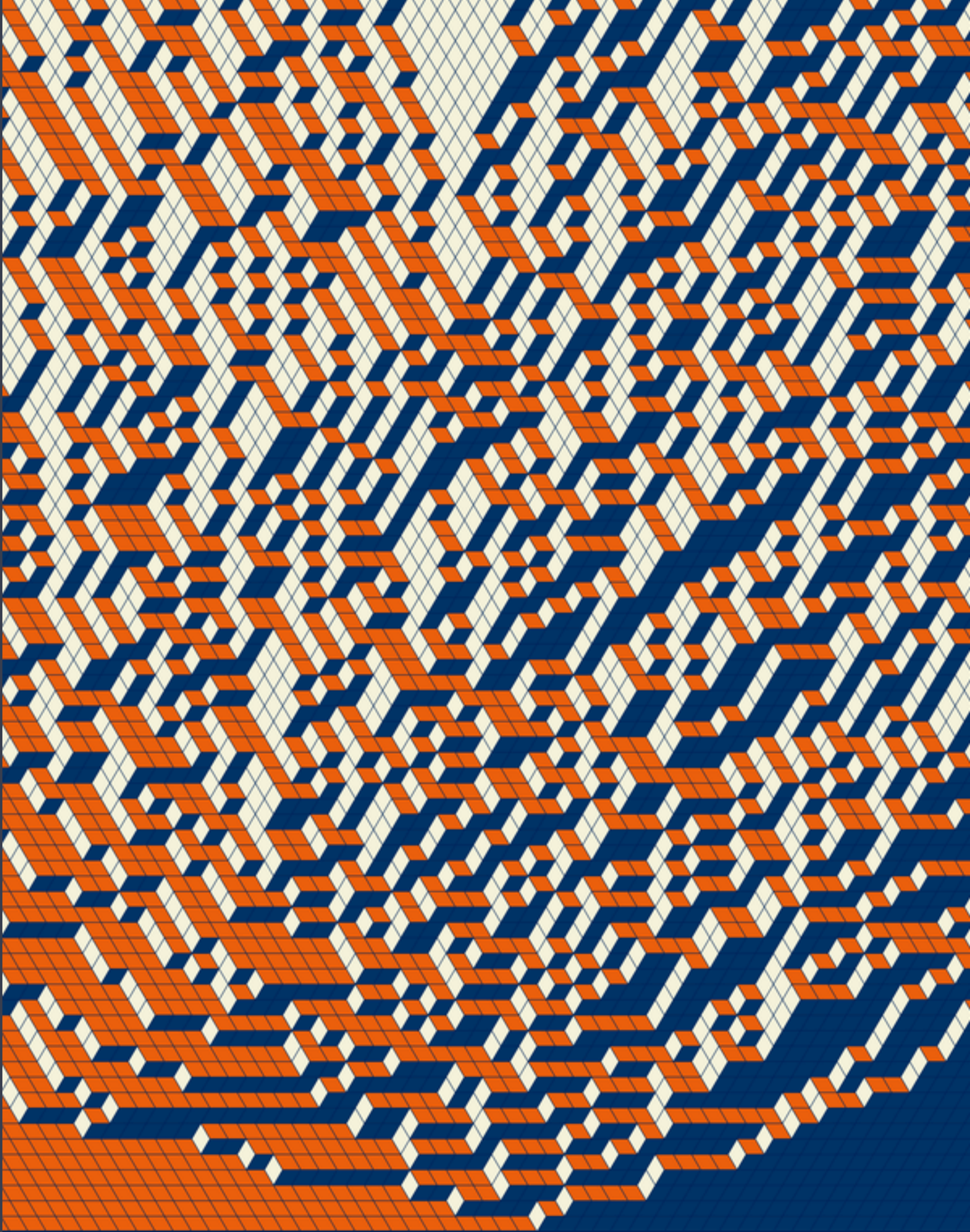
Леонид Петров

ЗАМОЩЕНИЯ РОМБИКАМИ

и их случайные перестройки



Глава 1

Замощения. Определения и элементарные примеры

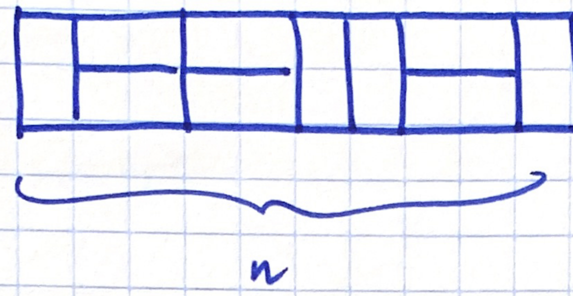
- Определение
- Замощения полосы доминошками
- Ромбики
- Замощаемые шестиугольники
- Трехмерная интерпретация
- Маленькие примеры $c = 1$, $c = 2$
- Лемма Гесселя-Вьенно (случай двух путей)
- Общий ответ - формула МакМагона (докажем во второй главе)
- q-деформация формулы МакМагона
- Замощения всей плоскости (плоские разбиения)
- Вырождение q-формулы МакМагона к плоским разбиениям

Что такое замощения

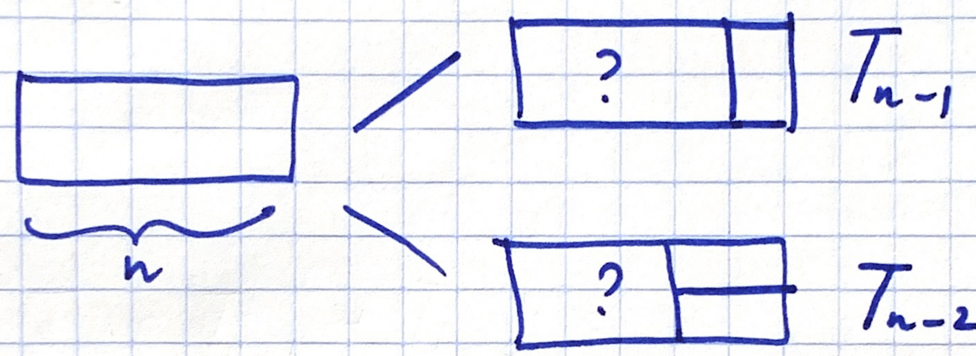
Замощение (иногда говорят “мозаика”) - это представление одной фигуры (обычно на плоскости) в виде объединения фигур из некоторого заданного набора (будем называть их "тайлы", или "плитки"), так что каждая точка исходной фигуры покрыта хотя бы один раз, а сами тайлы могут пересекаться только по границе.

