Рост графов и групп.

Р. И. Григорчук.

1. $\boxed{\text{Рост функций.}}$

$\log x$ – логарифмическая

x^d, $d>0$ – степенная

$\begin{cases} a^x, & a>1 \\ e^x, & 2^x \end{cases}$ – экспоненциальная.

e^{x^α}, $0<\alpha<1$ – пример функции субэкспоненциального типа.

$f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – вещественный аргумент

$f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ – натуральный аргумент.

2. Дилатационное сравнение функций.

Пишем $\boxed{f(n) \prec g(n)}$ если существует $C \in \mathbb{N}$ т.ч.

$$\boxed{f(n) \leq C g(Cn) + C} \quad (1).$$

Если $f(n) \prec g(n)$ и $g(n) \prec f(n)$

то $\boxed{f(n) \sim g(n)}$ - эквивалентность.

$[f(n)]$ - класс эквивалентности.

Примеры.

(a) $P_d(n) \sim n^d$

полином степени $d \geq 1$.

(б) $a^n \sim b^n$ для любых $a, b > 1$.

$\sim e^n \sim 2^n$

(в) $e^{n^\alpha} \not\sim e^{n^\beta}$ если $\alpha \neq \beta$, $\cancel{\boxed{\alpha, \beta > 0.}}$

Для группового случая (1) можно ослабить до

$$\boxed{f(n) \le C g(Cn)} \qquad (2)$$

и даже до

$$\boxed{f(n) \le g(Cn)} \qquad (3)$$

Упражнение. Докажите, что если $f(n) \sim f^d(n)$ для некоторого $d \geq 2$ и $f(n) > 1$ начиная с некоторого n_0, то существует $\alpha > 0$ такое, что $f(n) > e^{n^\alpha}$.

---

③ Рост графов.

$\Gamma = (V, E)$ – граф

вершины ребра.

Условия:

(i) бесконечный, связный, неориентированный

(ii) петли и кратные ребра разрешаются.

(iii) валентности всех вершин ограничены некоторой константой.

Валентность (степень)

$\deg(v)$ = число ребер инцидентных вершине $v \in V$

$$\deg(v) \le C, \quad \forall v \in V.$$

Граф Γ называется <u>регулярным</u> если

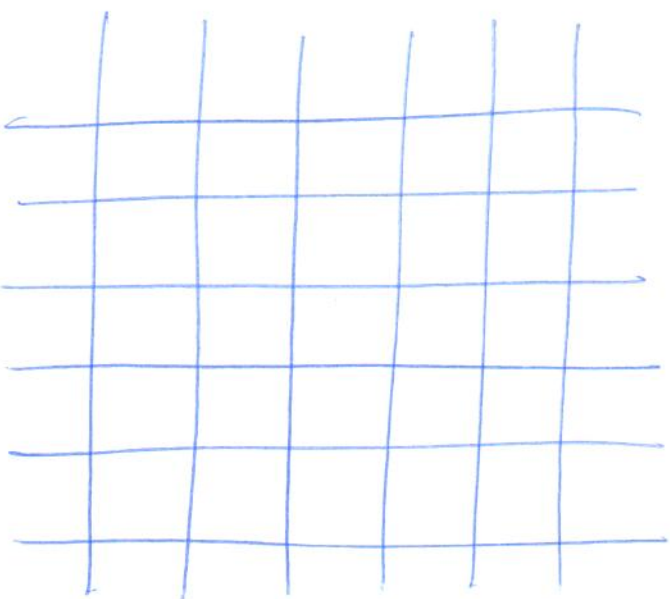
$$\deg(v) = C, \quad \forall v \in V.$$

Примеры

а) 

$\mathbb{Z}$

$\deg = 2.$

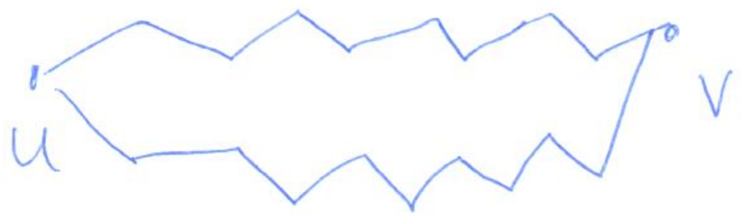
в) 

$\mathbb{Z}^2.$

$\deg = 4.$

$d(u,v)$, $u,v \in V$

комбинаторное растояние между вершинами (длина кратчайшего пути).



(Γ, v_0) — меченный граф.

$v_0 \in V$

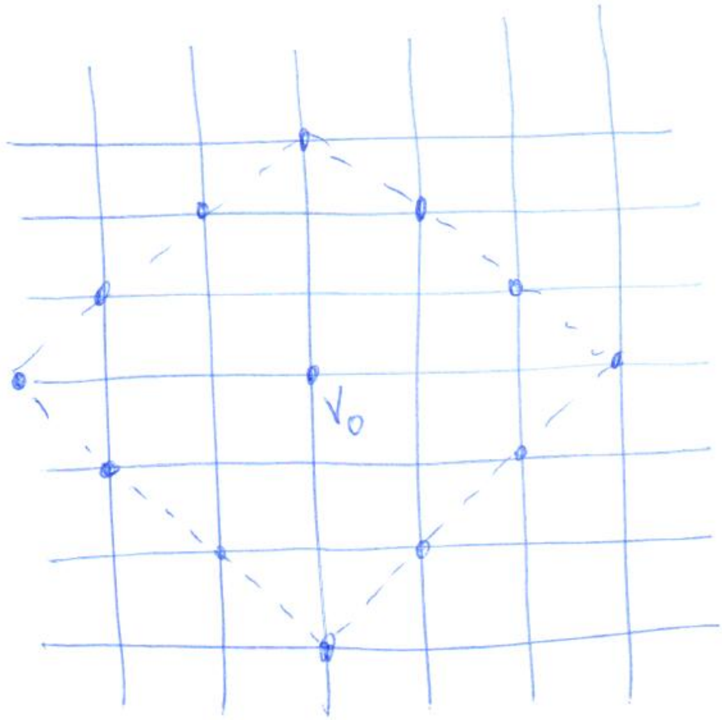
фиксированная / выделенная вершина (начало).

