Аксиома детерминированности. Заметки к курсу в летней школе "Современная математика", Дубна.

Федор Пахомов

2019

1 Бесконечные игры

Мы будем рассматривать игры двух игроков I и II с дискретным временем. В такой игре имеется ориентированный граф возможных позиций P, с фиксированной стартовой позицией p_0. Далее игроки поочередно ходят: на шагах с четными номерами ходит I, а на шагах с нечетными номерами II. В каждый свой ход игрок может выбрать новую позицию среди тех позиций в которые ведут ребра из текущей позиции. Если в какой-нибудь позиции у игрока который должен сделать ход возможных ходов нет, то игра завершается. Но при этом мы разрешаем игры с бесконечной длительностью. Протоколом такой игры оказывается последовательность позиций $s = \langle s_0, s_1, \ldots \rangle$ (в зависимости от того, пришли ли мы в тупиковую позицию, s будет либо конечной или же бесконечной).

Мы рассматриваем игры только с двумя возможными исходами — победой I или же победой II. В конечных играх выигрышными или проигрышными обычно считаются конечные позиции в игре. В бесконечных же играх выигрышным или проигрышным считается протокол игры. Таким образом игра — это четверка $\langle P, p_0, D, A \rangle$ состоящая из графа позиций, начальной позиции p_0, множества D всех тупиковых позиций в которых выигрывает игрок I и множества A всех бесконечных протоколов выигрышных для игрока I.

Примером такого рода игры является вариант шахмат, где и разрешаются бесконечно длинные партии и при этом, ничья засчитывается как победа играющего черными.

Теорема 1 (Цермело 1913). *Если в игре $G = \langle P, p_0, D, A \rangle$ множество позиций P конечно и A пусто, то либо существует выигрышная стратегия для игрока I, либо существует выигрышная стратегия за игрока II.*

Доказательство. Рассматривая игры описанного формата в доказательстве этой и следующей теоремы нам будет удобно считать, что по текущей позиции всегда можно однозначно определить, кто из игроков делает ход.

Если граф позиций игры был таков, что в одну и туже позицию при некоторых течениях игры в начале своего хода могли попасть оба игрока, то мы можем модифицировать граф позиций, чтобы исключить такую возможность. Для этого по каждой позиции s мы строим пару позиций s^I и s^{II} (s в которой ходит I и s в которой ходит II) и если в исходном графе бы ход из s в q, то в новом графе будет ход из s^I в q^{II} и из s^{II} в q^I. Выигрышные условия при этом модифицируются естественным образом. Легко видеть, что новая и исходная игра эквивалентны в достаточно сильном смысле — есть взаимо однозначное соответствие между частичными протоколами исходной игры и новой.

Теперь докажем теорему Цермело. Мы постепенно находим позиции из которых I имеет выигрышную стратегию за 0, 1, ... ходов. Так как позиций конечное число, после некоторого n меньшего или равного числу позиций в P, новых позиций с выигрышной стратегий для I за $m > n$ найдено уже не будет. Если мы уже нашли выигрышную стратегию за I в позиции p_0, то доказывать нечего. Иначе игрок II, при игре начатой в p_0, уклоняясь от позиций выигрышных для I за $\leq n$ ходов всегда сможет свести игру либо к тупиковой позиции выигрышной для него, либо к бесконечной длительности (что также является победой II). □

Как легко показать, идею теоремы Цермело можно обобщить на произвольные игры

Теорема 2 (Гейл, Стюарт 1953)**.** *Если в игре $G = \langle P, p_0, D, A \rangle$ множество A состоит только из позиций, то либо существует выигрышная стратегия для игрока I, либо существует выигрышная стратегия за игрока II.*

Доказательство. Рассмотрим множество всех частичных протоколов W из которых у игрока I есть выигрышная стратегия. Если $\langle\rangle \in W$, то это означает, что у I есть выигрышная стратегия для игры G. Иначе II играет таким образом, чтобы в любой свой ход соответствующий частичному протоколу $s \notin W$ сделать такой ход, чтобы не попасть в W. Если бы такого хода не было, это бы означало, что $s \in W$ так как на любой ход II у I было бы выигрышное продолжение. □

Заметим, что достачно рассматривать более узкий класс игр, чем мы пока делали. А именно класс игр, в которых можно делать ходы между произвольными позициями из P, т.е. P полный граф. В таких играх необходимость в указание p_0 и D, а P можно считать просто множеством. Для множества $A \subseteq P^\omega$ (множество P^ω это множество всех счетных последовательностей из элементов P) мы обозначаем такие игры как $G^P(A)$ или кратко $G(A)$.