Мы будем рассматривать замощения многоугольников (и прочих довольно простых областей, таких, как полуплоскость) другими, "маленькими" элементарными многоугольниками. Нас будет интересовать подсчет числа замощений, а также (позднее) разные вероятностные вопросы, вроде формы типичного большого замощения.

По-видимому, простейший нетривиальный набор тайлов состоит из двух доминошек - 1×2 и 2×1.



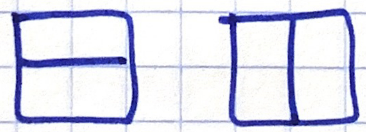
$T_n = \#$ замощений



$T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$

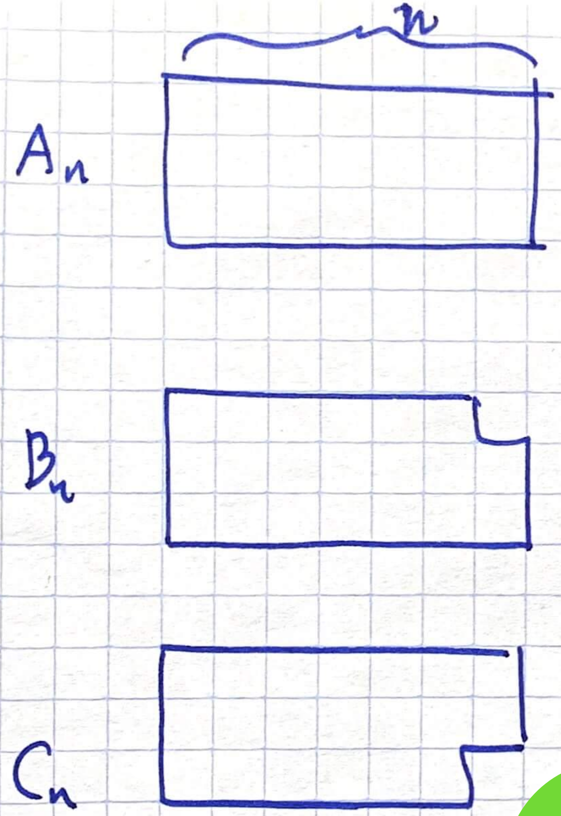
$T_1 = 1$

$T_2 = 2$



=> Числа Фибоначчи

1. Замощения $2 \times n$



$$\begin{cases} A_n = A_{n-2} + B_{n-1} + C_{n-1} \\ B_n = A_{n-1} + B_{n-2} \end{cases}$$

$(B_n = C_n)$

2. Замощения $3 \times n$

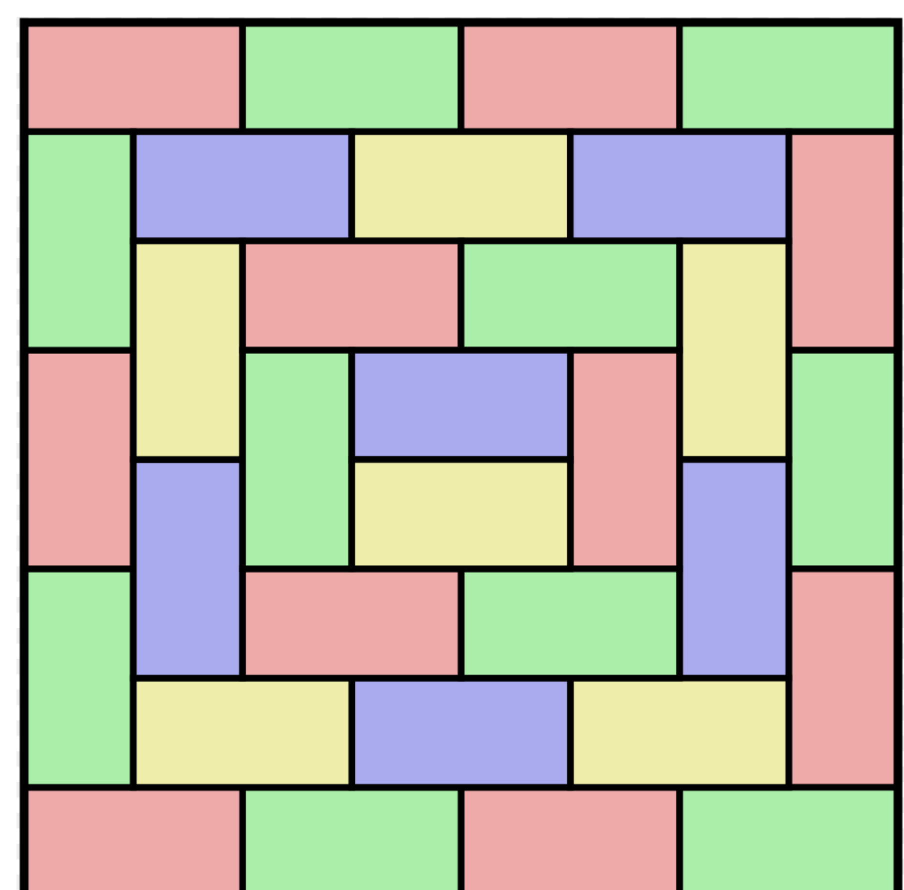
Замечание. Замощения общего многоугольника $m \times n$ можно тоже посчитать, но для этого уже требуются другие методы, см., например, Википедию ⬇️