$$S_{\Gamma, v_0}(n) = \{ v \in V \mid d(v_0, v) = n \}$$

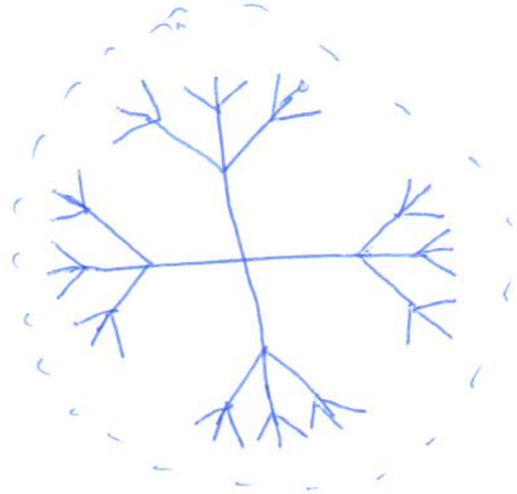
"сфера" радиуса n

$$B_{\Gamma, v_0}(n) = \{ v \in V \mid d(v_0, v) \leq n \}$$

"шар" радиуса n.



сфера радиуса 3 в $\mathbb{Z}^2$



шар радиуса 3 в F_2.

$$\delta(n) = \delta_{\Gamma, v_0}(n) = \#\left(S_{\Gamma, v_0}(n)\right)$$

сферическая функция роста.

мощность (число элементов).

$$\gamma(n) = \gamma_{\Gamma, v_0}(n) = \#\left(B_{\Gamma, v_0}(n)\right)$$

(объемная) функция роста.

Пример а) $\Gamma = \mathbb{Z}^2$

$$\delta(n) = 4n \text{ если } n \geq 1.$$

$$\gamma(n) = 1 + 4\sum_{i=1}^{n} i = ? \text{ - сосчитать!}$$

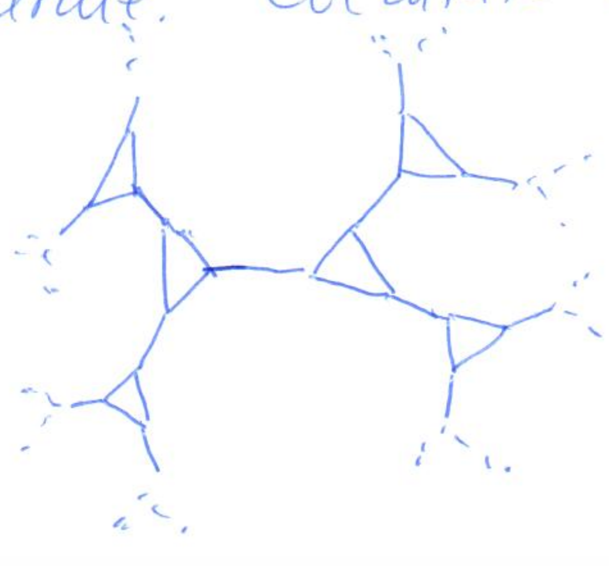
б) $\Gamma = F_2$.

$$\delta(n) = 4 \cdot 3^{n-1}$$

$$\gamma(n) = 1 + 4\sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} = ? \text{ сосчитать!}$$

$$\boxed{\gamma(n) = \sum_{i=0}^{n} \delta(i)}$$

Упражнение. Сосчитать $\gamma(n)$ для графа



Упражнение. а) Пусть

$$\Delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n)\, z^n \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma(n)\, z^n \quad)$$

(производящие ряды)

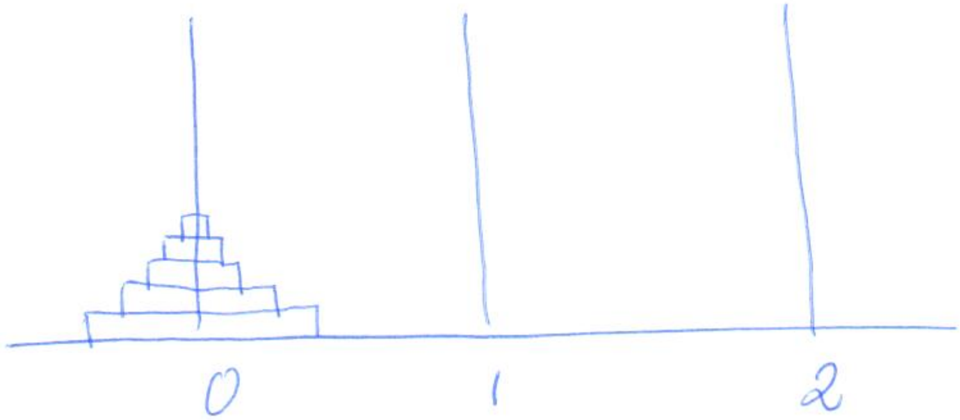
Доказать, что

$$\boxed{\Gamma(z) = \frac{\Delta(z)}{1 - z}}$$

б) Сосчитать $\Gamma(z)$ для приведенных выше примеров.

с) Доказать, что рост ~~...~~ бесконечного графа не может быть медленнее линейного.

(4) Графы связанные с игрой "Ханойские башни".



3 стержня (пронумерованные 0, 1, 2).

n дисков различных размеров нанизанных на один из стержней.

Задача — переложить диски на другой стержень соблюдая правило: бо́льший диск нельзя класть на меньший.