По игре $H = \langle P, p_0, D, A \rangle$ построим исходного вида построим $A' \subseteq P^\omega$ такое, что H будет эквивалентна $G^P(A')$. Множество A' состоит из всех выигрышных протоколов из A, всех протоколов s, которые начинаются с

H-корректной игры завершенной на позиции из D, а также всех протоколов в которых первым игроком сделавшим ход невозможный в H был игрок II. Фактически протоколы, которых не было в A но появились в A' симулируют правила H. Легко видеть, что любая выигрышная стратегия в G легко преобразуется в выигрышную стратегию в G' за того же игрока (и наоборот).

На множестве P^ω естественным образом определена топология. Открытая база этой топологии состоит из множеств $B_s = \{x \supseteq s \mid x \in P^\omega\}$ для s из множества $P^{<\omega}$ конечных последовательностей из элементов P. Произвольное открытое множество является объединением произвольного числа множеств вида B_s.

Заметим, что игры $G(A)$ с открытым множеством $A = \bigcup_{e \in E} B_e$ эквивалентны играм из класса покрытого теоремой Гейла-Стюарта. А именно рассматривается игра на дереве $T \subseteq P^{<\omega}$, которое состоит из всех $s \in P^{<\omega}$ кроме тех которые являются продолжениями последовательностей из E. За один ход можно перейти от последовательности $\langle p_0, \ldots, p_{n-1} \rangle$ к любой из последовательностей $\langle p_0, \ldots, p_{n-1}, p_m \rangle$. В качестве начальной позиции мы рассматриваем пустую позицию $\langle \rangle$. Легко видеть, что любая выигрышная стратегия в $G(A)$ преобразуется в выигрышную стратегию в $\langle T, \langle \rangle, E, \emptyset$ и наоборот.

Теорема 3 (Гейл, Стюарт 1953). *Для открытых $A \subseteq P^\omega$ в игре $G = \langle P, A \rangle$ либо существует выигрышная стратегия для игрока I, либо существует выигрышная стратегия за игрока II.*

2 Континуум гипотеза

Далее мы будем доказывать ряд результатов, используя аксиому детерминированности AD, утверждающую, что все игры $G^P(A)$ для счетных P детерминированы (т.е. для них либо существует выигрышная стратегия для игрока I, либо существует выигрышная стратегия за игрока II). Отметим, что аксиома детерминированности, как мы увидим, противоречит аксиоме выбора AC, утверждающей, что для всякого множества непустых множеств $\mathcal{S}$ существует функция $f\colon \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S}$ такая, что $f(A) \in A$ для всех $A \in \mathcal{S}$.

Теорема 4. *Из* AD *следует, что всякое подмножество континуума либо не более чем счетно, либо континуально.*

Доказательство. В силу континуальность множества 2^ω всех бесконечных последовательностей из 0 и 1, достаточно доказать, что всякое $A \subseteq 2^\omega$ либо счетно либо континуально.

Рассмотрим игру $G^*(A)$ в которой игроки I,II ходят конечными $\{0,1\}$-последовательностями u_{2n} и u_{2n+1} соответственно. При этом, игрок II может ходить только последовательностями длины 1, т.е. либо последовательностью 0 либо последовательностью 1. В игре $G^*(A)$ выигрывает I, если бесконечная $\{0,1\}$-последовательность $u_0 u_1 u_2 \ldots \in A$.