Подсчёт замощений области

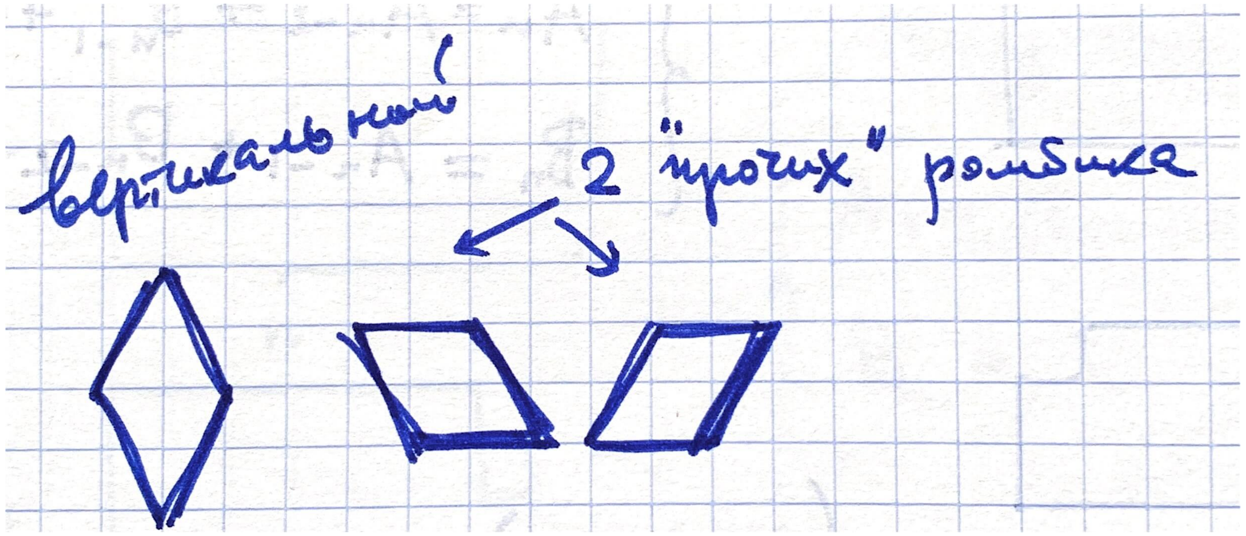
Число способов замощения $m \times n$ прямоугольника $\frac{mn}{2}$ костяшками домино вычислили независимо в 1961 году Темперли с Фишером [2] и Кастеляйн,[3] и это число равно

$$\prod_{j=1}^{\lceil \frac{m}{2} \rceil} \prod_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \left(4\cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + 4\cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right).$$

Если m и n оба нечётны, формула корректно даёт нулевое число возможных мозаик домино.