Упражнение.

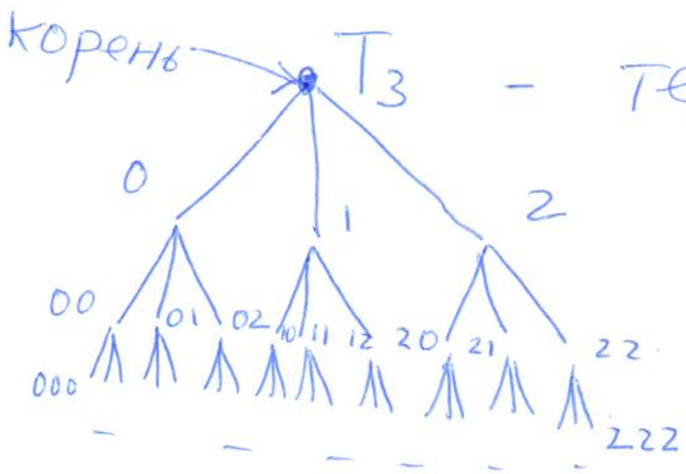
(i) Чему равно минимальное число операций?

(ii) Найти алгоритмическое решение задачи.

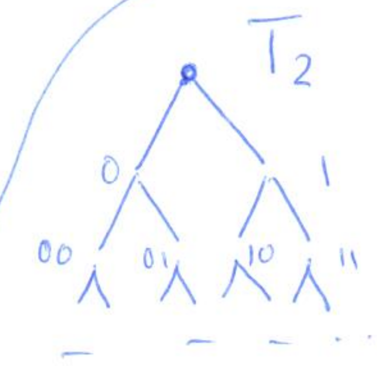
$\{0, 1, 2\}$ — алфавит

$V_n = \{0,1,2\}^n$ — слова длины n.

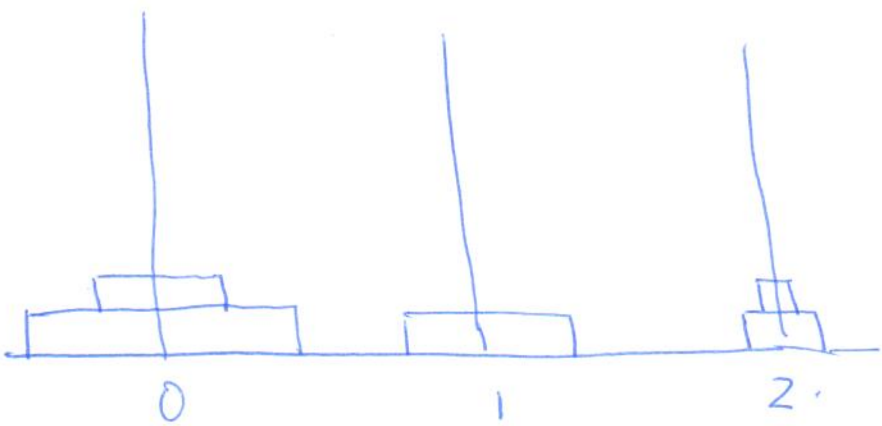
пример: 021 00210 — слово длины 8.



— корневое тернарное дерево



корневое бинарное дерево.



← конфигурация дисков.

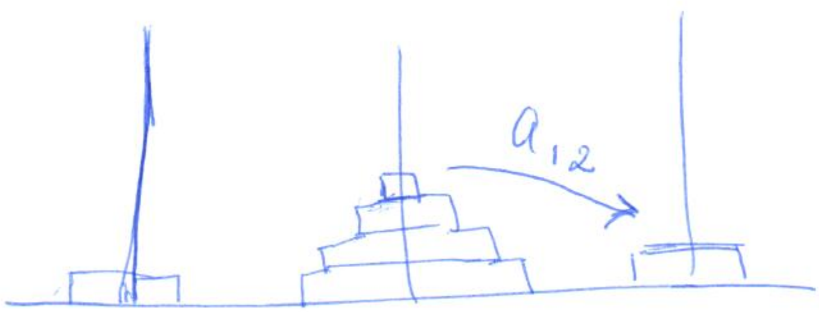
конфигурация $\longrightarrow$ слово $w \in V_n$

$w = w_1 w_2 \ldots w_n$

$w_k = i \in \{0,1,2\} \iff$ k-ый диск принадлежит i-му стержню.

Упражнение. Имеется взаимно-однозначное соответствие (биекция) между конфигурациями дисков и словами длины n в алфавите $\{0,1,2\}$.

a_{01}, a_{02}, a_{12} три операции над конфигурациями (словами)



a_{ij} = ставит меньший диск с i-го стержня на j-ый (или наоборот) в зависимости от ситуации.

= не меняет конфигурацию если на i-ом и j-ом стержнях нет дисков.

a_{ij} - инволюции, $a_{ij}^2 = id$

тождественное преобразование.

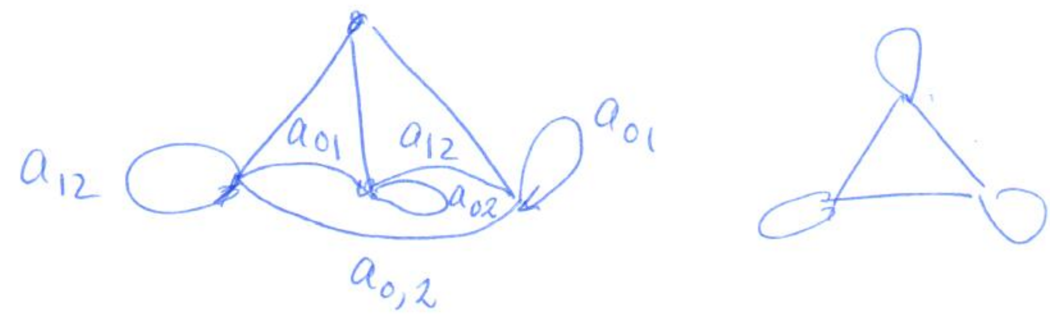
$V_n \ni u \xrightarrow{a_{ij}} a_{ij}(u)$ - действие на конфигурацию

