Глава 2

Симметрические многочлены Шура и доказательство формул МакМагона

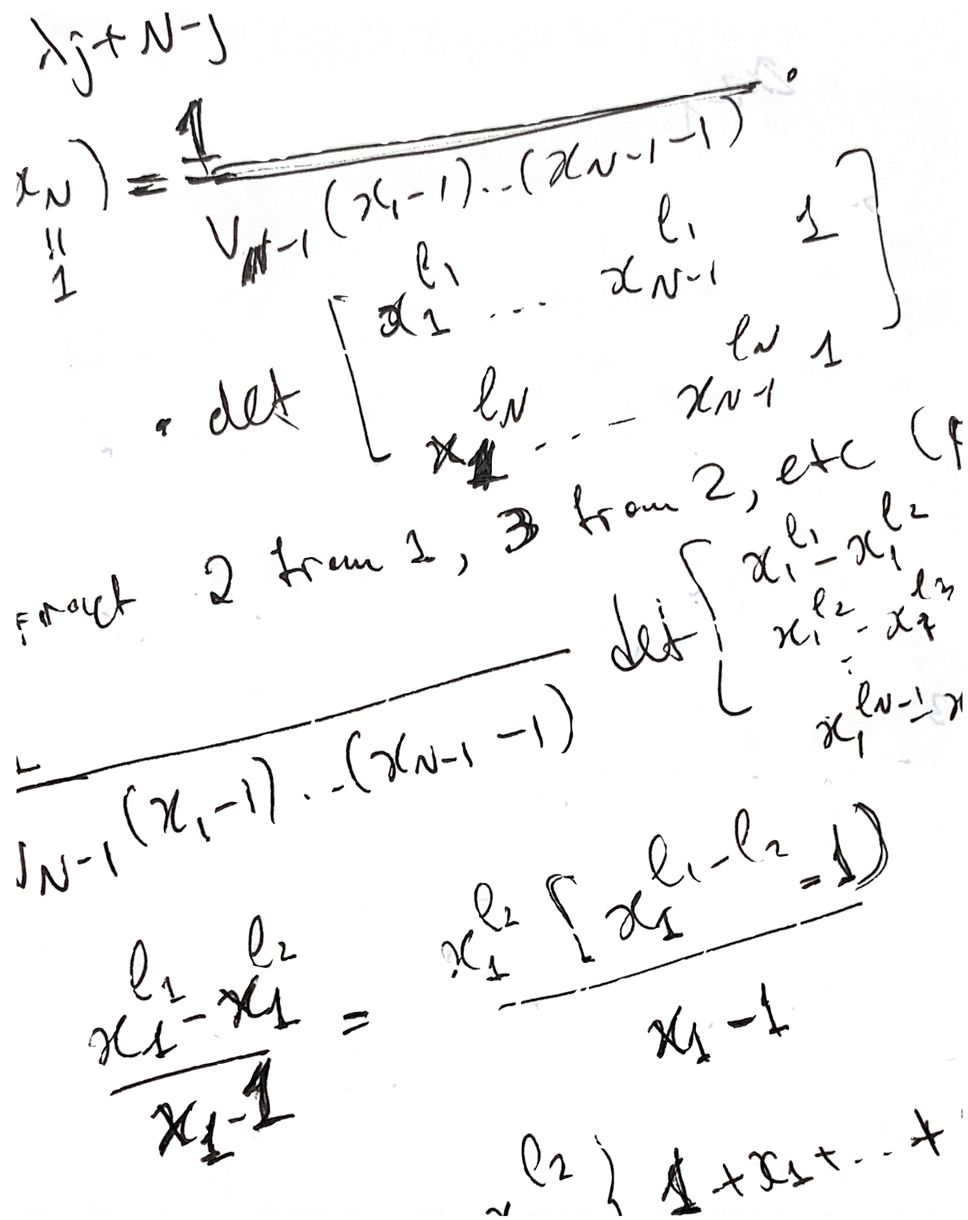
- Детерминанты - определение. Строчные и столбцовые операции
- Детерминант Вандермонда
- Многочлены Шура
- Правило ветвления многочленов Шура
- Правило ветвления и замощения ромбиками
- Косые многочлены Шура от одной переменной
- Подсчет числа замощений ромбиками
- Доказательство формул МакМагона
- Обзор: как выглядят случайные замощения больших многоугольников

ЗАЧЕМ НАМ ДЕТЕРМИНАНТЫ И СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Один из самых мощных методов исследования замощений - симметрические многочлены Шура. Они позволяют как подсчитать число замощений большого класса многоугольников, так и описать форму (и более тонкие асимптотики) больших случайных замощений.

Многочлены Шура определяются с помощью детерминантов, и нам придется ненадолго в них погрузиться. Это необходимо, чтобы дать формально полное доказательство формул МакМагона. В дальнейшем мы не будем использовать много детерминантов, а сосредоточимся на приложениях обычных и косых функций Шура.

Мы начнем с напоминания про детерминанты, затем обсудим классическое утверждение про детерминант Вандермонда, в качестве разогрева.