Покажем, что если в $G^*(A)$ выигрышная стратегия есть у I, то A континуально. Такая стратегия определяет инъективную функцию $f\colon 2^\omega \to A$, которая переводит $\{0,1\}$-последовательность, которую мы понимаем как ходы $u_1u_3u_5\ldots$ игрока II в бесконечную последовательность $u_0u_1u_2\ldots$, где игрок I ходил согласно своей стратегии. Область значений f вложена в A просто по той причине, что стратегия I была выигрышной. Покажем, что для различных последовательностей $u_1u_3u_5\ldots$ и $u'_1u'_3u'_5\ldots$ их f-образы $u = u_0u_1u_2u_3u_4u_5\ldots$ и $u' = u'_0u'_1u'_2u'_3u'_4u'_5\ldots$ различны. Мы находим первое n, что $u_{2n+1} \neq u'_{2n+1}$ и замечаем, что в силу определения, $u_{2k} = u_{2k}$ для всех $k \leq n$. Таким образом у u и u' есть общее начало $u_0\ldots u_{2n}$ и они отличаются в следующем символе и следовательно u и u' различны.

Теперь предположим, что в $G^*(A)$ выигрышная стратегия есть у II и покажем, что A не более чем счетно. Фиксируем стратегию игрока I. Будем говорить, что частичный протокол $u_0,\ldots,u_{2n-1}$ (здесь n может быть равно 0, что соответствует пустому протоколу, т.е. самому началу игры) отвергает $x \in 2^\omega$, если $u_0u_1\ldots u_{2n-1} \subsetneq x$, но далее, вне зависимости от выбора u_{2n} игроком I, последующий ход u_{2n+1} игрока II таков, что $u_0\ldots u_{2n+1} \not\subseteq x$. Чтобы показать не более чем счетность A, мы покажем, что 1. каждый частичный протокол отвергает не более одного $x \in 2^\omega$ и 2. все $x \in A$ отвергаются каким-нибудь частичным протоколом. В комбинации это даст нам возможность определить инъекцию из A в множество всех частичных протоколов, которое счетно.

Начнем с доказательства 1. Предположим для противоречия, что две неравные бесконечные последовательности $x, y \in 2^\omega$ отвергаются одними и тем же частичным протоколами $u_0,\ldots,u_{2n-1}$. В этом случае $u_0\ldots u_{2n-1}$ является как началом x, так и началом y. Рассмотрим в качестве u_{2n} последовательность максимальной возможной длины такую, что $u_0\ldots u_{2n-1}u_{2n}$ все ещё является началом и x и y (если бы таким свойством обладали сколь угодно длинные u_{2n}, то x и y должны были бы совпасть). В силу нашего выбора u_{2n}, последовательность $u_0\ldots u_{2n-1}u_{2n}u_{2n+1}$ (здесь u_{2n+1} выбирается согласно стратегии игрока II) будет началом в точности одного из двух слов x, y. Если $u_0\ldots u_{2n-1}u_{2n}u_{2n+1}$ начало x, то частичный протокол $u_0,\ldots,u_{2n-1}$ не отвергал x, если же $u_0\ldots u_{2n-1}u_{2n}u_{2n+1}$ начало y, то частичный протокол $u_0,\ldots,u_{2n-1}$ не отвергал y.

Для доказательства 2. рассмотрим $x \in 2^\omega$ которая не отвергается никаким протоколом и покажем, что при нашей фиксированной стратегии II есть ходы u_{2n} игрока I при которых $x = u_0u_1u_2\ldots$ (далее тот факт что стратегия II была выигрышной влечет, что $x \notin A$). Мы строим искомую последовательность $u_0, u_2, u_4, \ldots$ по индукции поддерживая то свойство, что при нашем выборе очередного u_{2n} последовательность $u_0u_1u_2\ldots u_{2n}u_{2n+1}$ будет началом x. Мы всегда можем сделать такой выбор очередного u_{2n} так как по предположению индукции $u_0u_1u_2\ldots u_{2n-1}$ является началом x и существование искомого u_{2n} гарантируется тем фактом, что частичный протокол $u_0,\ldots,u_{2n-1}$ не отвергал x. Выходящая от сюда последовательность $u_0u_1u_2\ldots$ совпадет с x так как её сколь угодно длинные начальные фрагменты $u_0\ldots u_{2n-1}$ будут начальными фрагментами x. □

На самом деле мы доказали даже больше, чем тот факт, что A счетно или континуально, а именно то, что A или счетно или содержит совершенное ядро, т.е. непрерывный образ 2^ω. Отметим, что исполь

3 Игра Банаха-Мазура

Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется нигде неплотным, если для любого интервала I найдется интервал $I' \subseteq I$ такой, что $I' \cap A = \emptyset$. Множество A называется множеством первой категории Бэра, если оно является объединением счётного числа нигде неплотных множеств. Как легко доказать, ни один интервал не является множеством первой категории Бэра. Тем самым естественно считать множества первой категории, в некотором смысле, "маленькими" подмножествами прямой.