Граф $\Gamma_n = (V_n, E_n)$

$$E_n = \{(u,v) \mid u,v \in V_n,\ a_{ij}(u) = v$$

для некоторой пары $(i,j) \in \{(01), (02), (1,2)\}\}$

$n=1.$



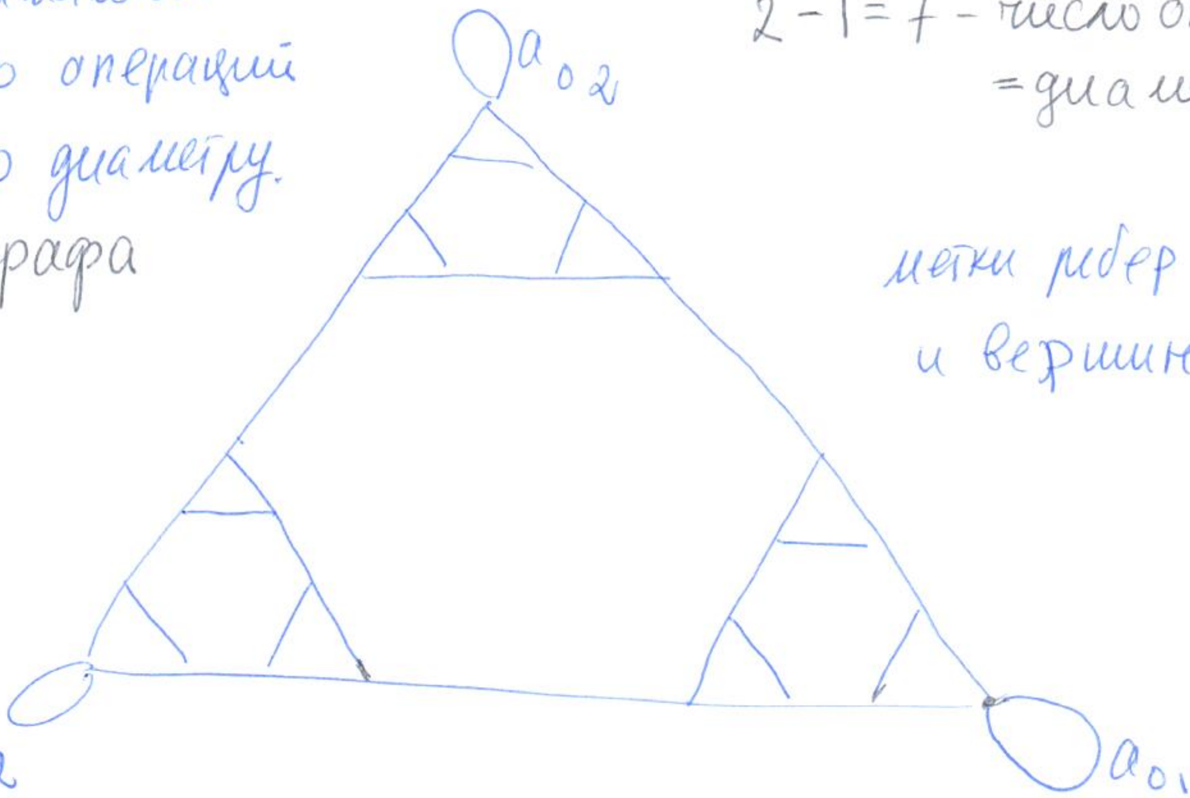
$n=2$ Упражнение: Нарисовать графы Γ_2, Γ_3 и понять как строится граф Γ_{n+1} по Γ_n.

$n=3.$

минимальное число операций равно диаметру. графа

$n = 3$

$2^3 - 1 = 7$ – число операций = диаметр



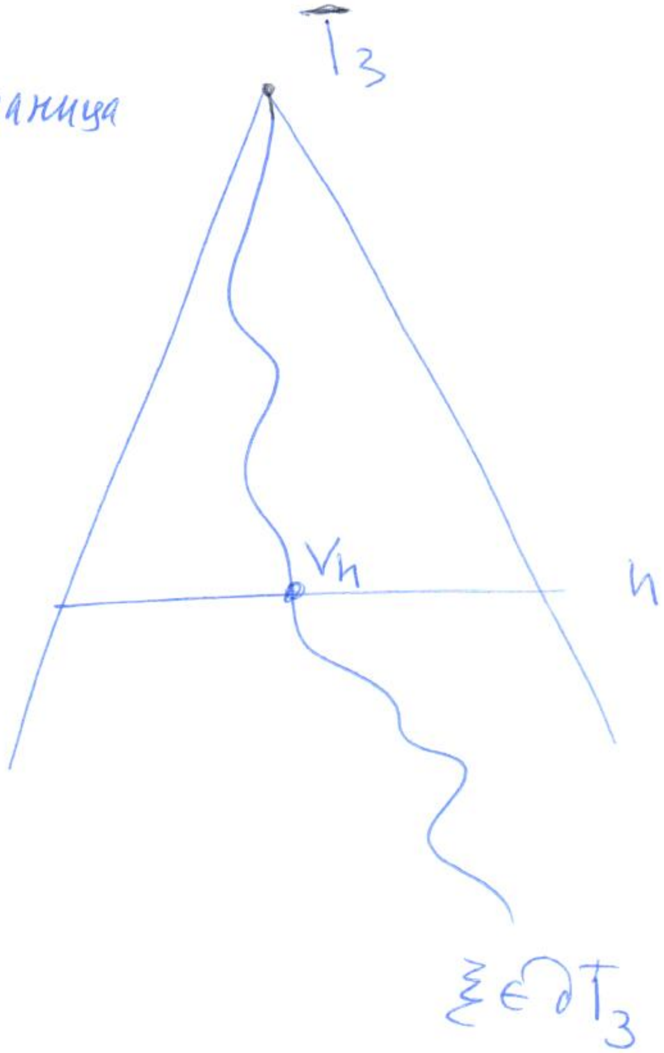
метки ребер ξ? и вершин ?