НАПОМИНАНИЕ О ДЕТЕРМИНАНТАХ

Детерминант (определитель) квадратной матрицы $n \times n$ - это знакопеременная сумма $n!$ произведений элементов, по одному из строки и из столбца:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)} \cdot$$

Это формальное определение может быть не очень интуитивно понятным, давайте посмотрим на примеры:

- $n = 1, \det [a] = a;$
- $n = 2, \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc;$
- $n = 3$, детерминант содержит 6 слагаемых

Отметим ключевые свойства детерминантов, которые нам понадобятся:

- Если две строки или два столбца одинаковы, то детерминант равен нулю. Более общо, если строки или столбцы линейно зависимы, то детерминант равен нулю.
- Если переставить местами две строки или два столбца, то детерминант поменяет знак.
- Если в строке или столбце матрицы все нули, кроме одного элемента, то порядок детерминанта можно уменьшить: $\det \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = A \cdot \det \begin{bmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{bmatrix}$
- Самое важное, строчные/столбцовые операции. Если в детерминанте взять строку и прибавить к ней другую строку, умноженную на любое число, то детерминант не поменяется. То же самое, если оперировать со столбцами.

ВАНДЕРМОНД

Многие детерминанты считаются явно и носят имена собственные. Один из них - *детерминант Вандермонда*

$$V_N(x_1, \ldots, x_N) = \det[x_i^{N-j}]_{i,j=1}^N = \det \begin{bmatrix} x_1^{N-1} & \ldots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^{N-1} & \ldots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \cdots & & & & \\ x_N^{N-1} & \ldots & x_N^2 & x_N & 1 \end{bmatrix}.$$

Теорема. Детерминант Вандермонда равен

$$V_N(x_1, \ldots, x_N) = \prod_{1 \le i < j \le N} (x_i - x_j).$$

Доказательство. Проводится по индукции. База для $N = 1,\ N = 2$ очевидна. Возьмем детерминант порядка N и сделаем две вещи:

- Сначала вычтем первую строчку из каждой, от этого детерминант не изменится. При этом в первой строчке получатся все элементы кроме одного - нули, поэтому порядок детерминанта уменьшится на 1.
- Затем вычтем из каждого столбца $j, j = 1, \ldots, N-2$, этой новой матрицы порядка $N-1$, столбец $j+1$, помноженный на x_1.
- После этого множители $x_i - x_1$ выносятся.

При таких преобразованиях с матрицей происходит вот что (пусть $N = 4$ для простоты):

$$\det \begin{bmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 - x_1^3 & x_2^2 - x_1^2 & x_2 - x_1 & 0 \\ x_3^3 - x_1^3 & x_3^2 - x_1^2 & x_3 - x_1 & 0 \\ x_4^3 - x_1^3 & x_4^2 - x_1^2 & x_4 - x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} x_2^3 - x_1^3 & x_2^2 - x_1^2 & x_2 - x_1 \\ x_3^3 - x_1^3 & x_3^2 - x_1^2 & x_3 - x_1 \\ x_4^3 - x_1^3 & x_4^2 - x_1^2 & x_4 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} (x_2 - x_1)x_2^2 & (x_2 - x_1)x_2 & x_2 - x_1 \\ (x_3 - x_1)x_3^2 & (x_3 - x_1)x_3 & x_3 - x_1 \\ (x_4 - x_1)x_4^2 & (x_4 - x_1)x_4 & x_4 - x_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь уже можно вынести все множители, получить V_{N-1}, и действовать по индукции. ∎

1. Докажите, что эти действия - последовательность столбовых операций (и не меняют дет.)

МНОГОЧЛЕНЫ ШУРА

Дадим определение многочлена Шура. Эти многочлены зависят от нескольких переменных $x_1, \ldots, x_N$ и индексируются последовательностями различных неотрицательных чисел $\overrightarrow{\ell} = \ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_N$:

$$s_{\overrightarrow{\ell}}(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\det[x_i^{\ell_j}]_{i,j=1}^N}{V_N(x_1, \ldots, x_N)}$$

Задача - получить *комбинаторную* формулу для $s_{\overrightarrow{\ell}}$.

Маленькие примеры:

- $N = 1, \ \overrightarrow{\ell} = (n), \ s_{\overrightarrow{\ell}}(x_1) = x_1^n$
- $N = 2, \ \overrightarrow{\ell} = (m > n), \ s_{\overrightarrow{\ell}}(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^m x_2^n - x_2^m x_1^n}{x_1 - x_2}$
  $= (x_1x_2)^n \dfrac{x_1^{m-n} - x_2^{m-n}}{x_1 - x_2} = (x_1x^2)^n \left(x_1^{m-n-1} + x_1^{m-n-2}x_2 + \ldots + x_1 x_2^{m-n-2} + x_2^{m-n-1}\right)$
  $= x_1^{m-1}x_2^n + x_1^{m-2}x_2^{n+1} + \ldots + x_1^n x_2^{m-1}$.
  Здесь мы поделили с помощью формулы разности степеней.

2. Докажите, что многочлен Шура $s_{\overrightarrow{\ell}}(x_1, \ldots, x_N)$ - действительно многочлен от $x_1, \ldots, x_N$.

Оказывается, отношение детерминантов всегда будет однородным многочленом от $x_1, \ldots, x_N$. Он и называется многочленом Шура.

3. Какова (суммарная) степень многочлена Шура? Ответ $\sum \ell_i - C_N^2$

4. Докажите, что многочлен Шура симметричен по $x_1, \ldots, x_N$

Утверждение (без доказательства).
Многочлены Шура $s_{\overrightarrow{\ell}}(x_1, \ldots, x_N)$ (когда $\overrightarrow{\ell}$ пробегает все возможные последовательности $\ell_1 > \ldots > \ell_N$) образуют базис в пространстве всех симметрических многочленов от N переменных.