Множество A обладает свойством Бэра, если оно представимо в виде $A = O \triangle M = (O \setminus M) \cup (M \setminus O)$, где O открыто, а M первой категории Бэра.

Для $A \subseteq \mathbb{R}$ определим игру $BM(A)$, известную, как игра Банаха-Мазура. Игроки I и II поочередно выбирают интервалы с рациональными концами I_n (для четных n интервал I_n выбирает I, а для нечетных n интервал I_n выбирает II). При этом интервал I_{n+1} должен быть вложен в I_n. Игрок I выигрывает, если $A \cap \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Теорема 5. *1. В игре $BM(A)$ есть выигрышная стратегия за II $\iff$ A множество первой категории Бэра.*

2. В игре $BM(A)$ есть выигрышная стратегия за I $\iff$ для некоторого интервала с рациональными концами I множество $I \setminus A$ имеет первую категорию Бэра.

Доказательство. В силу симметричности игры 2. тривиальным образом следует из 1.

Пусть $A = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$, где A_i тощие. Тогда выигрышной является стратегия II при которой в качестве интервала I_{2n+1} он выбирает некий интервал непересекающийся с A_n. Ясно что при такой стратегии то $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ будет иметь пустое пересечение со всеми A_i и соответственно со всем A.

Теперь рассмотрим выигрышную стратегию за II в игре $BM(A)$ и покажем, что A множество первой категории. Мы говорим, что частичный протокол p вида $I_0, \ldots, I_{2n-1}$ отвергает точку $a \in \mathbb{R}$, если $a \in I_{2n-1}$, но какой бы I_{2n} не выбрал I, в ответ II, играя по рассмотренной стратегии, выберет I_{2n+1}, что $a \notin I_{2n+1}$. Обозначим, через $R(p)$ множество всех точек отвергаемых p. Заметим, что $R(p)$ тощее множество. В тоже время, если какую-то точку a не отвергает ни один протокол p, то легко предъявить действия I, которые приведут к построению последовательности $I_0, I_1, \ldots$ такой, что $a \in I_n$ для всех n, а следовательно в силу выигрышности стратегии II точка

$a \notin A$. Таким образом A является объединением тощих множеств $R(p)$, где p пробегает лишь счетное число значений. $\square$

Следствие 1. *Из* AD *следует, что все множества обладают свойством Бэра.*

Доказательство. Для данного множества A рассмотрим семейство $\mathcal{S}$ состоящее из всех интервалов с рациональными концами I, что $I \setminus A$ первой категории Бэра. Рассмотрим $A' = A \triangle \bigcup \mathcal{S}$. Легко видеть, что $I \setminus A'$ не будет множеством первой категории Бэра ни для одного I. Тем самым, в игре $BM(A')$ игрок I выиграть не сможет. Следовательно, по AD в $BM(A')$ выигрывает II и A' множество первой категории Бэра. Следовательно $A = \bigcup \mathcal{S} \triangle A'$ обладает свойством Бэра. $\square$

Множество $A \subseteq [0,1)$ называется множеством Витали, если для всякого $x \in \mathbb{R}$ существует единственное $q \in \mathbb{Q}$, что $x+q \in A$. Для $q \in \mathbb{Q}$ и множества Витали A обозначим через A_q множество Витли $\{\{x+q\} \mid x \in A\}$. Легко показать, что для всякого $q \in \mathbb{Q}$ меры $\mu_*(A_q) = \mu_*(A)$ и $\mu^*(A_q) = \mu^*(A)$. И как легко видеть? для каждого множества Витали A семейство $\{A_q | q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)\}$ состоит из попарно непересекающихся множеств и его объединение это весь полуинтервал $[0,1)$.

Используя аксиому выбора легко доказать, что существует некоторое множество Витали A, а тем самым и недетерминированная игра. Соответственно аксиома выбора противоречит аксиоме детерминированности.