$\xi \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} = \partial T_3$ – граница

$\xi = \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$

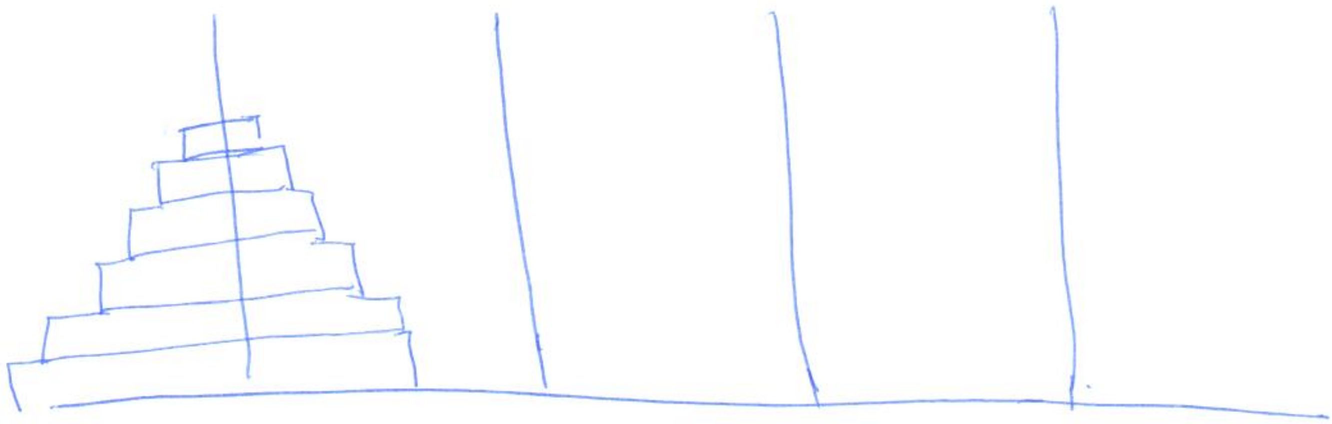
$$\boxed{\Gamma_\xi = \lim_{n\to\infty} (\Gamma_n, v_n)}$$

семейство бесконечных графов.



(5) **Усложненная игра.**

$k \geqslant 3$ стержней.



n дисков.

Задача та же.

(i) Минимальное число операций?

(ii) Алгоритм?

(iii) Верен ли алгоритм Фрейма-Стюарта?

Кажется недавно решена для случая $k=4$.

(Сообщено мне Дональдом Кнутом, автором

Теха, "Искуства Програмирования", ...

Упражнение. Нарисовать графы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ для $k=4$.

Аналогично случаю $k=3$ определяется биекция между конфигурациями n дисков и словами (длины n) из

$$\{0,1,\dots,k-1\}^n$$

Аналогично определяются бесконечные графы Γ_ξ, $\xi \in \{0,1,\dots,k-1\}^{\mathbb{N}} = \partial T_k$

Теорема. ([Z. Šunić, R. Grigorchuk]) Для случая k стержней рост любого из графов Γ_ξ ~~р асимптотически равен~~ удовлетворяет оценкам

$$a^{(\log n)^{k-2}} < \gamma(n) < b^{(\log n)^{k-2}}$$

для некоторых констант a, b, $1 < a < b$.

Исследовательская Проблема: Найти асимптотику функции $\gamma(n)$ для игры с k стержнями.

---

6 $\boxed{\text{Ханойские группы.}}$

Аналогично случаю $k=3$ определяются операции a_{ij}, $i, j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $i \neq j$.

Операции a_{ij} порождают группу $\mathcal{H}^{(k)}$

$$\mathcal{H}^{(k)} = \langle a_{ij} \mid i, j \in \{0, 1, \dots, k-1\} \rangle$$

— группа Ханойских башен для случая $k \geq 3$ стержней.

Факт: Группа $\mathcal{H}^{(3)}$ является ветвящейся и аменабельной.

Открытый вопрос. Являются ли группы $\mathcal{H}^{(k)}$, $k \geq 4$ аменабельными?

$\mathcal{H}^{(k)}$ является (некоммутативной) ренорм группой для Ханойской игры с параметром k.

Она действует на

$$V_n = \{0, 1, \ldots, k-1\}^n$$

$n = 1, 2, \ldots$, на их объединении и на множестве бесконечных слов

$$\{0, 1, \ldots, k-1\}^{\mathbb{N}},$$

т.е. на границе (корневого) дерева T_k.