ПРО ОБОЗНАЧЕНИЯ

Многочлены Шура названы в честь Исаи Шура (Schur), математика очень сложной судьбы ([Википедия](#)) ➡️
(При этом сами многочлены были известны уже в начале XIX века.)

Для приложения к замощениям нам удобно *нетрадиционное* обозначение для меток $\vec{\ell}$ многочленов Шура $s_{\vec{\ell}}$. А именно, если определить $\lambda_i = \ell_i + i - N,\ i = 1,\ldots,N,$ то эти метки нестрого упорядочены: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N \geq 0$. Мы получаем *разбиение* λ.

Всюду в литературе многочлены Шура обозначаются $s_\lambda(x_1, \ldots, x_N)$. Степень s_λ равна $|\lambda|$.

В теории представлений многочлены Шура выступают, например, как характеры представлений унитарных групп, при этом $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_N)$ - старший вес представления.

Отношение перемежания

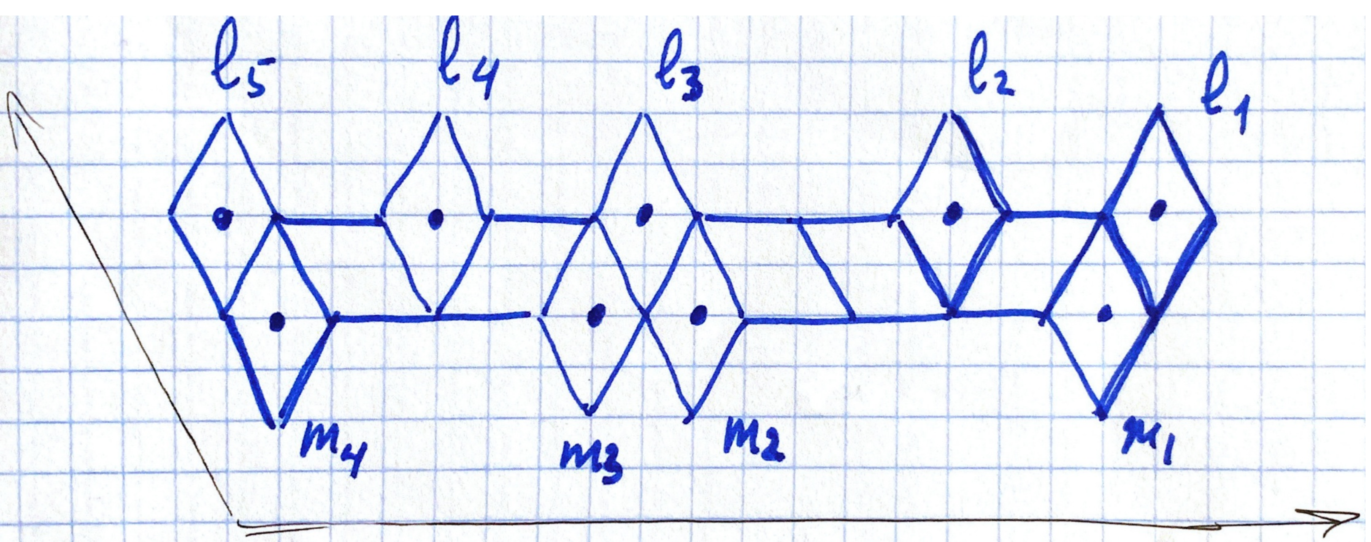
Определение. Пусть $\vec{\ell} = (\ell_1 > \ldots > \ell_N)$ и $\vec{m} = (m_1 > \ldots > m_{N-1})$ - две последовательности. Они называются *перемежающимися* (англ. *interlacing*), если

$$\vec{m} \prec\!\!\cdot\; \vec{\ell} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell_N \le m_{N-1} < \ell_{N-1} \le m_{N-2} < \ldots \ell_2 \le m_1 < \ell_1$$