Используя тот факт, что никакой интервал не обладает свойством Бэра легко установить, что всякое множество Витали A с одной стороны не является множеством первой категории Бэра, а с другой стороны, $I \setminus A$ не является множеством первой категории ни для какого интервала $I \subseteq [0,1)$. Таким образом, игра $BM(A)$ недетерминирована для всех множеств Витали A.

4 Все множества измеримы по Лебегу

Для множества $A \subseteq [0,1]$ рассмотрим множества не более чем счетные множества интервалов $C = \{(a_i, b_i) \mid i \in I_X\}$ которые покрывают его, т.е. $A \subseteq \bigcup\limits_{i \in I_C} (a_i, b_i)$. Внешняя мера Лебега $\mu^*(A)$ — это точная нижняя грань сумм $\sum_{i \in I_C} b_i - a_i$ по всем C. Внутренняя мера Лебега $\mu_*(A) = 1 - \mu^*([0,1] \setminus A)$.

Легко показать, что для любого A имеет место неравенство $\mu^*(A) \geq \mu_*(A)$ (иначе можно было бы получить покрытие отрезка $[0,1]$ интервалами суммарная длина которых < 1, далее по теореме Гейне-Бореля выделить из него конечное подпокрытие, а отсутствие конечного покрытия $[0,1]$ интервалами суммарной длины < 1 очевидно). Если же $\mu^*(A) = \mu_*(A)$, то мы говорим, что множество измеримо по Лебегу и полагаем $\mu(A) = \mu^*(A) = \mu_*(A)$.

Теорема 6. *Из* AD *следует, что всякое $A \subseteq [0,1]$ измеримо по Лебегу.*

Доказательство. Для рациональных чисел ν таких, что $0 < \nu < 1$ мы определяем игры $G_\nu(A)$. Неформально задача игрока I состоит в том чтобы "доказать", что $\mu^*(A) < \nu$, а игрока II в том, чтобы помешать I. Ход игры вплоть до хода $2n$ будет определять последовательность вложенных отрезков $[0,1] = I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq \ldots \supsetneq I_n$ и последовательность рациональных чисел $\nu = r_0 > r_1 > \ldots > r_n$ таких, что длины $|I_i| = \frac{1}{2^n}$ и $r_i < \frac{1}{2^n}$. На ходу номер $2n$ игрока I его оставшаяся задача состоит в том, чтобы "доказать", что $\mu^*(A \cap I_n) < r_n$. Для этого I выбирает рациональные числа $q_{n,0} > 0$ и $q_{n,1} > 0$ такие, что $q_{n,0} + q_{n,1} < r_n$. Если $q_{n,i} < \frac{1}{2^{n+1}}$, то I дает гарантию, что он может "доказать", что $\mu^*(A \cap I_n^i) < q_{n,i}$. Если же $q_{n,i} = \frac{1}{2^{n+1}}$, то I соглашается, что мера $\mu^*(A \cap I_n^i)$ может быть произвольной. На следующем же ходу $2n+1$ игрок II решает, какую из гарантий I он будет проверять (в силу того, что $r_n < \frac{1}{2^{n+1}}$ игрок II даст по крайней мере одну гарантию). В результате такой игры мы получаем систему вложенных отрезков $[0,1] = I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \ldots$ пределом которых является некоторая точка $e \in [0,1]$. Игрок I выигрывает, если ему удалось добиться того, чтобы $e \notin A$.

Далее мы докажем, что если в $G_\nu(A)$ есть выигрышная стратегия за игрока I, то $\mu^*(A) < \nu$, а если за игрока II, то $\mu_*(A) \geq \nu$. Пока же мы докажем, что из этих двух утверждений следует измеримость A. Заметим, что в этом семействе игр для $\nu_1 < \nu_2$ игра $G_{\nu_2}(A)$ "проще" чем $G_{\nu_1}(A)$ для игрока I (всякая выигрышная стратегия I в $G_{\nu_1}(A)$ дает выигрышную стратегию в $G_{\nu_2}(A)$), а игра $G_{\nu_1}(A)$ в том же смысле "проще" чем $G_{\nu_2}(A)$ для игрока II. Таким образом, из аксиомы детерминированности следует, что есть критическое значение $\nu_0 \in [0,1]$ такое, что для всех $0 < \nu < \nu_0$ в играх $G_\nu(A)$ есть выигрышная стратегия за игрока II, а для всех $1 > \nu > \nu_0$ в играх $G_\nu(A)$ есть выигрышная стратегия за игрока I. Следовательно $\mu^*(A) \leq \nu$ для любого $0 < \nu < \nu_0$ и $\mu_*(A) \leq \nu$ для любого $1 > \nu > \nu_0$. Так как $\mu^*(A) \geq \mu_*(A)$, мы видим, что $\nu_0 = \mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$.