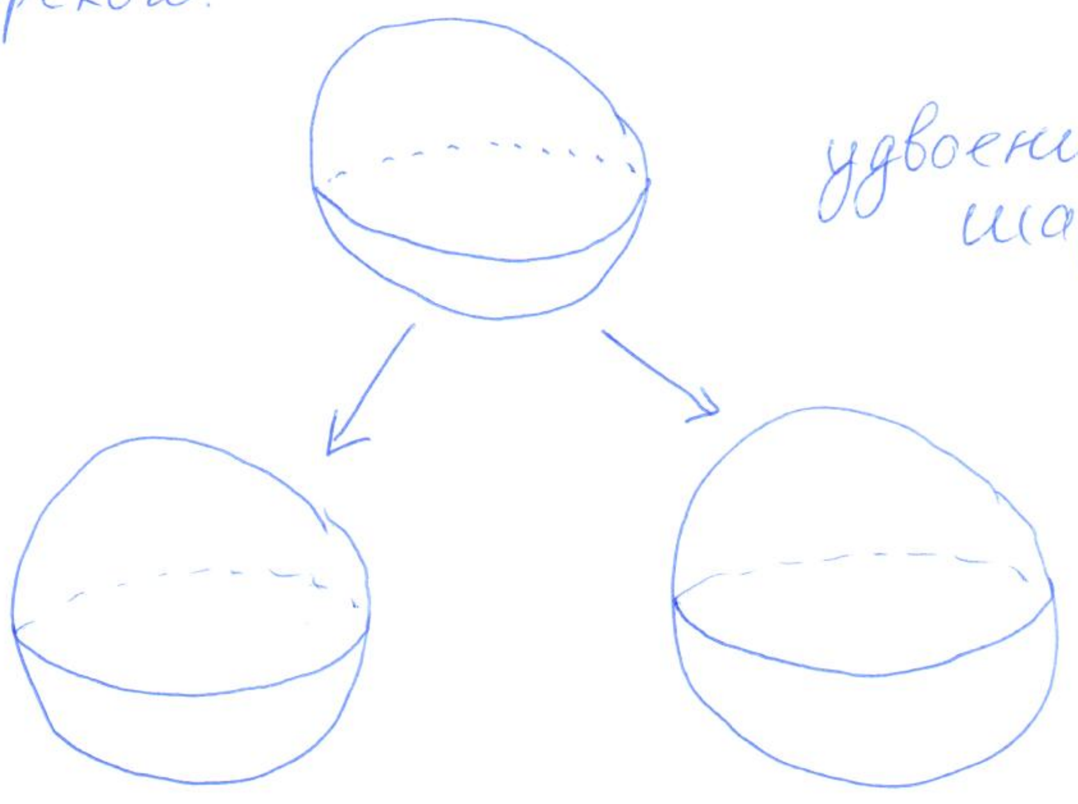
Более того, $\mathcal{H}^{(k)} \leq \mathrm{Aut}(T_k)$

↑группа автоморфизмов корневого дерева T_k

Определение. Группа G аменабельна если

а) для нее невозможны "мыльные пузыри", основанные на применении схем Понзи;

в) неверен аналог парадокса Банаха-Тарского:



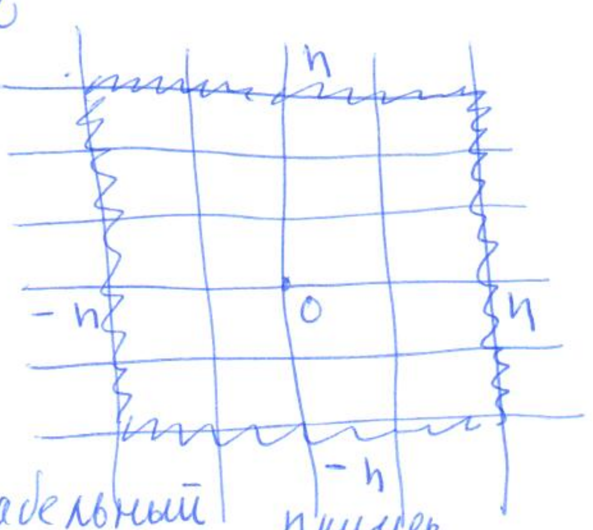
удвоение шара

c) аменабелен ее граф Кэли Γ т.е.
константа Чигера

$$c(\Gamma) = \inf_{\substack{F \subset V \\ |F| < \infty}} \frac{|\partial F|}{|F|}$$

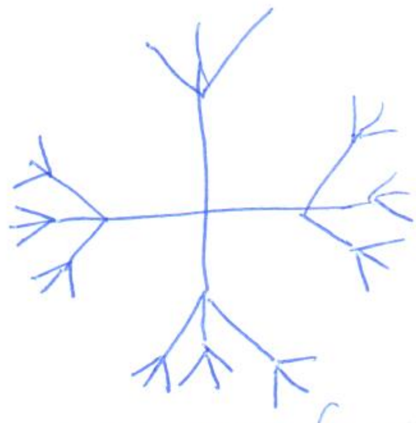
равна нулю.

$\mathbb{Z}^2$



аменабельный пример

F_2



неаменабельный пример.

F_n — квадрат размера $\sim n$

$|\partial F_n| \sim Cn$ — линейная ф-я.

$|F_n| \sim Dn^2$ — квадратичная ф-я

$$\frac{|\partial F_n|}{|F_n|} \sim \frac{C}{Dn} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Упражнение. Посчитать константу Чигера для F_2.

(7) Рост групп

Группа G это непустое множество с одной бинарной операцией $\circ$ и выделенным элементом $e \in G$, называемым единицей такие что

(i) Операция ассоциативна

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = abc$$

(ii) $a \circ e = e \circ a = a \quad \forall a \in G$.

(iii) $\forall a \in G \quad \exists\, a' \in G$ такой, что

$$a \cdot a' = a' \cdot a = e$$

$a' = a^{-1}$ – обратный элемент

G коммутативна (или абелева) если $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b$.

Символы используемые для операции

$+$ если группа коммутативна, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$.

$\cdot$

$\circ$ – композиция.

Единица часто обозначается 1 (или 0 если операция +).

Действие группы G на множестве X

$G \overset{\alpha}{\curvearrowright} X$

$\alpha : G \times X \longrightarrow X$

$\alpha(g x) := g x \in X$

(i) $1x = x \quad \forall x \in X$

(ii) $(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2(x))$.