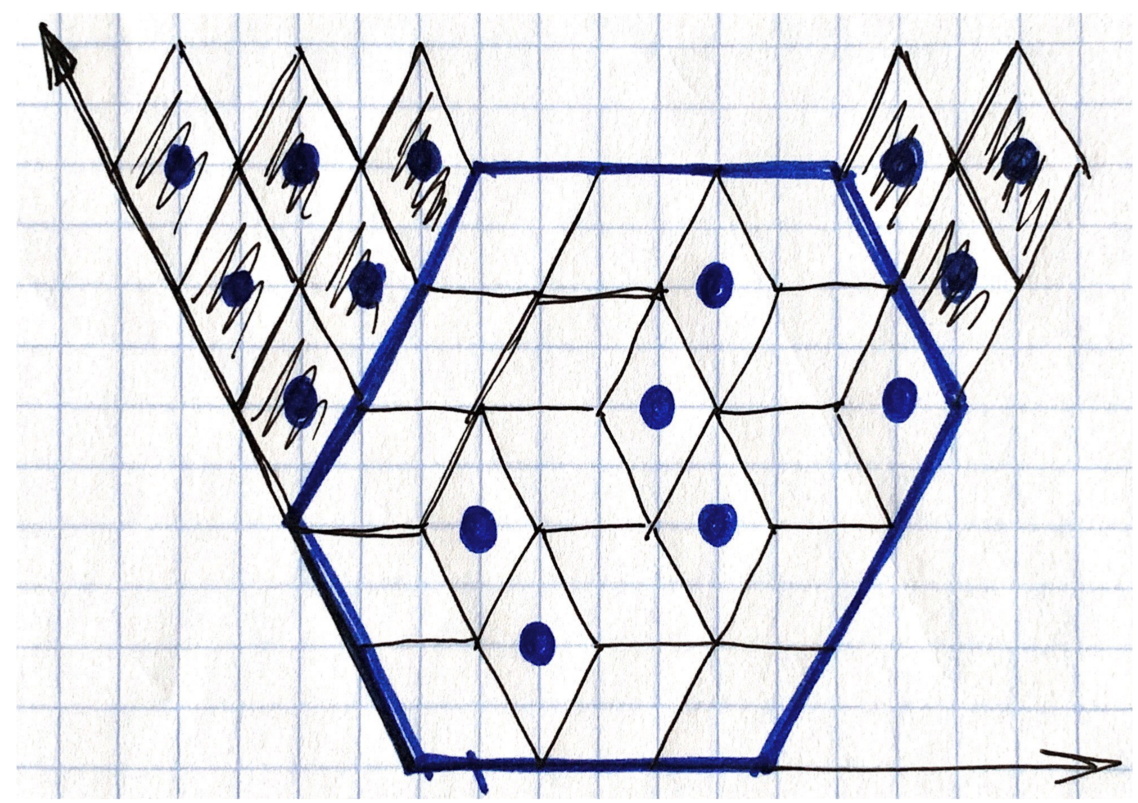
Type to enter text

Это определение немного несимметрично относительно $\vec{\ell}$ и $\vec{m}$. Но это оказывается удобным, т.к. соответствует перемежанию двух соседних слоев в замощении ромбиками!

Здесь ℓ_i, m_i - горизонтальные координаты центров ромбиков в косой системе координат. Легко видеть, что это приводит к неравенствам $m_i < \ell_i \le m_{i-1}$.



Координатизация замощений. Каждое замощение шестиугольника путем добавления вертикальных (закрашенных) ромбиков можно отождествить с перемежающимся массивом целых чисел (каждые два слоя в этом массиве связаны отношением $\prec\!\!\cdot$):



массив

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 6 & & 7 \\
& 0 & & 1 & & 4 & & 6 & \\
& & 0 & & 3 & & 5 & & \\
& & & 1 & & 3 & & & \\
& & & & 1 & & & &
\end{array}$$

Ветвление многочленов Шура

Теорема (правило ветвления многочленов Шура).

$$s_{\overrightarrow{\ell}}(x_1, \dots, x_N)\Big|_{x_N=1} = \sum_{\overrightarrow{m}:\ \overrightarrow{m} \dot{\prec} \overrightarrow{\ell}} s_{\overrightarrow{m}}(x_1, \dots, x_{N-1})$$

Замечание. В теории представлений это соответствует ограничению неприводимого представления $U(N)$ на подгруппу $U(N-1) \subset U(N)$, и разложению этого ограничения на неприводимые представления подгруппы. (Задача осмыслена и интересна для любой цепочки вложенных групп/алгебр.)

Доказательство. По индукции, используя определение многочлена Шура с помощью детерминанта. Проведем доказательство для простоты при $N = 4$. Шаги такие: вычитаем из первой строки вторую, из второй третью, и т.д. Получится детерминант, у которого в последнем столбце есть единственная единица, так что можно уменьшить порядок. Далее, первый столбец будет делиться на $x_1 - 1$, второй на $x_2 - 1$, третий на $x_3 - 1$ - и таким образом Вандермонд тоже уменьшит порядок.

$$\frac{1}{V_4(x_1, x_2, x_3, 1)} \det \begin{bmatrix} x_1^{\ell_1} & x_2^{\ell_1} & x_3^{\ell_1} & 1 \\ x_1^{\ell_2} & x_2^{\ell_2} & x_3^{\ell_2} & 1 \\ x_1^{\ell_3} & x_2^{\ell_3} & x_3^{\ell_3} & 1 \\ x_1^{\ell_4} & x_2^{\ell_4} & x_3^{\ell_4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{V_3(x_1, x_2, x_3)(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)} \det \begin{bmatrix} x_1^{\ell_1} - x_1^{\ell_2} & x_2^{\ell_1} - x_2^{\ell_2} & x_3^{\ell_1} - x_3^{\ell_2} \\ x_1^{\ell_2} - x_1^{\ell_3} & x_2^{\ell_2} - x_2^{\ell_3} & x_3^{\ell_2} - x_3^{\ell_3} \\ x_1^{\ell_3} - x_1^{\ell_4} & x_2^{\ell_3} - x_2^{\ell_4} & x_3^{\ell_3} - x_3^{\ell_4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{V_3(x_1, x_2, x_3)} \det \begin{bmatrix} \sum_{\ell_2 \le m_1 < \ell_1} x_1^{m_1} & \sum_{\ell_2 \le m_1 < \ell_1} x_2^{m_1} & \sum_{\ell_2 \le m_1 < \ell_1} x_3^{m_1} \\ \sum_{\ell_3 \le m_2 < \ell_2} x_1^{m_2} & \sum_{\ell_3 \le m_2 < \ell_2} x_2^{m_2} & \sum_{\ell_3 \le m_2 < \ell_2} x_3^{m_2} \\ \sum_{\ell_4 \le m_3 < \ell_3} x_1^{m_3} & \sum_{\ell_4 \le m_3 < \ell_3} x_2^{m_3} & \sum_{\ell_4 \le m_3 < \ell_3} x_3^{m_3} \end{bmatrix}$$

