модули симплициальных гомологий и числа Бетти являются гомотопическим инвариантом. Иными словами, если K_1, K_2 — такие симплициальные комплексы, что $|K_1| \simeq |K_2|$, то $H_j(K_1; R) \cong H_j(K_2; R)$ при всех j и R.*

Замечание 3.36. Поскольку из гомеоморфизма следует гомотопическая эквивалентность, понятное дело, что вторая теорема полностью покрывает первую. Однако, для начала полезно понять, откуда берется первая теорема. Метод доказательства такой: для произвольного топологического пространств X вводится понятие *сингулярных гомологий* $H_j(X; R)$, которое никак не зависит от триангуляции (см. подраздел 3.9). Далее показывается, что для любой триангуляции K пространства X симплициальные гомологии $H_j(K; R)$ изоморфны сингулярным гомологиям $H_j(X; R)$, откуда все и следует. Вторая теорема, в свою очередь, тоже формулируется и доказывается для сингулярных гомологий.

Упражнение 3.37. Найдите гомологии n-мерного диска.

Из упражнения 3.31 следует, что эйлерова характеристика $\chi(K)$ выражается через числа Бетти. А раз числа Бетти являются гомотопическим инвариантом, значит

Следствие 3.38. *Эйлерова характеристика симплициального комплекса является инвариантом как гомеоморфизма, так и гомотопической эквивалентности.*

Следствие 3.39 (Формула Эйлера)**.** *Для любой триангуляции 2-мерной сферы число $f_0 - f_1 + f_2$ одно и то же. Посчитав это число для границы тетраэдра, легко убедиться, что оно равно 2.*

Следствие 3.40. *Вычислите эйлерову характеристику для всех симплициальных комплексов и всех триангулируемых топологических пространств, изображенных на картинках до этого момента.*

Упражнение 3.41. Найдите эйлерову характеристику n-мерной сферы. (Замечание: нужно выбрать какую-нибудь простую триангуляцию n-мерной сферы, посчитать ее f-вектор, и вычислить его знакопеременную сумму. Самое простое и естественное — взять в качестве триангуляции границу $(n+1)$-мерного симплекса.)

Упражнение 3.42. Найдите все числа Бетти k-мерного остова n-мерного симплекса. (Подсказка: а вы точно сделали упражнение 3.28?).

Упражнение 3.43. Найдите гомологии n-мерной сферы.

3.6 Приведенные гомологии

Определение 3.44. Определим *гомоморфизм аугментации* $\varepsilon\colon C_0(K;R) \to R$ формулой $\varepsilon\colon \sum_{i\in[m]} a_i\{i\} \mapsto \sum_{i\in[m]} a_i$. Рассмотрим *аугментированный* комплекс симплициальных цепей:

$$\ldots \xrightarrow{\partial} C_j(K;R) \xrightarrow{\partial} C_{j-1}(K;R) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1(K;R) \xrightarrow{\partial} C_0(K;R) \xrightarrow{\varepsilon} R \xrightarrow{\partial} 0. \qquad (3.2)$$

Удобно формально положить $C_{-1}(K;R) = R$ и считать гомоморфизм аугментации еще одним дифференциалом: из $C_0(K;R)$ в $C_{-1}(K;R)$. Это имеет некоторый смысл, если мы вспомним, что формально в симплициальном комплексе имеется пустой симплекс $\varnothing$ размерности -1. Цепи, порожденные этим симплексом, как раз и дают добавочный член $C_{-1}(K;R)$.

Определение 3.45. Гомологии аугментированного комплекса (3.2) называются приведенными симплициальными гомологиями комплекса K:

$$\widetilde{H}_j(K;R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{Ker}(\partial\colon C_j(K;R) \to C_{j-1}(K;R))}{\operatorname{Im}(\partial\colon C_{j+1}(K;R) \to C_j(K;R))},$$

где на этот раз j может принимать значение -1.

Заметим, что по определению $H_j(K;R) \cong \widetilde{H}_j(K;R)$ при $j \geqslant 1$, а ранг $\widetilde{H}_0(K;R)$ на единицу меньше ранга $H_0(K;R)$ для любого непустого комплекса K. В частности, $\widetilde{H}_0(K;R) = 0$, если $|K|$ — связное пространство.