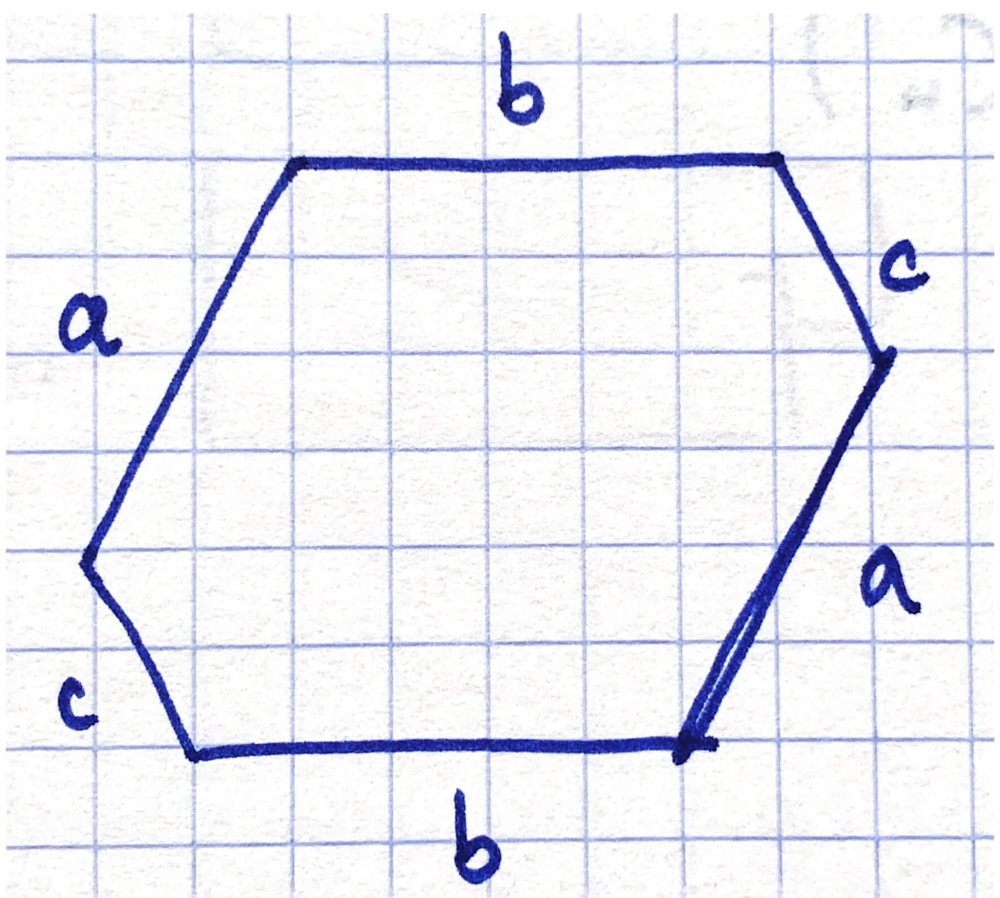


РОМБИКИ



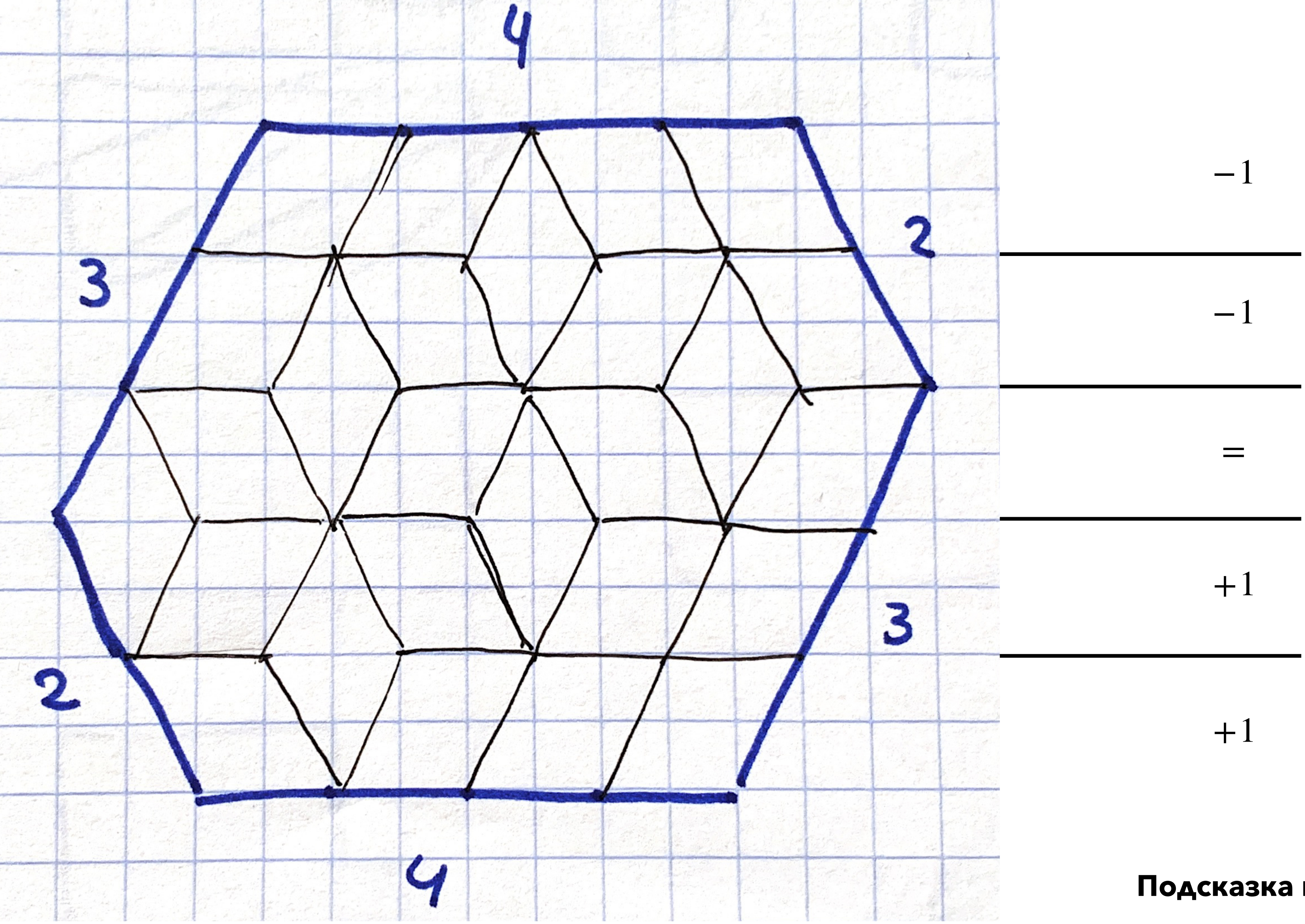
Главный объект первых двух занятий - *замощения многоугольников ромбиками* трех типов. Каждый ромбик - это объединение двух соседних правильных треугольников на треугольной решетке.

Что можно замощать? Давайте замощать многоугольники, которые нарисованы на треугольной решетке. Например, шестиугольники со сторонами a, b, c, a, b, c можно замостить. Обозначение: $\Omega_{a,b,c}$