Так как детерминант - мультилинейная функция, и суммы по m_1, m_2, m_3 в каждой строке одинаковые, то получается как раз сумма $s_{\overrightarrow{m}}$ по всем $\overrightarrow{m} \dot{\prec} \overrightarrow{\ell}$. ∎

Следствие.

$$s_{\overrightarrow{\ell}}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\overrightarrow{m}:\ \overrightarrow{m} \dot{\prec} \overrightarrow{\ell}} s_{\overrightarrow{m}}(x_1, \dots, x_{N-1})\ x_N^{\sum \ell_i - \sum m_j - (N-1)}.$$

(Потому что мн. Шура однородны, и мы знаем степени.)

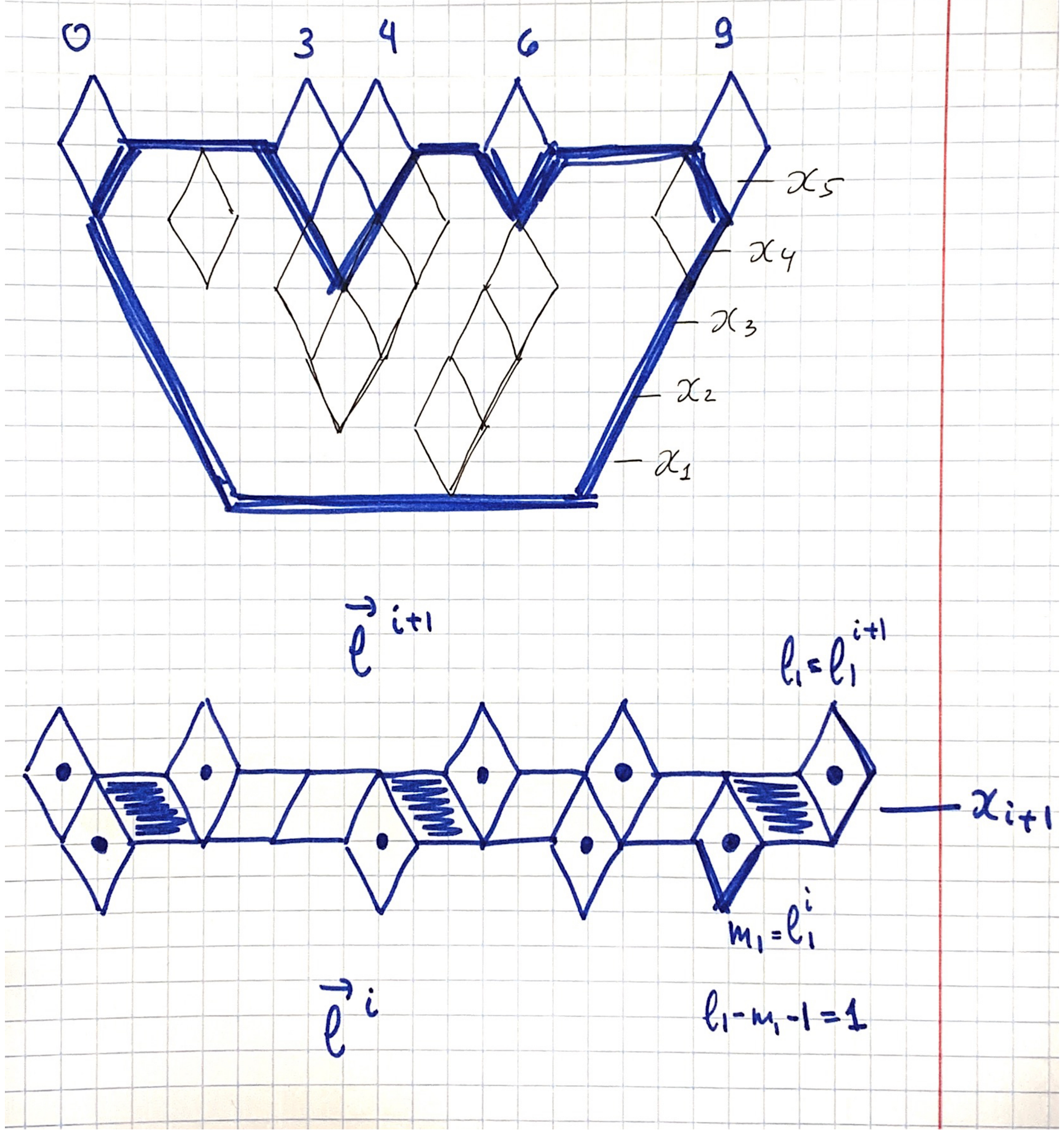
Многочлены Шура и перечисление замощений

Обозначим $|\vec{\ell}| = \sum \ell_i$.