Сейчас мы рассмотрим некоторую выигрышную стратегию в $G_\nu(A)$ за игрока I и покажем, что $\mu^*(A) < \nu$. Подавая на вход данной стратегии I различные конечные наборы ходов игрока II, мы извлекаем множество U всевозможных отрезков про которые игрок I отказался давать гарантии. Так как существует лишь счетное число конечных протоколов, множество U счетно. Из определения игры ясно, что $\sum_{J\in U} |J| < \nu$. Кроме того, легко видеть, что при подходящей игре II (и рассмотренной стратегии I) мы можем попасть в любую точку $e \in [0,1] \setminus \bigcup\limits_{J\in U} J$; в силу выигрышности рассмотренной стратегии, любое такое e не является элементом A. Путем покрытия каждого отрезка из U интервалом лишь немногим большим его легко, для каждого конкретного $\delta > 0$ мы изготавливаем покрытие A интервалами суммарной длины $\leq \sum_{J\in U} |J| + \delta$. Тем самым, $\mu^*(A) \leq \sum_{J\in U} |J| < \nu$.

Для завершения доказательства рассмотрим некоторую выигрышную стратегию в $G_\nu(A)$ за игрока II и покажем, что $\mu_*(A) \geq \nu$. Для этого по данной стратегии для каждого рационального $0 < \delta < \nu$ мы построим выигрышную стратегию за игрока I в игре $G_{1-\nu+\delta}([0,1] \setminus A)$; от сюда, по доказанному выше будет следовать, что $\mu^*([0,1]\setminus A) < 1-\nu+\delta$, тем самым $\mu_*(A) > \nu-\delta$ и в силу произвольности δ мы получаем $\mu_*(A) \geq \nu$.

Далее мы фиксируем рациональное $0<\delta<\nu$ и определяем выигрышную стратегию в $G_{1-\nu+\delta}([0,1]\setminus A)$ за игрока I. Стратегия будет работать таким образом, чтобы для каждой позиции $\langle q_{0,0}, q_{0,1}\rangle, u_0, \ldots, \langle q_{n,0}, q_{n,1}\rangle, u_n$ в игре $G_{1-\nu+\delta}([0,1]\setminus A)$, в которую он сможет попасть играя по определяемой стратегии, игрок I будет знать позицию $\langle q'_{0,0}, q'_{0,1}\rangle, u_0, \ldots, \langle q'_{n,0}, q'_{n,1}\rangle, u_n$ игры $G_\nu(A)$, которая совместна с фиксированной выигрышной стратегией II в $G_\nu(A)$. При этом, пара $\langle q'_{n,0}, q'_{n,1}\rangle$ определяется только после хода игрока II числом u_n таким образом, чтобы из позиции $\langle q'_{0,0}, q'_{0,1}\rangle, u_0, \ldots, \langle q'_{n,0}, q'_{n,1}\rangle$ в игре $G_\nu(A)$ игрок II (играя по фиксированной нами стратегии) отвечал бы тем же u_n. Значения $q'_{n,0}$ и $q'_{n,1}$ будут такими, что $\frac{1}{2^{n+1}} - q'_{n,0} + \frac{\delta}{4^{n+1}} < q_{n,0}$ и $\frac{1}{2^{n+1}} - q'_{n,1} + \frac{\delta}{4^{n+1}} < q_{n,1}$. Ясно, что если мы сможем задать стратегию с таким свойством, то любая игра по ней с протоколом $\langle q_{0,0}, q_{0,1}\rangle, u_0, \ldots$ приведет нас к тому же $e\in[0,1]$, что и игра по выигрышной стратегии для II в игре $G_\nu(A)$ с протоколом $\langle q'_{0,0}, q'_{0,1}\rangle, u_0, \ldots$, а тем самым $a\in A$, чего и требовалось достичь игроку I в игре $G_{1-\nu+\delta}([0,1]\setminus A)$.