$\mathrm{Sym}(X)$ - группа биекций множества X

симметрическая группа. (зависит только от мощности X)

$X = \{1, 2, \dots, n\} \Longrightarrow \mathrm{Sym}(X) = S_n$

Подмножество $S \subset G$ является системой образующих (или порождающих) если всякий элемент $g \in G$ может быть представлен в виде

$$g = s_{i_1}^{\pm 1} s_{i_2}^{\pm 1} \dots s_{i_n}^{\pm 1}$$

$|g|$ – длина

Пишем $G = \langle S \rangle$

Пара (G, S) называется меченной группой.

Определение графа Кэли. $\Gamma = \Gamma(G, S)$.

$V = G$ – множество вершин.

$E = \{(g, sg) \mid g \in G, s \in S\}$ – ребра.

$d(g,h) = |g^{-1}h|$ – левоинвариантная метрика на группе.

$$\gamma(n) = \#\{g \in G \mid |g| \le n\}$$ — функция роста

(то же самое, что функция роста графа Кэли $\Gamma = \Gamma(G, S)$.)

Упражнение. Пусть A и B две системы образующих группы G. Тогда

$$\gamma_G^A(n) \sim \gamma_G^B(n).$$

Упражнение.

$$\gamma_{\mathbb{Z}^d}(n) \sim n^d$$

$$\gamma_{F_2}(n) \sim e^n.$$

Классы групп:

коммутативные

→ нильпотентные

→ разрешимые

→ элементарно аменабельные

→ аменабельные

→ софические.

Тождества в группах.

$[x,y]=1$ — тождество коммутативности

$\Updownarrow$

$[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$ $\qquad xy=yx.$

$[[x_1,x_2],x_3]\overset{=1}{}$ — тождество нильпотентности класса 2.

$[\ldots[[x_1,x_2],x_3],\ldots,x_n]\overset{=1}{}$ — тождество нильпотентности класса n.

Пример

$\left\{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$ — группа Гейзенберга.

нильпотентная ~~степе~~ класса 2.

Упражнение. Проверить это.

$[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = 1$ — тождество разрешимости степени 2.

$[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], [[x_5, x_6], [x_7, x_8]]] = 1$

тождество разрешимости степени 3.

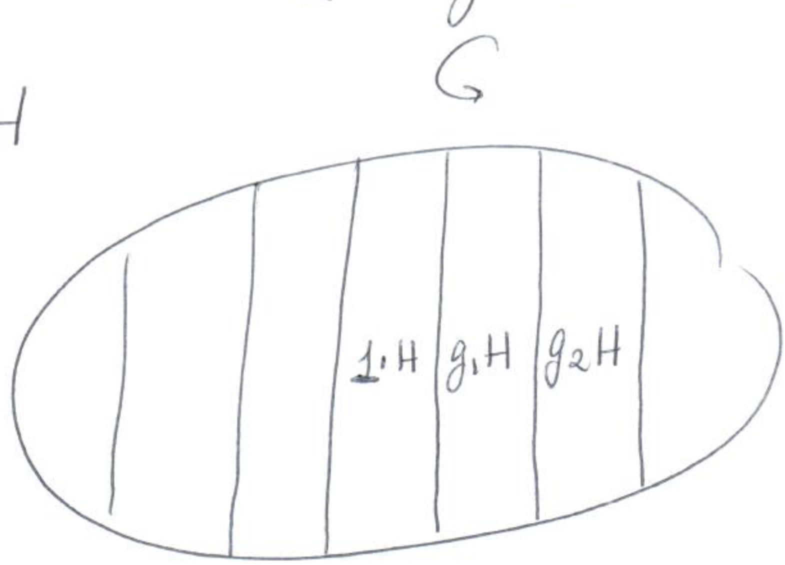
и т.д.

Определение. Группа G почти абелева (нильпотентная, ...) если она содержит ~~нильпо~~ абелеву (нильпотентную, ...) подгруппу конечного индекса.

$H < G$ $\quad N = [G : H]$ — индекс.

$$G = \bigsqcup_{i=1}^{N} g_i H$$

$\boxed{gH \text{ — класс смежности}}$



Упражнение. Если H подгруппа конечного индекса в G то

$$\gamma_G(n) \sim \gamma_H(n).$$

Теорема. [Милнор, Вольф, Басс, Гиварч, Хартли, ...]

a) Нильпотентные группы имеют полиномиальный рост. При этом

в) $$\gamma(n) \sim n^d \text{ где } d = \sum_k k \operatorname{rank}_{\mathbb{Q}} \gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$$

$d \in \mathbb{N}$ - натуральное число.

c) Разрешимая группа имеет экспоненциальный рост если только она не является почти нильпотентной.

d) Элементарно аменабельная группа имеет экспоненциальный рост если только она не является почти нильпотентной.

Теорема. [М. Громов] Группа имеет полиномиальный рост тогда и только тогда когда она почти нильпотентна.

Проблема Дж. Милнора 1967. Верно ли, что рост конечнопорожденной группы либо полиномиален либо экспоненциален?