Замечание 3.46. Если K — пустой, либо все вершины K призрачны, то все, написанное выше, также имеет смысл. В этом (и только этом) случае имеем $\widetilde{H}_{-1}(K;R) \cong R$. А остальные гомологии пустого множества — нулевые!

Замечание 3.47. На самом деле, именно приведенные гомологии считают количество дырок в топологическом пространстве. Для j-мерных гомологий при $j \geqslant 1$ разницы между обычными и приведенными гомологиями нет никакой. Зато в размерности 0 приведенные гомологии позволяют исправить некоторую неувязку. Согласно упражнению 3.25, число $\beta_0(K) = \dim H_0(K;R)$ равно числу c компонент связности комплекса K. Значит, $\dim \widetilde{H}_0(K) = c - 1$. Это весьма естественно: если компонент связности c штук, то вот дырок между ними должно быть как раз $c - 1$.

3.7 Замена коэффициентов

Если вы добили упражнение 3.26, то знаете, что числа Бетти комплекса K, посчитанные с разными коэффициентами R, могут различаться. Однако, в некотором смысле, наиболее информативны гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$: из них можно извлечь $H_*(K;R)$ для любого R. Об этом нам говорит следующая

Теорема 3.48 (Теорема об универсальных коэффициентах)**.** *Для симплициального комплекса K и кольца R имеет место изоморфизм*

$$H_j(K;R) \cong (H_j(K;\mathbb{Z}) \otimes R) \oplus \mathrm{Tor}_1(H_{j-1}(K;\mathbb{Z}), R).$$

Два замечания. Во-первых, теорема сформулирована не в самом общем виде. Во-вторых, в теореме возникли некие непонятные $\otimes$ и Tor_1. $M \otimes N$ — это тензорное произведение двух абелевых групп, а $\mathrm{Tor}_1(M,N)$ — его первый производный функтор. Строгие определения этих штук можно найти как в книгах по гомологической алгебре, так и в любой начальной книге по алгебраической топологии, например [12]. Я же здесь просто ограничусь рецептом, позволяющим эти штуки вычислять.

Конструкция 3.49. Первое правило: обе операции $\otimes$ и Tor_1 “биаддитивны” (категорный аналог билинейности):

$$(M_1 \oplus M_2) \otimes N \cong (M_1 \otimes N) \oplus (M_2 \otimes N), \qquad \mathrm{Tor}_1(M_1 \oplus M_2, N) \cong \mathrm{Tor}_1(M_1, N) \oplus \mathrm{Tor}_1(M_2, N),$$

и аналогично по второму аргументу. Далее, обе операции симметричны:

$$M \otimes N \cong N \otimes M, \qquad \mathrm{Tor}_1(M,N) \cong \mathrm{Tor}_1(N,M).$$

В качестве абелевых групп, к которым мы будем применять эти операции, у нас бывают только $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{p^k}$ (где p — простое число), их прямые суммы, а также прямые суммы нескольких экземпляров $\mathbb{Q}$. Поэтому для вычислений нам достаточно описать действие операций $\otimes$ и Tor_1 на группы из списка $\{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{p^k}, \mathbb{Q}\}$. Ответ приведен в таблицах 1 и 2.

$\otimes$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}_{p^k}$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}_{p^k}$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	0
$\mathbb{Z}_{q^l}$	$\mathbb{Z}_{q^l}$	0	$\begin{cases} 0, & \text{если } p \neq q \\ \mathbb{Z}_{p^{\min(k,l)}}, & \text{если } p = q. \end{cases}$

Таблица 1: Таблица тензорного умножения для распространенных абелевых групп

Упражнение 3.50. Найдите $\mathbb{Q}^k \otimes \mathbb{Q}^m$ и $\mathbb{Z}_p^k \otimes \mathbb{Z}_p^m$, где p — простое число.