Применяя следствие для $N-1, N-2, \dots, 2$, получаем, что

$$s_{\vec{\ell}}(x_1,\dots,x_N) = \sum_{\vec{\ell}^1 \prec \vec{\ell}^2 \prec \dots \prec \vec{\ell}^N = \ell} x_1^{|\vec{\ell}^1|} x_2^{|\vec{\ell}^2|-|\vec{\ell}^1|-1} \dots x_N^{|\vec{\ell}^N|-|\vec{\ell}^{N-1}|-(N-1)}$$

Сумма здесь ведется по всем перемежающимся массивам или, что то же самое, по всем замощениям π высоты N с верхней строчкой $\vec{\ell}$. Причем функция от π, которую мы суммируем, зависит от N параметров $x_1,\dots,x_N$ и является произведением некоторых выражений ➡️ по всем слоям.
А именно, $|\vec{\ell}^{i+1}| - |\vec{\ell}^{i}| - i$ - это число закрашенных горизонтальных ромбиков плюс крайнее значение



сверху, равное ℓ_{i+1}^{i+1}. Это **косой многочлен Шура** (от одной переменной): $s_{\vec{\ell}^{i+1}/\vec{\ell}^{i}}(x_{i+1}) = x_{i+1}^{|\vec{\ell}^{i+1}|-|\vec{\ell}^{i}|-i}$ (и по определению многочлен равен нулю, если перемежаемость не выполняется).

Число замощений с верхней строкой $\vec{\ell}$, таким образом, равно $s_{\vec{\ell}}(1,1,\dots,1)$. Но это сразу из детерминантной формулы не посчитаешь…

q-перечисление замощений

Пусть пока верхняя строчка $\vec{\ell}$ на уровне N-произвольная. Подставим в многочлен Шура геометрическую прогрессию, $s_{\vec{\ell}}(1,q^{-1},\ldots,q^{1-N})$. Тогда в сумме по замещениям получим q в степени

$$-|\vec{\ell}^{\,2}|+|\vec{\ell}^{\,1}|+1-2|\vec{\ell}^{\,3}|+2|\vec{\ell}^{\,2}|+4-3|\vec{\ell}^{\,4}|+3|\vec{\ell}^{\,3}|+9+\ldots$$
$$=\mathrm{const}(\vec{\ell},N)+\sum_{j=1}^{N}|\vec{\ell}^{\,j}|.$$

5. Докажите, что $\sum|\vec{\ell}^{\,j}|$ -это объем замощения с точностью до аддитивной константы

Таким образом, $s_{\vec{\ell}}(1,q^{-1},\ldots,q^{1-N})=q^{\mathrm{const}(\vec{\ell},N)}\sum_{\pi}q^{\mathrm{vol}(\pi)}$.

С помощью детерминантной формулы для многочлена Шура мы можем вычислить левую часть. А именно, из-за геометрической прогрессии мы увидим Вандермонд и в числителе тоже!

$$s_{\vec{\ell}}(1,q^{-1},\ldots,q^{1-N})=\frac{\det[q^{(1-i)\ell_j}]_{i,j=1}^{N}}{\prod_{i<j}(q^{1-i}-q^{1-j})}=\frac{\det[(q^{-\ell_j})^{i-1}]_{i,j=1}^{N}}{\prod_{i<j}(q^{1-i}-q^{1-j})}$$
$$=\prod_{i<j}\frac{q^{-\ell_i}-q^{-\ell_j}}{q^{1-j}-q^{1-i}}=\prod_{i<j}\frac{q^{N-\ell_i}-q^{N-\ell_j}}{q^{N+1-j}-q^{N+1-i}}=\prod_{i<j}\frac{q^{N-\ell_i}-q^{N-\ell_j}}{q^{i}-q^{j}}$$

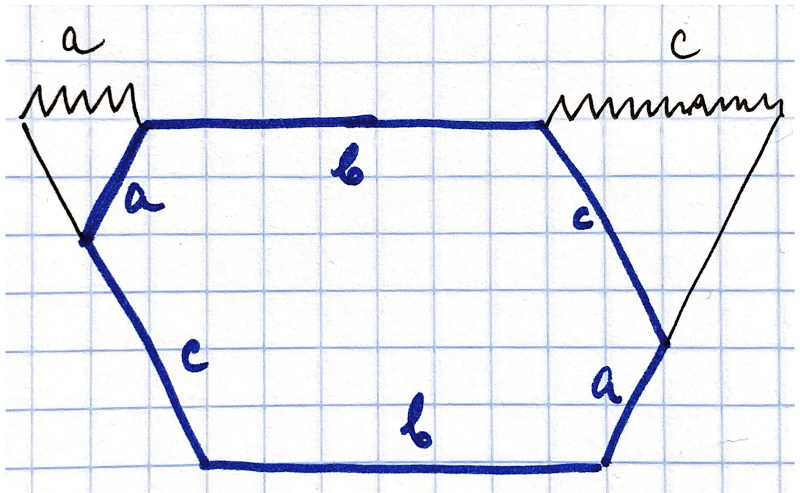
(здесь числитель и знаменатель положительны).

В этой формуле мы уже можем устремить q к единице ($q^{\mathrm{const}(\vec{\ell},N)}$ роли не играет), и получим

$$s_{\vec{\ell}}(1,1,\ldots,1)=\prod_{i<j}\frac{\ell_i-\ell_j}{j-i}.$$

Это на самом деле **формула размерности Вейля**, которая (в данном частном случае типа A, унитарных групп) дает размерность неприводимого представления.