Пусть мы находимся в позиции p вида $\langle q_{0,0}, q_{0,1}\rangle, u_0, \ldots, \langle q_{n,0}, q_{n,1}\rangle, u_n$ в игре $G_{1-\nu+\delta}([0,1]\setminus A)$ и в игре $G_\nu(A)$ уже фиксирована позиция p' вида $\langle q'_{0,0}, q'_{0,1}\rangle, u_0, \ldots, \langle q'_{n,0}, q'_{n,1}\rangle, u_n$. Теперь наша задача сделать ход $\langle q_{n,0}, q_{n,1}\rangle$ за I и далее, в зависимости от выбора u_n игроком II на следующий ход, фиксировать значение $\langle q'_{n,0}, q'_{n,1}\rangle$ (которое в игре $G_\nu(A)$ приводит к ходу II тем же u_n).

Для определения $\langle q_{n,0}, q_{n,1}\rangle$, мы посмотрим на то как отвечает II по своей выигрышной стратегии на всевозможные ходы $\langle q''_{n,0}, q''_{n,1}\rangle$ из позиции p'. В целом, чем больше значения $q''_{n,0}$ ($q''_{n,1}$), тем сложнее было выиграть II, сходив $u_n=0$ ($u_n=1$). Мы определяем числа $\eta_{n,i}$ равные точной верхней грани значений $q''_{n,i}$ которые можно дополнить до некого хода $\langle q''_{n,0}, q''_{n,1}\rangle$ игрока I из позиции p', который приведет к ответу $u_n=i$ игрока II; если таких $q''_{n,i}$ нет, то мы полагаем $\eta_{n,i}=0$. Легко видеть, что $\eta_{n,0}+\eta_{n,1} \geq r'_n$. Если $\eta_{n,i} \leq \frac{\delta}{4^{n+1}}$, то мы полагаем $q_{n,i} = \frac{1}{4^{n+1}}$. Если же $\eta_{n,i} > \frac{\delta}{4^{n+1}}$, то в качестве $q_{n,i}$ мы выбираем некоторое рациональное число такое, что $\frac{1}{2^{n+1}} - \eta_{n,i} + \frac{\delta}{4^{n+1}} < q_{n,i} < \frac{1}{2^{n+1}} - \eta_{n,i} + \frac{\delta}{4^n \cdot 2}$. Заметим, что при таком выборе, в самом деле $q_{n,0}+q_{n,1} < r_n$.

После выбора u_n, в качестве $\langle q'_{n,0}, q'_{n,1}\rangle$ мы выбираем возможный ход игрока I в $G_\nu(A)$ из позиции p', для которого $\frac{1}{2^{n+1}} - q'_{n,u_n} + \frac{\delta}{4^{n+1}} < q_{n,u_n}$. Существование такого хода непосредственно следует из определений q_{n,u_n} и $\eta_{n,i}$. $\square$

Свойство, что для счетного семейства попарно непересекающихся измеримых множеств $\mathcal{S}$ мы имеем $\mu(\bigcup\limits_{A\in\mathcal{S}}) = \sum_{A\in\mathcal{S}} A$ называется σ-аддитивностью меры Лебега. Как из аксиомы детерминированности, так и из аксиомы выбора можно вывести σ-аддитивность меры Лебега. Далее мы будем предполагать σ-аддитивность меры Лебега.

Аналогично рассуждению про свойство Бэра для множеств Витали можно показать, что множества Витали неизмеримы по Лебегу. Если мера множества Витали A равно 0, то мера $[0, 1)$ по σ-аддитивности должна была бы быть равна 0, что неверно, а если бы его мера была бы неравна 0, то мера $[0, 1)$ должна была бы быть равна ∞, что также неверно. Таким образом для подходящего ν $(\mu_*(A) < \nu < \mu^*(A))$ игра $G_\nu(A)$ будет недетерминирована.