Tor_1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}_{p^k}$
$\mathbb{Z}$	0	0	0
$\mathbb{Q}$	0	0	0
$\mathbb{Z}_{q^l}$	0	0	$\begin{cases} 0, & \text{если } p \neq q \\ 0, & \text{если } p = q, k \neq l \\ \mathbb{Z}_{p^k}, & \text{если } p = q, k = l. \end{cases}$

Таблица 2: Таблица Tor_1-функторов для распространенных абелевых групп

Замечание 3.51. Комментарий для искушенных в гомологической алгебре. Может возникнуть вопрос, почему Tor_1 есть, а "торов" с другими индексами нет. На самом деле, они есть. $\mathrm{Tor}_0(M, N)$ это и есть тензорное произведение $M \otimes N$. А $\mathrm{Tor}_s(M, N)$ — это s-ый производный функтор от тензорного произведения. К счастью, тензорные произведения у нас берутся над кольцом $\mathbb{Z}$ (строго говоря, надо было бы писать $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$), а $\mathbb{Z}$ — это область главных идеалов. У любого конечнопорожденного модуля над областью главных идеалов[13] существует свободная резольвента длины 1. Значит модули $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M, N)$ зануляются при $i > 1$.

Упражнение 3.52. Если вы знаете строгое определение тензорного произведения и Tor-функтора, докажите упомянутые свойства биаддитивности, симметричности, и обоснуйте результаты таблиц 1 и 2.

Пример 3.53. Пусть $A = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_2$. Вычислим $A \otimes \mathbb{Q}$ и $A \otimes \mathbb{Z}_2$. Вначале приведем A к виду, в котором можно применять свойства описанные выше, а именно, воспользуемся Китайской теоремой об остатках: $\mathbb{Z}_{20} \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$. Для тензорного произведения с $\mathbb{Q}$ имеем

$$\begin{aligned} A \otimes \mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{Q} \cong \\ (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}) \oplus (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}) \oplus (\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Q}) \oplus (\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Q}) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Q}) \cong \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \cong \mathbb{Q}^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Видно, что операция "потензорить с $\mathbb{Q}$" убивает все кручение, а свободный $\mathbb{Z}$-модуль превращает в векторное пространство над $\mathbb{Q}$ той же размерности.

Для тензорного произведения с $\mathbb{Z}_2$ имеем

$$\begin{aligned} A \otimes \mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \\ (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus (\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus (\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2) \cong \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus 0 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2^4. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Видно, что операция "потензорить с $\mathbb{Z}_2$" превращает как $\mathbb{Z}$, так и каждую компоненту $\mathbb{Z}_{2^k}$ 2-кручения в компоненту $\mathbb{Z}_2$.

[13]Это знаменитая структурная теорема о конечнопорожденных модулях над областью главных идеалов, из которой выводится классификация конечнопорожденных абелевых групп и теорема о ЖНФ.

Теперь вычислим $\mathrm{Tor}_1(A, \mathbb{Z}_2)$ и $\mathrm{Tor}_1(A, \mathbb{Q})$. Имеем

$$\mathrm{Tor}_1(A; \mathbb{Q}) \cong \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2; \mathbb{Q}) = 0.$$

Когда один из аргументов Tor_1 есть $\mathbb{Q}$, получаем на выходе ноль. Случай с $\mathbb{Z}_2$ интереснее:

$$\mathrm{Tor}_1(A; \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2) \cong 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Выжила только компонента $\mathbb{Z}_2$ — что видно из Табл. 2. Обозначение Tor_1 происходит от слова torsion, кручение, в точности потому что Tor_1 позволяет выделить из группы кручение строго определенного порядка.

Упражнение 3.54. Допустим, вы решили упражнение 3.26 с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, и у вас получился такой ответ $H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$, $H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = 0$ (а он должен был получиться именно таким). Вычислите по теореме об универсальных коэффициентах $H_i(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Q})$ и $H_i(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$.

Упражнение 3.55. Допустим, для некоторого симплициального комплекса K группы гомологий над $\mathbb{Z}$ получились как показано в таблице

i	0	1	2	3
$H_i(K; \mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2$

(а все остальные гомологии — нулевые). Вычислите все ненулевые гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ и в $\mathbb{Z}_2$. Может ли такой комплекс K быть трехмерным? Какое объяснение (помимо теоремы об универсальных коэффициентов) вы бы предложили?