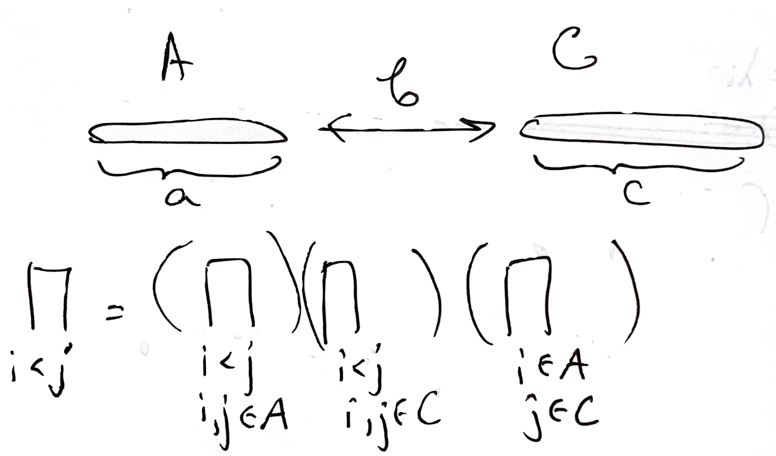
Доказательство формулы МакМагона



Теперь мы можем применить все к шестиугольнику. Если он вот такой ⬆️, то надо взять $N = a + c$, и

$\vec{\ell} = (a+b+c-1, a+b+c-2, \ldots, a+b, a-1, \ldots, 1, 0)$.

Получим формулу МакМагона из формулы размерности, q-случай оставим в качестве упражнения.