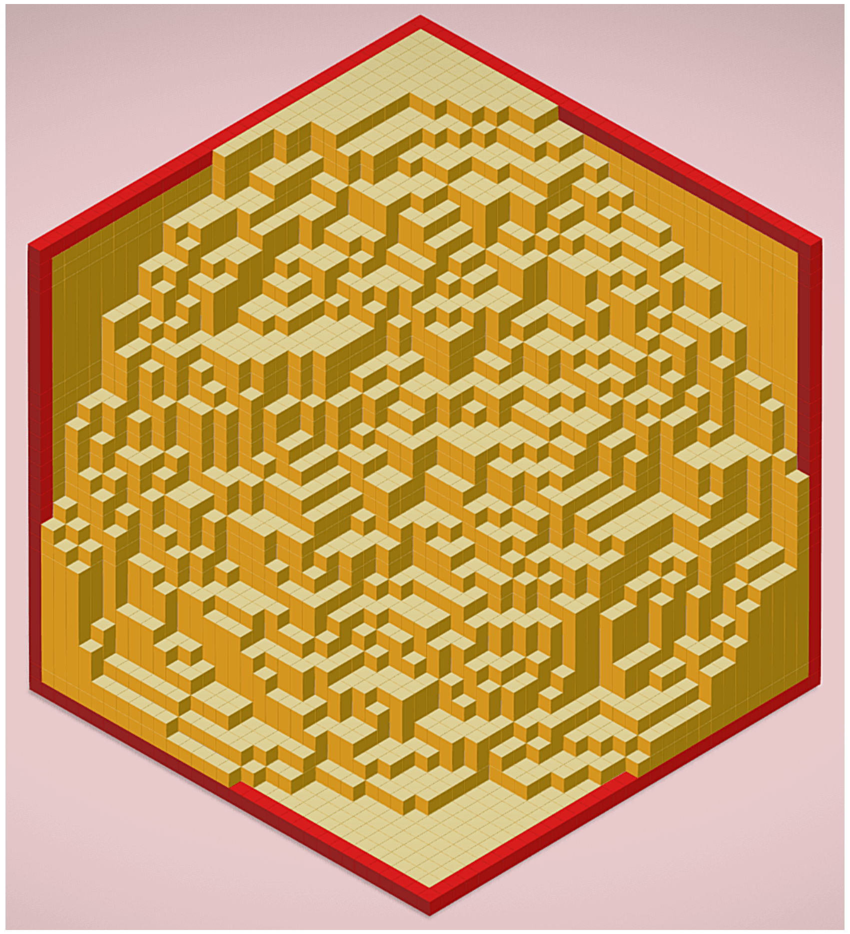
3. Замощаемые шестиугольники

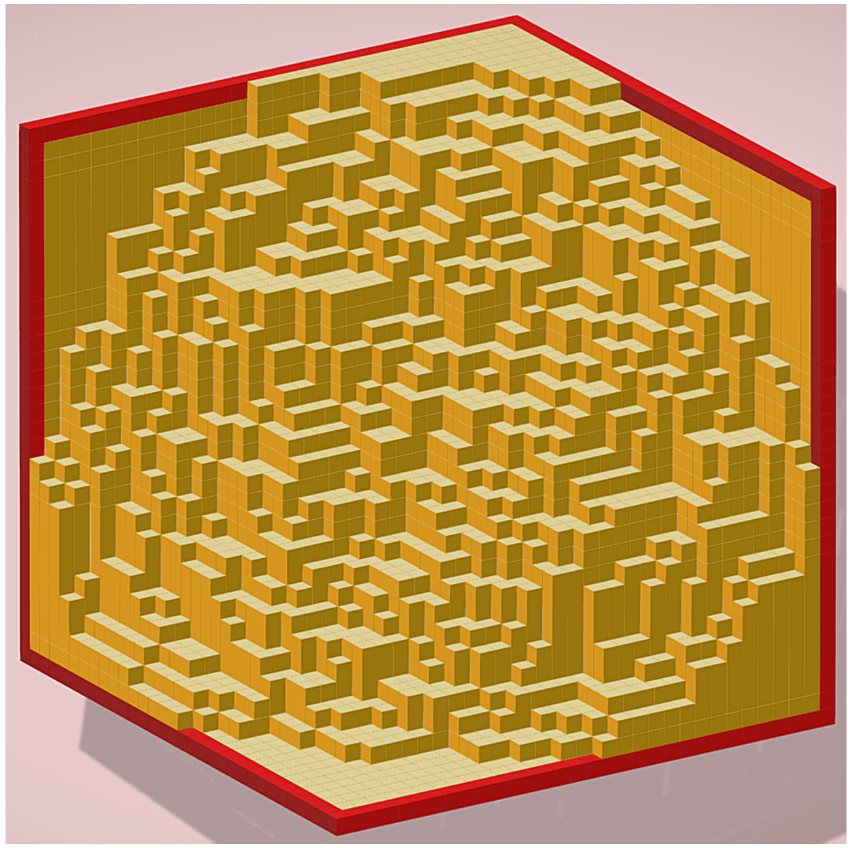
Возьмем шестиугольник на треугольной решетке (то есть, его противоположные стороны параллельны, и стороны имеют целочисленную длину). Его можно замостить ромбиками трех типов тогда и только тогда, когда противоположные стороны равны.



Подсказка к задаче 3.

Если смотреть только на вертикальные ромбики, то в первом ряду снизу будет ровно один, во втором - ровно два, и так далее, пока шестиугольник расширяется в обе стороны. Затем будет несколько горизонтальных рядов, в которых число вертикальных ромбиков не меняется. Наконец, ближе к верхней границе число вертикальных ромбиков от ряда к ряду будет уменьшаться.





ВЗГЛЯД В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

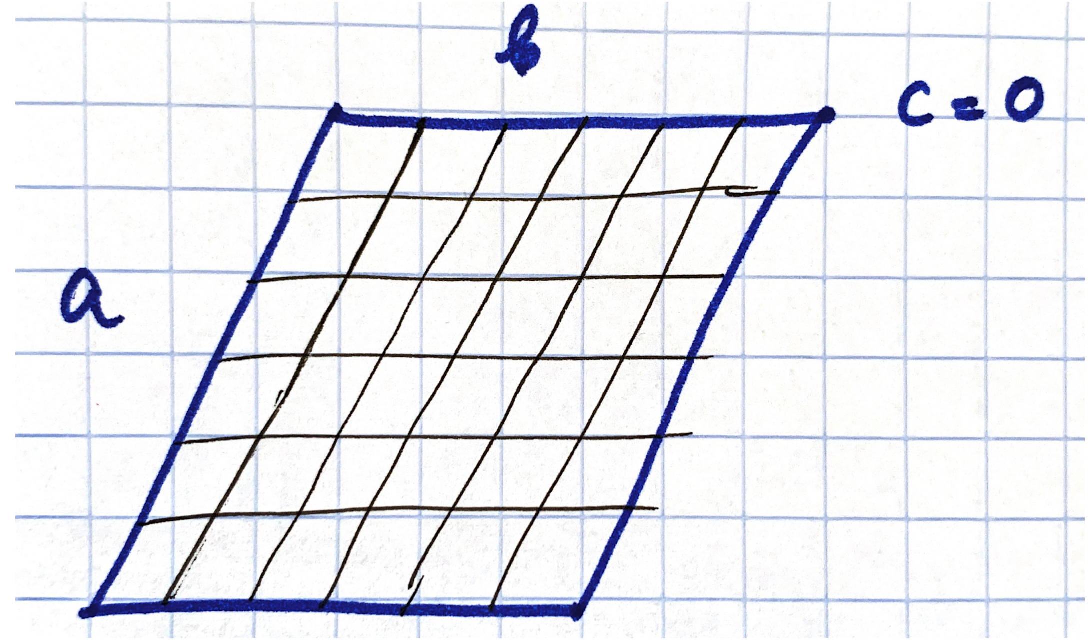
Замощать ромбиками можно разные многоугольники. Замощения некоторых из них (например, шестиугольников) легко интерпретировать как трехмерные поверхности, ограничивающие конфигурации кубиков ⬅️

Трехмерная модель доступна по ссылке [А. Бородин]

Замощения $\Omega_{a,b,c}$, таким образом, находятся во взаимно-однозначном соответствии с конфигурациями кубиков $1 \times 1 \times 1$ внутри параллелепипеда $a \times b \times c$, в которых все кубики сдвинуты в один из углов (без дырок и перекрытий)