Упражнение 3.56. Допустим, для симплициального комплекса K известны числа Бетти, посчитанные для полей коэффициентов $R = \mathbb{Q}$ и $R = \mathbb{Z}_p$, где p пробегает все возможные простые числа. Можно ли по этой информации восстановить $H_*(K; \mathbb{Z})$?

3.8 Операции с топологическими пространствами и эффект на гомологиях

Пусть $X \times Y$ — обозначает декартово произведение пространств. Заметим, что произведение двух симплициальных комплексов автоматически не является симплициальным комплексом (например, отрезок — это симплекс, а произведение двух отрезков — квадрат, а не треугольник). Однако, произведение симплициальных комплексов можно триангулировать, и все-таки превратить в симплициальный комплекс.

Допустим, в X и Y выделены точки $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$. Букетом называется топологическое пространство

$$X \vee Y = (X \times y_0) \cup (x_0 \times Y) \subset X \times Y.$$

Можно понимать букет как взятие несвязного объединения $X \sqcup Y$ двух пространств, а затем склеивание точек $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ см. Рис. 16. Операции надстройки и джойна были определены ранее.

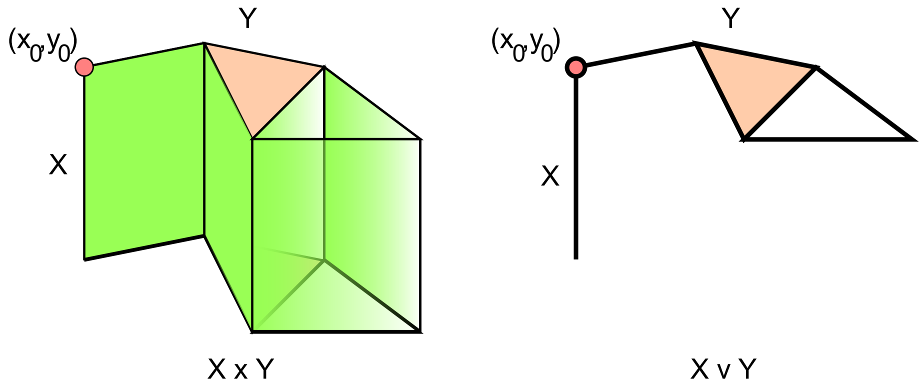

Рис. 16: Произведение и букет

Читателем предлагается подумать над следующими упражнениями (взяв в качестве произвольных пространств симплициальные комплексы), либо найти их строгие доказательства.

Упражнение 3.57. Докажите, что для любого i выполнено $H_i(X \sqcup Y) \cong H_i(X) \oplus H_i(Y)$.

Упражнение 3.58. Докажите, что для любого i выполнено $\widetilde{H}_i(X \vee Y) \cong \widetilde{H}_i(X) \oplus \widetilde{H}_i(Y)$.

Упражнение 3.59. (Изоморфизм надстройки) Для любого i выполнено

$$\widetilde{H}_{i+1}(\Sigma X; R) \cong \widetilde{H}_i(X; R).$$

Следующее утверждение для упражнения тяжеловато, но на практике весьма полезно.

Теорема 3.60 (Топологическая формула Кюннета)**.** *Если R — поле, то имеются изоморфизмы*

$$H_j(X \times Y; R) \cong \sum\nolimits_{k+s=j} H_j(X; R) \otimes H_s(Y; R)$$

В случае $R = \mathbb{Z}$ имеем

$$H_j(X; R) \cong \left(\sum_{k+s=j} H_k(X; R) \otimes H_s(Y; R) \right) \oplus \left(\sum_{k+s=j-1} \mathrm{Tor}_1(H_k(X; R), H_s(Y; R)) \right).$$

Упражнение 3.61. Помня, что двумерный тор T^2 есть произведение двух окружностей: $T^2 \cong S^1 \times S^1$, найдите его гомологии. Сравните с упражнением 3.27.

