Параметрическая модель случайных замощений

Для $x_1, \ldots, x_N > 0$ мы определили распределение на замощениях высоты N с верхней строчкой $\ell = (\ell_1 > \ldots > \ell_N)$ формулой $\mathbb{M}_{\vec{x}}(\vec{\ell^j} \colon j = 1, \ldots, N-1) = \dfrac{x_1^{|\vec{\ell}^1|} x_2^{|\vec{\ell}^2| - |\vec{\ell}^1| - 1} \ldots x_N^{|\vec{\ell}^N| - |\vec{\ell}^{N-1}| - (N-1)}}{s_{\vec{\ell}}(x_1, \ldots, x_N)}$. Здесь замощение π кодируется перемежающимся массивом $\vec{\ell}^1 \dot{\prec} \vec{\ell}^2 \dot{\prec} \ldots \dot{\prec} \vec{\ell}^{N-1} \dot{\prec} \vec{\ell}$.

1. Докажите, что $\mathbb{M}_{\vec{x}}$ не меняется, если все числа x_i умножить на одно и то же положительное число.
2. Вычислите отношение $\mathbb{M}_{\vec{x}}(\pi^*)/\mathbb{M}_{\vec{x}}(\pi)$, где π^* — замощение, полученное из π удалением одного кубика $1 \times 1 \times 1$ на уровне i.

Цепи Маркова

Пусть W — конечное множество. Мы определяем вероятностные меры p на W, а также марковские цепи $T(w, w')$. Марковские цепи действуют на меры.

3. Если p — вероятностная мера, то $pT(w) = \sum_{w' \in W} p(w')T(w', w)$ — тоже вероятностная мера.
4. Если лягушка начинает с распределения p и делает n шагов согласно марковской цепи T, то ее распределение после n шагов — это pT^n (где T^n — степень матрицы). Какой вероятностный смысл у самих строк матрицы T^n?
5. Пусть W — пространство, описывающее бросание одной монетки 2 раза. Рассмотрим цепь Маркова T_1, состоящую (на каждом шаге) в перебрасывании заново второй монетки (монетка не честная, у нее вероятность орла p, вероятность решки $1-p$). Выпишите матрицу T_1. Вычислите ее степень T_1^n для всех целых положительных n.

Обратимость

Цепь Маркова T называется обратимой относительно распределения p_{rev}, если для всех $w, w' \in W$ выполнено $p_{rev}(w)T(w, w') = p_{rev}(w')T(w', w)$.

6. Если цепь обратима, то p_{rev} является ее стационарным распределением, то есть, $p_{rev}T = p_{rev}$.

Глауберова динамика на замощениях

Мы определили глауберову динамику (связанные ключевые слова: Markov chain Monte Carlo; Metropolis-Hastings algorithm) на замощениях шестиугольника с равномерной мерой следующим образом:

- Выберем случайно один из вертикальных ромбиков, которые внутри шестиугольника;
- Бросим честную монетку, орел или решка с вероятностью $1/2$;
- Если орел и наш ромбик может подвинуться вправо, то подвинем его вправо (“добавим кубик”);
- Если решка и наш ромбик может подвинуться влево, то подвинем его влево (“уберем кубик”);

7. Проверьте строго, что данная марковская цепь обратима относительно равномерного распределения на замощениях

В случае параметрической модели монетку надо изменить — а именно, на уровне i вероятность орла должна быть $p_i = \dfrac{x_i}{x_i + x_{i+1}}$.

8. Проверьте, что эта марковская цепь обратима относительно параметрической модели $\mathbb{M}_{\vec{x}}$.

Coupling from the past (самостоятельный разбор)

В контексте глауберовой динамики предлагается для самостоятельного изучения следующий способ получать с ее помощью **точную** картинку случайного замощения. Для простоты остановимся на равномерном случае.

Кратко, идея состоит в следующем (более подробно см. https://en.wikipedia.org/wiki/Coupling_from_the_past и ссылки оттуда). Пусть марковская цепь T сходится (за бесконечное число шагов) к искомому распределению p на W. Если ее начать с p, то за любое число шагов результат будет распределен как p. Давайте придумаем способ запустить **совместно** эту цепь из каждой точки W, так, чтобы за несколько (случайное количество) шагов все цепи из каждого $w \in W$ пришли к одному (случайному) состоянию. Теорема: тогда это случайное состояние распределено как мы хотим, как p.

Пусть теперь на W есть частичный порядок с максимальным и минимальным элементами (w_f, w_e — для замощений это полное и пустое), и можно устроить марковские цепи, которые с этим порядком согласованы. А именно, если до применения марковского оператора одно замощение w_1 было целиком над другим w_2, то и после этого применения порядок сохранится. (Согласованность, таким образом, означает, что в процессе случайных перестроек две поверхности не смогут пройти “сквозь” друг друга.) Значит, достаточно гнать только две цепи — начиная с w_f и w_e. Когда результаты совпадут (на случайной конфигурации, для какого-то случайного времени), то конфигурация будет распределена как нам надо (например, равномерно среди всех замощений).

Это на самом деле приводит к такому алгоритму для точной выборки из распределения:

- Придумать способ гнать две цепи, чтобы “расстояние” не увеличивалось
- Индуктивно по $k = 1, 2, \ldots$, если мы сделали 2^k шагов $T(2^k), \ldots, T(2), T(1)$ и не совпали, то перейти к $k+1$, разыграть еще 2^k шагов $T(2^{k+1}), T(2^{k+1}-1), \ldots, T(2^k+1)$, и добавить их **перед** предыдущими:
$$T(2^{k+1}), T(2^{k+1}-1), \ldots, T(2^k+1), T(2^k), \ldots, T(2), T(1).$$
  Предыдущие шаги сохранить и сделать после новых.
- Когда два замощения совпадут, то это будет точная выборка из нужного распределения.

Задачи:

9. Придумайте, как гнать глауберову динамику на замощениях (для равномерной меры) так, чтобы coupling from the past работал.
10. А можно ли так сделать в случае параметрической модели? Для всех ли значений параметров?