Многочлены Шура через детерминанты

1. (детерминант Вандермонда) Докажите, что $\det[x_i^{N-j+1}]_{i,j=1}^N = \prod_{1\le i<j\le N}(x_i - x_j)$. Мы обозначаем это выражение $V_N(x_1,\ldots,x_N)$.

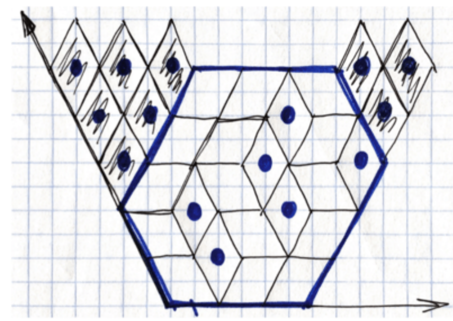
Многочлены Шура определяются как $s_{\vec\ell}(x_1,\ldots,x_N) = \dfrac{\det[x_i^{\ell_j}]_{i,j=1}^N}{V_N(x_1,\ldots,x_N)}$, где $\vec\ell = (\ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_N \ge 0)$, ℓ_i — целые. Это немного нестандартное обозначение, но нам так удобнее для замощений.

2. Докажите, что $s_{\vec\ell}(x_1,\ldots,x_N)$ — действительно многочлен от $x_1,\ldots,x_N$. (То есть, все множители $x_i - x_j$ в знаменателе сокращаются.)
3. Посчитайте суммарную степень $s_{\vec\ell}(x_1,\ldots,x_N)$.
4. Докажите, что многочлен $s_{\vec\ell}(x_1,\ldots,x_N)$ симметричен по x_i.

Перемежаемость и комбинаторная формула

Мы вводим отношение перемежаемости $\vec m = (m_1 > \ldots > m_{N-1}) \dot\prec \vec\ell = (\ell_1 > \ldots > \ell_N)$, если $\ell_N \le m_{N-1} < \ell_{N-1} \le m_{N-2} < \ldots \ell_2 \le m_1 < \ell_1$. Многочлен Шура $s_{\vec\ell}(x_1,\ldots,x_N)$ можно записать как сумму по всем перемежающимся массивам высоты N с верхней строчкой $\vec\ell$ (здесь $|\vec\ell| = \sum_i \ell_i$):

$$s_{\vec\ell}(x_1,\ldots,x_N) = \sum_{\vec\ell^1 \dot\prec \vec\ell^2 \dot\prec \ldots \dot\prec \ell^N = \ell} x_1^{|\vec\ell^1|} x_2^{|\vec\ell^2|-|\vec\ell^1|-1} \ldots x_N^{|\vec\ell^N|-|\vec\ell^{N-1}|-(N-1)}.$$



массив

0 1 2 6 7
0 1 4 6
0 3 5
1 3
1

Перемежающиеся массивы находятся в биекции с замощениями π.

5. Докажите, что $\sum_{j=1}^N |\vec\ell^j| = \mathrm{const}(\ell, N) + \mathrm{vol}(\pi)$, где $\mathrm{const}(\ell, N)$ зависит от N и верхней строчки $\vec\ell$, но не от замощения, и $\mathrm{vol}(\pi)$ — объем замощения.
6. С использованием определителей, докажите формулу $s_{\vec\ell}(1, q^{-1},\ldots,q^{1-N}) = \prod_{1\le i<j\le N} \dfrac{q^{N-\ell_i} - q^{N-\ell_j}}{q^i - q^j}$.
7. Перейдите к пределу $q \to 1$ в предыдущей формуле и получите $s_{\vec\ell}(1,1,\ldots,1) = \prod_{1\le i<j\le N} \dfrac{\ell_i - \ell_j}{j - i}$.
8. Для шестиугольника $\Omega_{a,b,c}$, найдите верхнюю строчку $\vec\ell$, и выведите из предыдущей задачи q-формулу МакМагона.
9. Получите q-формулу МакМагона из формулы для $s_{\vec\ell}(1, q^{-1},\ldots,q^{1-N})$.

Задачи на после лекции

10. Пусть $\vec\ell = (\ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_N)$. Вычислите $s_{\vec\ell}(x_1,\ldots,x_{N-1},0)$.
11. Посчитайте $s_{\vec\ell}(x_1,\ldots,x_N)$ для двух выделенных семейств меток $\vec\ell$:

    (a) $\vec\ell = (N, N-1,\ldots,k+2,k+1,k-1,k-2,\ldots,1,0)$; *(b)* $\vec\ell = (N-1+n, N-2, N-3,\ldots,1,0)$, $n \ge 0$.
12. Пусть $\vec\ell = (\ell_1 > \ldots > \ell_{N+1})$, $\vec m = (m_1 > \ldots > m_N)$, $\vec n = (n_1 > \ldots > n_{N-1})$. Докажите, что

$$\sum_{\vec m:\, \vec n \dot\prec \vec m \dot\prec \vec\ell} x^{|\vec\ell|-|\vec m|-N} y^{|\vec m|-|\vec n|-(N-1)} = \sum_{\vec m:\, \vec n \dot\prec \vec m \dot\prec \vec\ell} y^{|\vec\ell|-|\vec m|-N} x^{|\vec m|-|\vec n|-(N-1)}.$$