Упражнение 3.62. Найдите гомологии n-мерного тора $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

Упражнение 3.63. Докажите, что пространства $S^2 \vee S^1 \vee S^1$ и T^2 имеют изоморфные гомологии. (*) Докажите, что эти пространства не гомотопически эквивалентны[14]

[14] Тут, очевидно, нужен какой-то другой инвариант гомотопической эквивалентности, а у нас ничего кроме гомологий в этом тексте нет. Попробуйте самостоятельно разобраться с фундаментальной группой.

Упражнение 3.64. Найдите $H_i(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2; \mathbb{Z})$.

Упражнение 3.65. Для произвольной финитной последовательности натуральных чисел $b_0, b_1, \ldots, b_n, 0, 0, \ldots$ придумайте симплициальный комплекс K, такой что $\beta_j(K) = b_j$ для всех j.

Упражнение 3.66. Докажите "теорему Фубини" для эйлеровой характеристики:

$$\chi(K \times L) = \chi(K) \times \chi(L)$$

Замечание 3.67. Предыдущее упражнение вместе с упражнением 3.33 позволяют воспринимать эйлерову характеристику как некую меру на (хороших) топологических пространствах. А для чего человечеству нужна мера? Что определять интегралы Лебега! Да, по эйлеровой характеристике можно интегрировать — это довольно модное направление в теоретической математике.

А в прикладной топологии люди пытались приспособить интегрирование по эйлеровой характеристике для подсчета числа машин на автостоянке [3].

3.9 Сингулярные гомологии

Настало время объяснить, как определить гомологии топологического пространства, чтобы способ определения не зависел от триангуляции. Идея тут такая: мы, в некотором смысле, рассматриваем все возможные способы триангулировать пространство одновременно.

Конструкция 3.68. Пусть X — топологическое пространство. Сингулярным[15] j-мерным симплексом в X называется непрерывное отображение $\sigma\colon \triangle^j \to X$, где $\triangle^j$ — j-мерный симплекс. Рассмотрим $C_j(X; R)$ — свободный R-модуль, порожденный всеми j-мерными сингулярными симплексами пространства X. Пусть $\triangle^j$ имеет вершины $p_0, \ldots, p_j$. Введем сингулярный дифференциал $\partial\colon C_j(X; R) \to C_{j-1}(X; R)$, действующий на образующей (т.е. на сингулярном симплексе σ) как

$$\partial\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=0}^{j} (-1)^s \sigma|_{\{p_0, \ldots, \widehat{p_s}, \ldots, p_j\}},$$

где $\sigma|_{\{p_0, \ldots, \widehat{p_s}, \ldots, p_j\}}$ — ограничение отображения σ на гипергрань симплекса $\triangle^j$, не содержащую вершину p_s (т.е. по определению $\sigma|_{\{p_0, \ldots, \widehat{p_s}, \ldots, p_j\}}$ есть $(j-1)$-мерный сингулярный симплекс, а значит лежит в группе $C_{j-1}(X; R)$). Имеем последовательность R-гомоморфизмов

$$\ldots \xrightarrow{\partial} C_j(X; R) \xrightarrow{\partial} C_{j-1}(X; R) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1(X; R) \xrightarrow{\partial} C_0(X; R) \xrightarrow{\partial} 0, \qquad (3.5)$$

[15] Часть симплекса при отображении может схлопнуться в точку, например. Образ отображения может быть весьма не похож на симплекс, потому их и называют сингулярными.

где, как легко проверить, $\partial \circ \partial = 0$, т.е. имеем дифференциальный комплекс. Группой j-х (сингулярных) гомологий пространства X (с коэффициентами в R) называется R-модуль

$$H_j(X;R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{Ker}(\partial\colon C_j(X;R) \to C_{j-1}(X;R))}{\operatorname{Im}(\partial\colon C_{j+1}(X;R) \to C_j(X;R))}.$$

Как и ранее, можно определить гомоморфизм аугментации $\varepsilon\colon C_0(X;R) \to R$, отображающий каждый 0-мерный сингулярный симплекс (т.е. попросту точку пространства X) в $1 \in R$. Приведенные сингулярные гомологии $\widetilde{H}_j(X;R)$ определяются как гомологии аугментированного дифференциального комплекса сингулярных цепей (полностью аналогично приведенным симплициальным гомологиям).