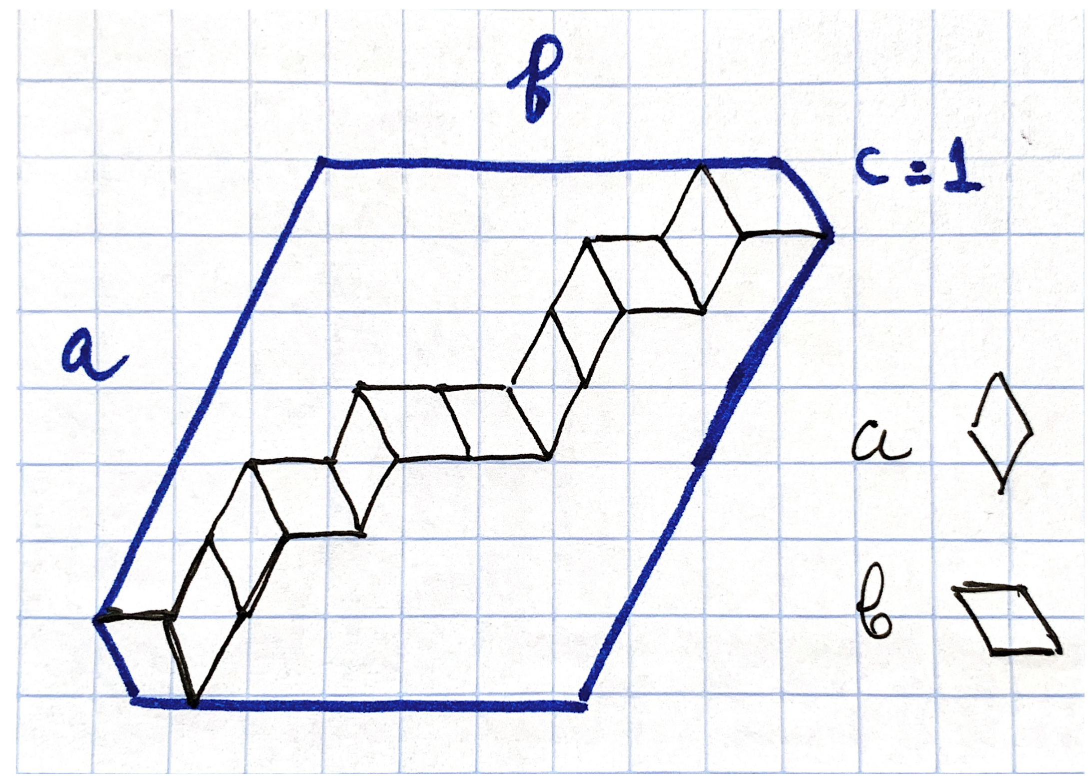
МАЛЕНЬКИЕ ПРИМЕРЫ

Есть только одно (тривиальное) замощение шестиугольника $\Omega_{a,b,0}$



4. Сколько всего замощений $\Omega_{a,b,1}$?

Ответ: $C_{a+b}^{a} = \binom{a+b}{a}$

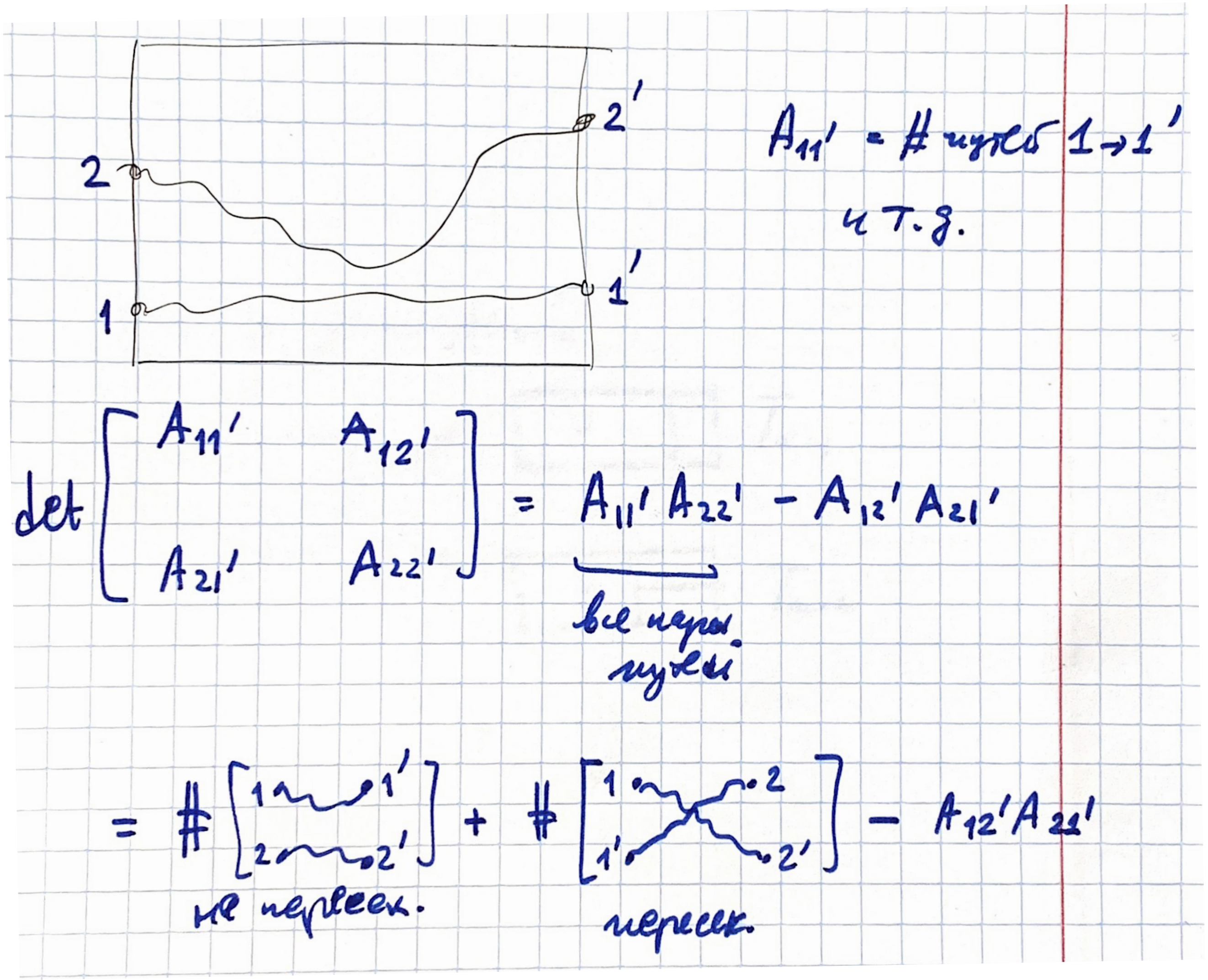


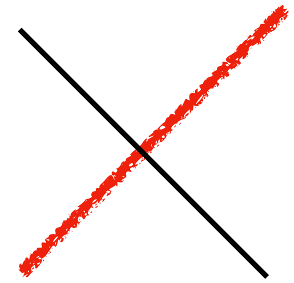
5. Сколько замощений $\Omega_{a,b,2}$?