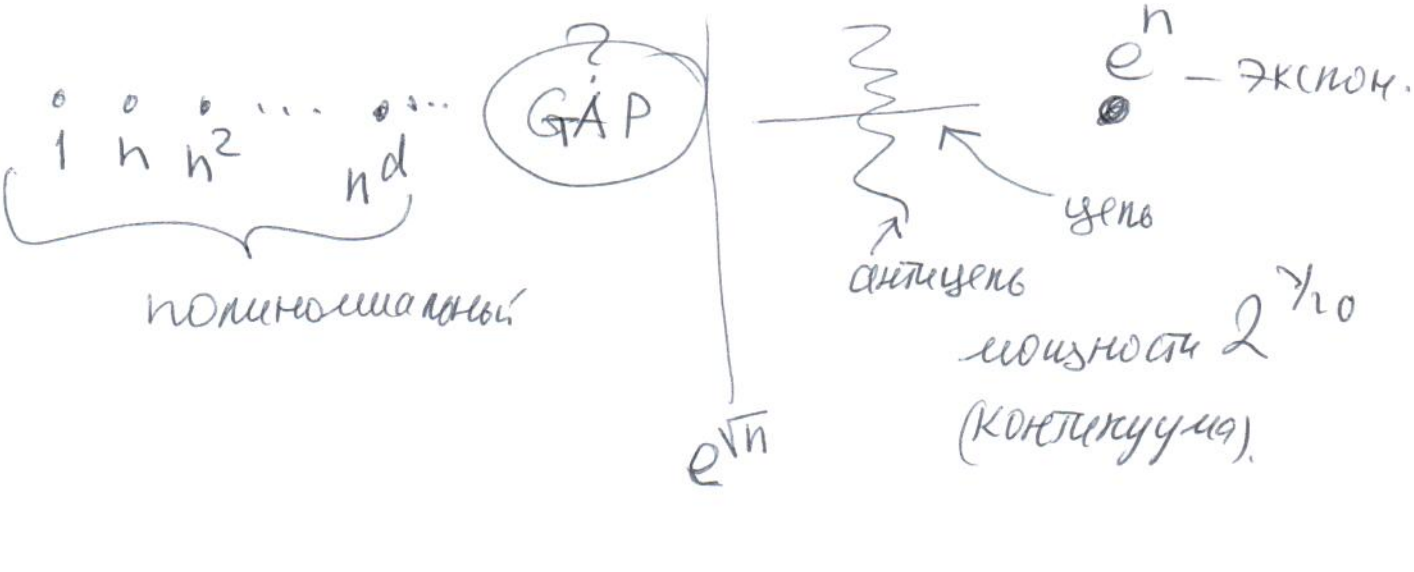
Ответ. [Р. Григорчук, 1984] Нет.

a) Группы промежуточного роста (между полиномиальным и экспоненциальным) существуют.

в) Их много, более того, существует континуально много групп с различными порядками роста.

Теорема [Р. Григорчук] Если группа аппроксимируется нильпотентными группами и её рост $\prec e^{\sqrt{n}}$ то рост полиномиальный (и следовательно группа почти нильпотентна).

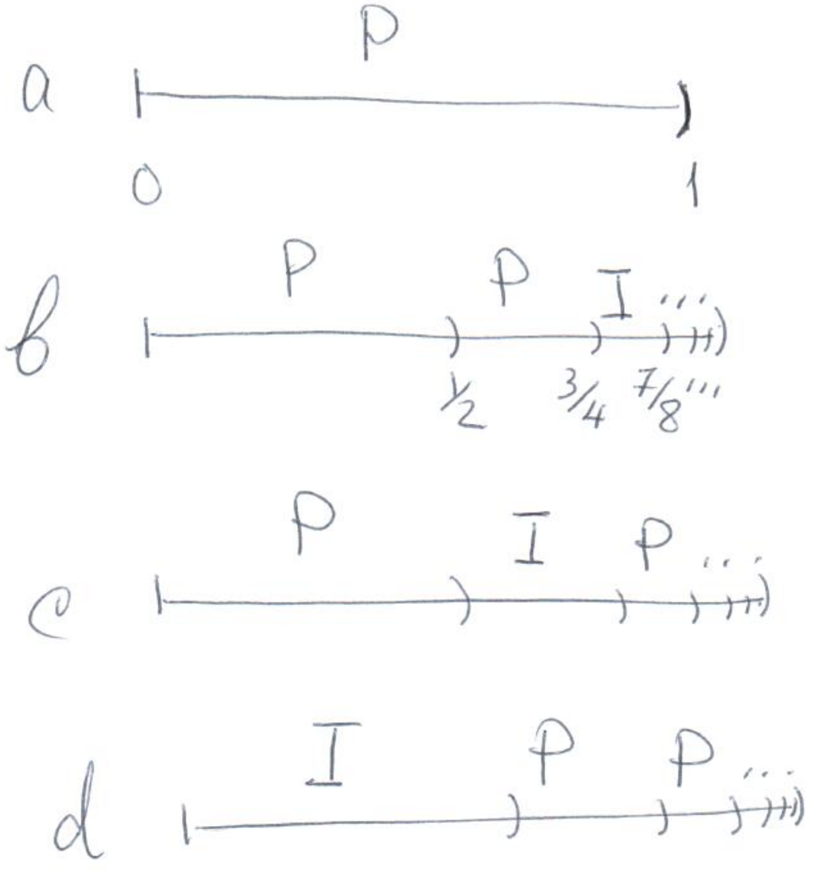
Гипотеза. На самом деле теорема верна без предположения для всех конечно порожденных групп.



Первый (и простейший) пример группы промежуточного роста.

$G \curvearrowright [0,1)$ $\quad G = \langle a, b, c, d \rangle$

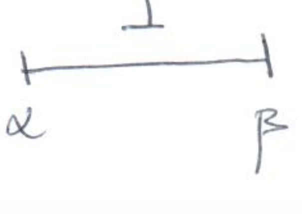
$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = id$



$(PPI)^{\infty}$ — периодическое слово.

$(PIP)^{\infty}$

$(IPP)^{\infty}$



— тождественное преобразование.

Известно, что $\gamma(n) \sim e^{n^{\delta}}$

где $\delta = 0.7675\ldots\ldots$

Проблема. Построить группу промежуточного роста с ростом меньше чем $e^{n^{\delta}}$.

Проблема. Построить группу с конечным заданием образующими и соотношениями.

В нашем случае

$$G \simeq \langle a, b, c, d \mid 1 = a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = \sigma^k((ad)^4) = \sigma^k((adacac)^4), k = 0, 1, 2, \ldots \rangle$$

где

$$\sigma : \begin{cases} a \to aca \\ b \to d \\ c \to b \\ d \to c. \end{cases}$$