Упражнение 3.69. Докажите по определению (т.е. не пользуясь теоремой ниже), что $H_0(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ в том и только том случае, когда X линейно связно.

Теорема 3.70. *Если K — триангуляция пространства X, то симплициальные гомологии $H_j(K;R)$ изоморфны сингулярным $H_j(X;R)$.*

Сингулярные гомологии совпадают с симплициальными гомологиями для тех пространств, на которых оба понятия определены. Возникает вопрос: зачем тогда нужны симплициальные гомологии, ведь они неинвариантно определяются? Математику-теоретику они, действительно, (почти) не нужны. Однако, если хочется что-то посчитать на компьютере, сингулярные гомологии не подходят: модули $C_j(X;\mathbb{Q})$ — это безумные континуальномерные векторные пространства, их никак в компьютер не запихнешь. А в случае симплициальных гомологий все сводится к вычислению рангов конечных матриц (см. упражнение 3.30), а потому имеет относительно приемлемую сложность k^3 от размера k входных данных.

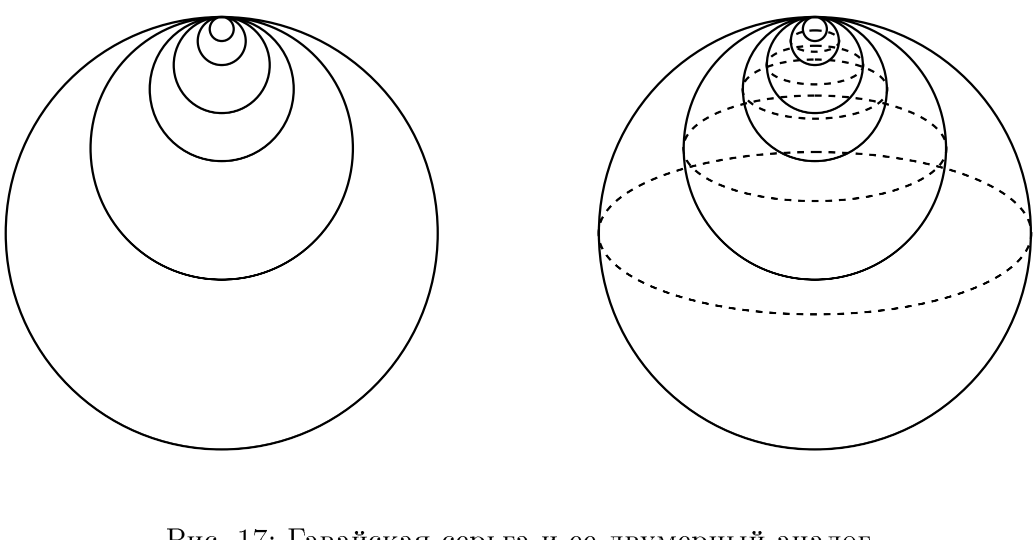

Рис. 17: Гавайская серьга и ее двумерный аналог

Замечание 3.71. Существуют парадоксальные примеры, демонстрирующие нетривиальность сингулярных гомологий для нетриангулируемых пространств. Рассмотрим пространство X — букет счетного числа 2-сфер, радиусы которых стремятся к нулю, см. Рис. 17 (если вместо 2-сфер использовать окружности, то такое топологическое пространство называется гавайской серьгой). Хотя как будто X — двумерное пространство (все определения топологической размерности в этом единогласны), теорема Баррата–Милнора гласит, что $H_3(X;\mathbb{Q}) \neq 0$, см. [2]. Гомологии $H_i(X;\mathbb{Q})$ при $i > 3$ у этого пространства тоже нетривиальные.