Ответ: $\dfrac{1}{a+1}\binom{a+b}{a}\binom{a+b+1}{a}$

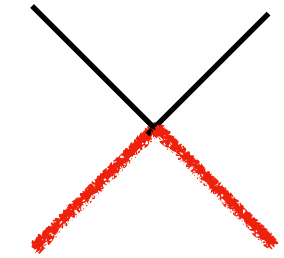
Мы видим, что число замощений многоугольника существенно зависит от “граничных условий” - малое изменение многоугольника может сильно изменить число его замощений.

Подсчет замощений $\Omega_{a,b,2}$





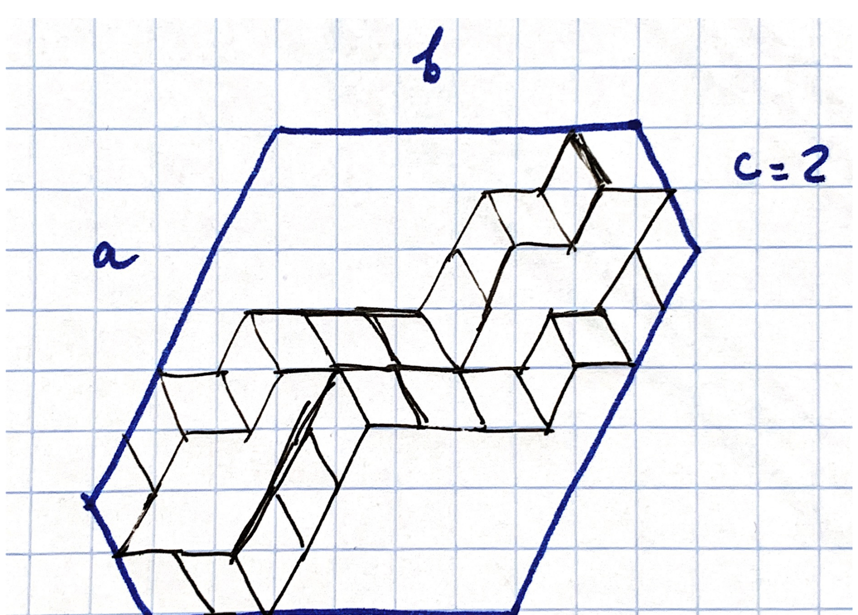
столько же, сколько



Лемма Гесселя-Вьенно

Число пар непересекающихся путей $(1 \to 1', 2 \to 2')$ равно

$$\det \begin{pmatrix} A_{11'} & A_{12'} \\ A_{21'} & A_{22'} \end{pmatrix}$$



$$\binom{a+b}{b}^2 - \binom{a+b}{a-1}\binom{a+b}{a+1} = \frac{1}{a+1}\binom{a+b}{a}\binom{a+b+1}{a}$$

Замечание. Лемма Гесселя-Вьенно верна и в общем случае (для n-ок непересекающихся путей), что дает опрелелитель $n \times n$ для числа замощений $\Omega_{a,b,n}$. Мы не будем его выписывать и считать, а вместо этого применим хитрую рекурсию

Формулы Макмагона

1. Число замощений $\Omega_{a,b,c}$ равно

$$\#\text{Tilings}(\Omega_{a,b,c}) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c}\frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

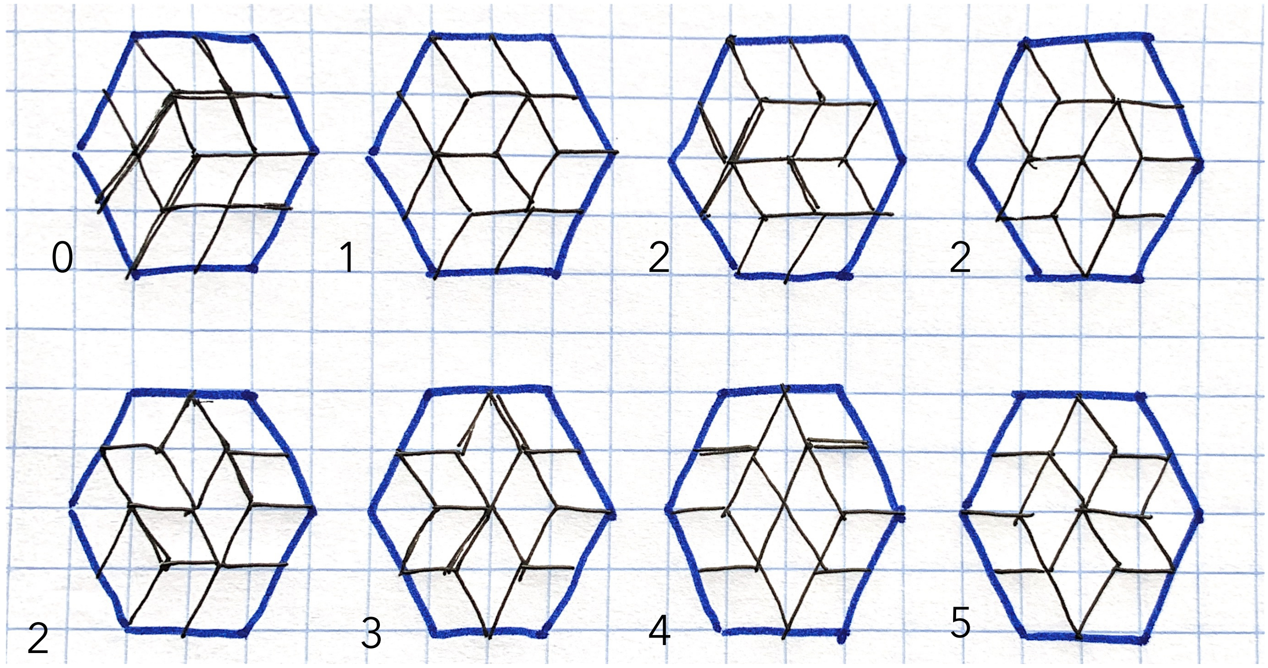
2. Уточненный подсчет замощений, когда важен объем, ограниченный трехмерной поверхностью (здесь q - вещественный параметр):

$$\sum_{\pi\in\text{Tilings}(\Omega_{a,b,c})} q^{\text{vol}(\pi)} = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c}\frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}}$$