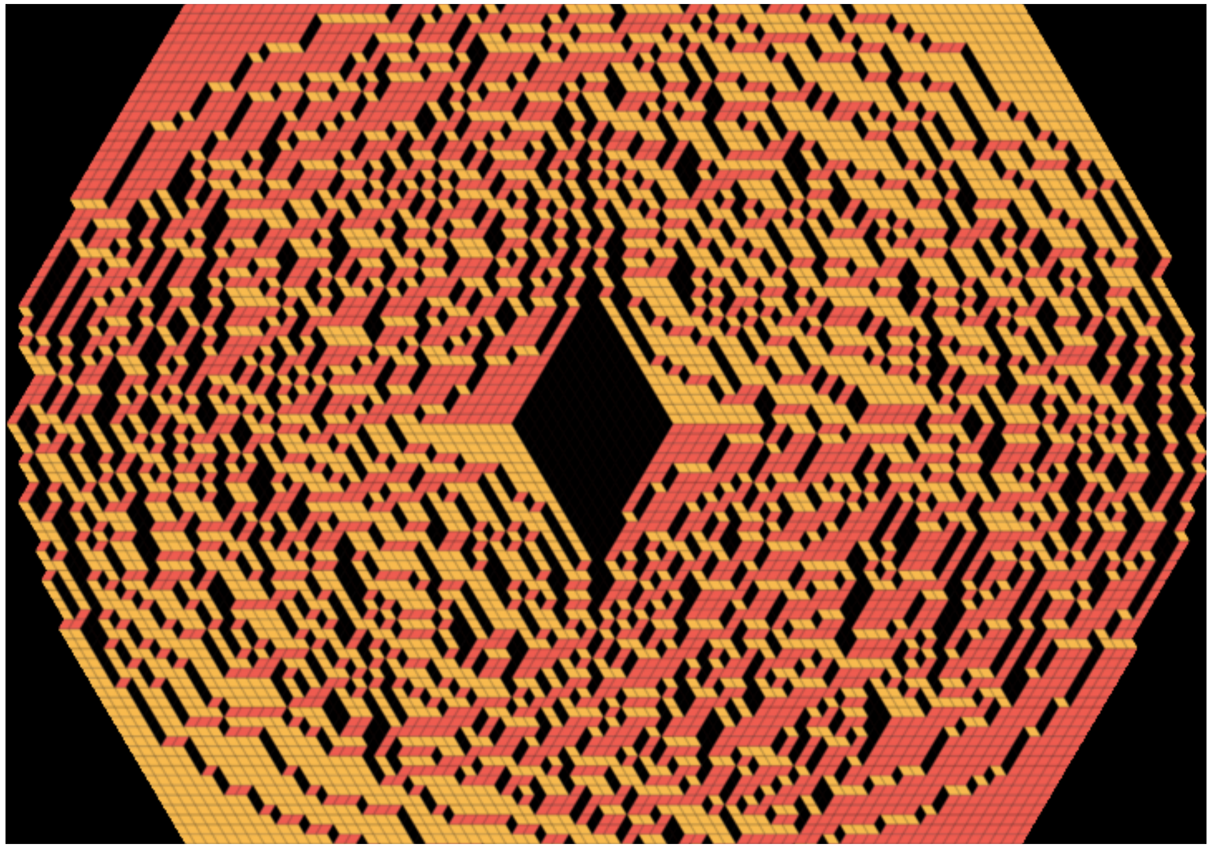


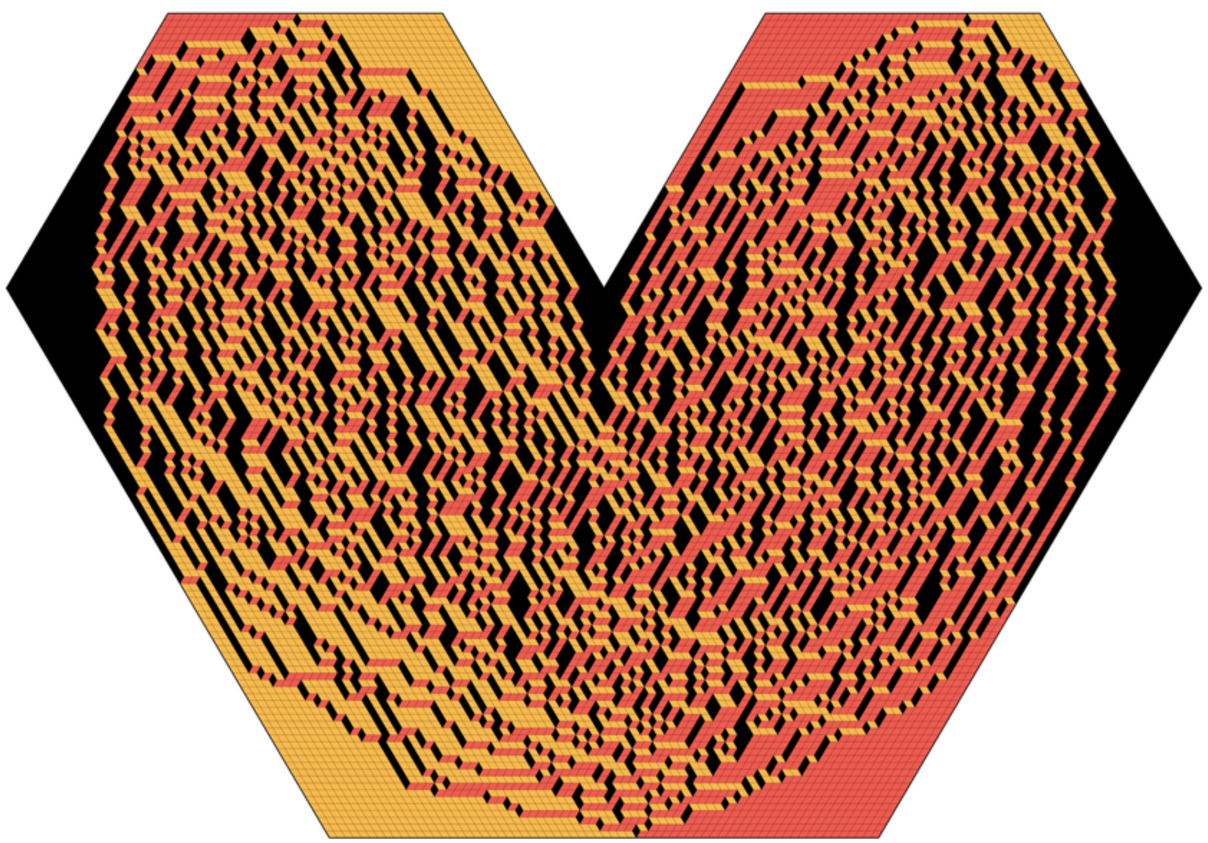
Для шестиугольника произведение $\prod_{1\le i<j\le a+c} \frac{\ell_i - \ell_j}{j-i}$ разбивается в три. В первой и третьей части оба индекса i, j принадлежат одной и той же плотной упаковке; во второй - разным. Оказывается, что первая и третья часть сокращаются. Получается, что произведение дает

$$\prod_{1\le i<j\le a+c} \frac{\ell_i - \ell_j}{j-i} = \prod_{i=1}^{c}\prod_{j=1}^{a} \frac{a+b+c-i-(a-j)}{(c+j)-i} \quad \blacksquare$$

8. Убедитесь, что это выражение совпадает с формулой МакМагона для числа замощений $\Omega_{a,b,c}$

9. Выведите q-формулу МагМагона из формулы для $s_{\vec{\ell}}(1, q^{-1}, \ldots, q^{1-N})$





Случайные замощения

Мы будем рассматривать две вероятностные ситуации: **равномерную** и **параметрическую**. Зафиксируем многоугольник (например, шестиугольник) и рассмотрим все его замощения.

В равномерной модели, разыграем случайное замощение равновероятно среди всех: $Prob(\pi) = \frac{1}{Z}$, где Z - статсумма, нормировочная константа (мы ее считали для шестиугольника, она дается формулой МакМагона).

Параметрическая модель зависит от положительных $x_1, \dots, x_N$ (N - высота многоугольника), и определяется

$$Prob(\pi) = \frac{\text{вклад замощения в многочлен Шура}}{s_{\vec{\ell}}(x_1, \dots, x_N)}.$$

Здесь "вклад" - это моном $x_1^{|\vec{\ell}^1|} x_2^{|\vec{\ell}^2|-|\vec{\ell}^1|-1} \dots x_N^{|\vec{\ell}^N|-|\vec{\ell}^{N-1}|-(N-1)}$.

Асимптотика

Асимптотика равномерной модели хорошо изучена, а параметрической - в основном только в q-случае, да и там сделано сильно меньше. В равномерной модели:

- Замороженная граница - алгебраическая кривая минимальной степени, касающаяся всех сторон или продолжений
- Предельная форма трехмерной картинки имеет алгебраическую нормаль
- Глобальные флуктуаций вокруг предельной формы - гауссова свободное поле
- В решеточном пределе в “гуще” - экстремальная мера на замощениях (постоянной плотности) всей плоскости
- На границе вокруг замороженной границы - кривые Эйри

Ссылок на работы слишком много, чтобы их здесь приводить…
В этой науке еще очень много недоказанных гипотез, и почти ничего не известно для общей параметрической модели…