3.10 Полезные двойственности, вкратце

Напомним, что n-мерное топологическое многообразие — это топологическое пространство, у каждой точки которого существует окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$. Компактное n-мерное многообразие называется ориентируемым[16], если $H_n(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (в противном случае, для компактных многообразий выполнено $H_n(X;\mathbb{Z}) = 0$)

Теорема 3.72 (Двойственность Пуанкаре)**.** *Если X — компактное n-мерное топологическое многообразие, то для чисел Бетти с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ выполнено $\beta_i(X) = \beta_{b-i}(X)$. Если это многообразие ориентируемо, то $\beta_i(X) = \beta_{b-i}(X)$ для любых коэффициентов, включая $\mathbb{Z}$.*

Упражнение 3.73. Проверьте это утверждение для многообразий T^n, S^n, $\mathbb{R}P^2$, которые у нас встречались ранее.

Теорема 3.74 (Двойственность Александера)**.** *Пусть $X \subset S^n$ подпространство*[17]*. Тогда* $\dim \widetilde{H}_i(X) \cong \dim \widetilde{H}_{n-1-i}(S^n \backslash X)$.

3.11 Гомологические многообразия и гомологические сферы

Упражнение 3.75. Пусть $I \in K$ и $J \in \mathrm{link}_K I$. Докажите, что комплекс $\mathrm{link}_{\mathrm{link}_K I} J$ изоморфен комплексу $\mathrm{link}_K(I \sqcup J)$ (линк линка — это снова линк в исходном комплексе).

Как было упомянуто выше, вообще говоря невозможно определить, гомеоморфен ли заданный симплициальный комплекс сфере. Аналогично, невозможно узнать, является ли заданный симплициальный комплекс топологическим многообразием. Однако, с помощью гомологий можно определить понятия гомологической n-сферы, и гомологического n-многообразия, которые алгоритмически распознаваемы.

Определение 3.76. Чистый симплициальный комплекс K называется (триангулируемым) гомологическим n-многообразием (над кольцом R), если для любого непустого симплекса $I \in K$, $I \neq \varnothing$ комплекс $\mathrm{link}_K I$ имеет такие же гомологии (с коэффициентами в R), как $(n - |I|)$-мерная сфера.

[16] Это не определение, а свойство, на самом деле. Но оно довольно удобное.

[17] Достаточно хорошее и достаточно хорошо вложенное. Например, симплициальный подкомплекс в некоторой триангуляции сферы точно сгодится.

Определение 3.77. Гомологическое n-многообразие называется гомологической n-сферой (над кольцом R), если сам комплекс K имеет такие же гомологии (с коэффициентами в R), как n-мерная сфера.

Упражнение 3.78. Докажите, что линк любого непустого симплекса в гомологическом многообразии — это гомологическая сфера.

Замечание 3.79. Вспомним замечание 2.32: если заселить симплициальный комплекс K разумными существами, то существо, находящееся внутри симплекса $I \in K$ видит горизонт формы

$$\partial I * \operatorname{link}_K I \cong \Sigma^{|I|-1} \operatorname{link}_K I$$

(см. конструкцию кратной надстройки 2.25). Согласно изоморфизму надстройки (упражнение 3.59), если $\operatorname{link}_K I$ имеет гомологии как у $(n-|I|)$-мерной сферы, то $\Sigma^{|I|-1} \operatorname{link}_K I$ имеет гомологии как у $(n-1)$-мерной сферы. Это соображение объясняет, почему определение гомологического многообразия согласуется со здравым смыслом.

Действительно, многообразие — это что-то, похожее на евклидово пространство в окрестности каждой своей точки. Существу, живущему на многообразии, кажется, что его окружает n-мерное евклидово пространство, а значит он видит горизонт в виде $(n-1)$-мерной сферы. Для мореплавателя, находящегося посередине океана, линия горизонта представляет из себя окружность[18]. Для космонавта, летающего в открытом космосе, "горизонт" представляет из себя двумерную сферу (то, что в астрономии называется сферой неподвижных звезд). И так далее. Поскольку проверять комплекс на гомеоморфизм мы не умеем, а вычислять гомологии умеем, мы получили удобную замену для понятия топологического многообразия — гомологическое многообразие. Принадлежность комплекса к классу гомологических многообразий можно проверить алгоритмически.