Замечание. При $q\to 1$, вторая формула превращается в первую, так как $\dfrac{1-q^m}{1-q^n}\to\dfrac{m}{n}$.

Обе формулы были получены Перси МакМагоном в 1890-е годы.

6. Выпишите число замощений $\Omega_{a,b,3}$



Пример $2\times2\times2$.

1. Число замощений равно 20

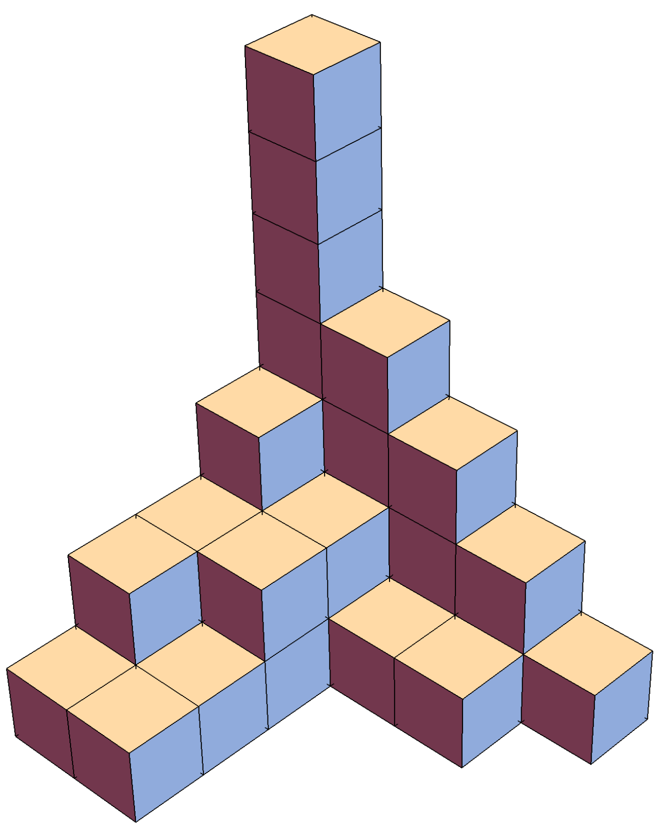
2. q-производящая функция имеет вид

$$\frac{\left(1-q^4\right)^2\left(1-q^5\right)}{(1-q)\left(1-q^2\right)^2} = 1+q+3q^2+3q^3+4q^4+3q^5+3q^6+q^7+q^8$$

ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ

8. Вычислите производящую функцию всех плоских разбиений $\sum_{\pi} q^{\mathrm{vol}(\pi)}$. Сколько всего плоских разбиений с 9 кубиками?

Вторая формула МакМагона (с параметром q) выдерживает предел при $a, b, c \to \infty$. При этом коробка $a \times b \times c$ исчезает, и формула подсчитывает так называемые "плоские разбиения" (plane partitions).



В наших подсчетах договоримся, что $0 < q < 1$(иначе пределы не сойдутся).

Чтобы перейти от второй формулы Макмагона к формуле для q-подсчета плоских разбиений, сначала запишем

$$\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c}\frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}} = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\frac{1-q^{i+j-1+c}}{1-q^{i+j-1}}.$$

Полагая $c = \infty$, можно считать, что знаменатель уходит (при желании строгость в этом утверждении легко восстановить). Параметр $i + j - 1$ принимает, при $a, b \to \infty$, все значения от одного до бесконечности. При этом значение h принимается (в двойном произведении по i, j) ровно h раз. Поэтому мы получаем формулу

$$\sum_{\pi\text{ - плоское разбиение}} q^{\mathrm{vol}(\pi)} = \prod_{h=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^h)^h}.$$

Начальная часть этого ряда (при q близком к нулю) имеет вид

$$1 + q + 3q^2 + 6q^3 + 13q^4 + 24q^5 + 48q^6 + 86q^7 + 160q^8 + 282q^9 + 500q^{10} + 848q^{11} + 1456q^{12} + 2427q^{13} + \dots$$

Например, есть 282 плоских разбиения с 9 кубиками, и т.д.

Материал, представленный в этой главе, в основном довольно классический. Формулы МакМагона можно найти во многих книгах по комбинаторике, а также на Википедии.

Картинки были нарисованы от руки, взяты из той же Википедии, либо сгенерированы в программе Mathematica. Исключение - трехмерная картинка замощения многоугольника в двух проекциях, которая взята из 3D модели А. Бородина.

Доказательство формулы МакМагона для шестиугольника, полученное развитием метода Гесселя-Вьенно (с помощью детерминантов) можно найти, например, в статье М. Берштейна и Г. Мерзона "Диаграммы Юнга, пути на решётке и метод отражений", или в брошюре Е. Смирнова "Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы".

Наше доказательство q-формулы МакМагона для шестиугольника (откуда пределом $q \to 1$ следует и сама формула для числа замощений шестиугольника) будет дано в следующей главе, и оно будет основано на симметрических многочленах Шура.

Больше про подсчет замещений доминошками (в том числе ацтекского бриллианта, о котором мы вообще ничего не сказали) можно узнать в:

- М. Вялый "Пфаффианы или искусство расставлять знаки…"
- Е. Смирнов "Три взгляда на ацтекский бриллиант"