Если немного формализовать замечание 3.79, то получим (см. подробности в [1])

Предложение 3.80. *Триангулируемое компактное топологическое многообразие является гомологическим многообразием.*

Для триангулируемых гомологических многообразий выполнена двойственность Пуанкаре (Теорема 3.72). А еще для описания f-векторов гомологических сфер и многообразий есть интересная теория (этому посвящен мой конспект [1]).

3.12 Что дальше?

Дальше, если вы хотите углубиться в гомологии в частности и в топологию вообще, вам надо изучить понятие точной последовательности, понятие гомотопии цепных комплексов, лемму о пяти изоморфизмах, в общем, все то, что превращает начальный этап изучения топологии в краткий курс гомологической алгебры. Тут я пытался всего

[18]Если бы Земной шар был Земным бубликом, то ситуация бы не поменялась. А вот если бы земля представляла из себя двумерный диск, то на точках края горизонт представлял бы из себя лишь половину окружности, то есть отрезок. Другой половины не было бы, там же пропасть.

этого избежать, ограничившись окологеометрическим рукомахательством, поэтому некоторые теоремы (теорема об универсальных коэффициентах, формула Кюннета) сформулированы не по канону.

Далее вам нужно разобраться с понятием относительных гомологий $H_j(X, A; R)$, где $A \subseteq X$, и связанное с ним понятие точной последовательности гомологий пары и точной последовательности Майера–Вьеториса. Надо разобраться с функториальностью гомологий и разобрать доказательство теоремы о гомотопической инвариантности гомологий. Затем — доказательство изоморфизма надстройки для сингулярных гомологий и вычислением сингулярных гомологий сферы. Далее, понятие клеточного комплекса и клеточных гомологий, которые обобщают симплициальные гомологии. Проще доказать более общую теорему об изоморфизме сингулярных и клеточных гомологий клеточного комплекса, а утверждение о симплициальных гомологиях из нее получается автоматически.

Наконец, полезно разобраться с двойственным понятием когомологий. Но тут хорошая новость: все утверждения для когомологий (почти) аналогичны соответсвующим утверждениям для гомологий. Только когомологии не просто образуют последовательность R-модулей, а еще и имеют структуру градуированной R-алгебры.

А еще в какой-то момент придется узнать, что такое топология прямого предела, и что на самом деле интересные топологические пространства — это не только подмножества в $\mathbb{R}^n$.

4 Нервы покрытий

5 Устойчивые гомологии

6 Когомологии пучков и гомологии копучков

Список литературы

[1] А. А. Айзенберг, *Комбинаторика, топология и алгебра симплициальных комплексов*, конспект курса НОЦ МИАН.

[2] M. G. Barratt and John Milnor, *An Example of Anomalous Singular Homology*, Proceedings of the American Mathematical Society 13:2 (1962), 293–297.

[3] Y.Baryshnikov, R.Ghrist *Target enumeration via Euler characteristic integrals*, SIAM J. Appl. Math., 70(3), 825–844, 2009. (link)

[4] J. Michael Boardman, *Some common Tor and Ext groups*, http://math.jhu.edu/ jmb/note/torext.pdf

[5] И. А. Володин, В. Е. Кузнецов, А. Т. Фоменко, *О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трехмерной сферы*, УМН, 29:5(179) (1974), 71–168.

[6] О.Я.Виро, О.А.Иванов, Н.Ю.Нецветаев, В.М.Харламов, Элементарная топология, МЦНМО, 2010.

[7] Lou van den Dries, Tame topology and O-minimal structures, London Mathematical Society lecture notes 248.

[8] С. Маклейн, *Гомология*, 1966.

[9] C. Manolescu, *Lectures on the Triangulation Conjecture*, arXiv:1607.08163.

[10] C.P.Rourke, B.J.Sanderson, *Introduction to piecewise-linear topology*, 1972.

[11] А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс, *Курс гомотопической топологии.*

[12] А.Хатчер, *Алгебраическая топология.*