Задачи о раскрасках

А.М. Райгородский

1 Введение

В этой книге мы расскажем о нескольких классических проблемах современной комбинаторики и теории графов, связанных с понятием раскраски. Наверняка многие читатели неоднократно сталкивались с этим понятием. Многие слышали, например, о знаменитой гипотезе четырех красок: на любой “достаточно хорошей” карте мира страны могут быть так покрашены, чтобы соседние страны имели разные цвета, а всего цветов было не больше четырех. А еще многие знают задачу о хроматическом числе плоскости: найти наименьшее число цветов, в которые можно так покрасить всю плоскость, чтобы каждые две точки, между которыми расстояние равно единице, были покрашены в разные цвета (см. [1], [2]).

В этой книге мы расскажем не об этих задачах. Но те задачи, о которых мы поговорим, сейчас играют колоссальную роль в дискретной математике, находятся в самом ее центре — на стыке идей и методов. В книге масса красивых рассуждений. Для достижения максимального “катарсиса” полезно владеть основами комбинаторики (см., например, [3]–[7]), теории графов (см. [8], [9]), теории пределов и асимптотик в дискретном анализе (см. [10]), теории вероятностей (см. [5], [11]) и линейной алгебры (см. [12]). Однако не стоит пугаться такого изобилия предметов. На самом деле, от комбинаторики нужны более или менее только числа сочетания (биномиальные коэффициенты), от теории графов — только базовое определение графа, от теории вероятностей — только ее комбинаторные аспекты (выбор случайного объекта из конечного множества, бросание монетки, математиеское ожидание простейшей случайной величины), от асимптотик — просто понимание, например, того, что $n^2+n \sim n^2$ при $n \to \infty$ в том смысле, что предел отношения величин n^2+n и n^2 равен единице (ну, может, чуть посложнее, но мы все аккуратно и последовательно напомним), от линейной алгебры — только представление о том, что бывает пространство $\mathbb{R}^n$, а в нем векторы, матрицы, скалярные произведения... В общем, будет доступно абсолютно любому закончившему второй курс и очень многим старшеклассникам, обучающимся в кружках, математических классах и всевозможных летних и не только летних олимпиадных и не только олимпиадных школах.

Книга основана на курсе, который автор прочитал в Дубне на летней школе Современная математика в июле 2019 года, а также на многочисленных его же лекциях на всевозможных сборах (в Сириусе, Команде, Компьютеррии и др.), на различных школах (Кировская ЛМШ, Комбинаторика и алгоритмы и др.) и в школах и университетах по всей России.

2 Задача для затравки

Для затравки рассмотрим следующую задачу. В классе учатся 30 человек. Из них отбираются 5 лучших комбинаторщиков, 5 лучших числовиков, 5 лучших вероятностников и так далее. Всего 15 предметов. Конечно, эти пятерки лучших могут как угодно пересекаться: заранее мы не знаем, кто окажется сильнее в каком из предметов. Вопрос: *всегда ли* можно так рассадить наших 30 школьников по двум кабинетам, чтобы в каждом кабинете был хотя бы один представитель каждой из пятерок? Например, если все пятерки совпадают, то, очевидно, рассадка возможна. Но ведь есть огромное количество других вариантов! Может, если пятерки распределятся более хитро, то окажется, что, как ни рассаживай 30 школьников по двум кабинетам, обязательно найдется кабинет, в котором одна из пятерок находится целиком?

Ответ на вопрос все-таки положительный: да, такая рассадка *всегда* возможна. Решение очень простое и красивое! Оно основано на вероятностном методе в комбинаторике (ср. [13], [14]). В принципе здесь еще можно было бы обойтись без ссылок на теорию вероятностей, но будет лучше, если мы сразу воспользуемся именно вероятностной терминологией.

Итак, нам даны 15 пятерок. Обозначим их $M_1, \ldots, M_{15}$. Рассмотрим *случайную* рассадку школьников. Что это значит? Вообще говоря, что угодно, ведь случайность можно определять по-разному. Но мы будем понимать случайность максимально просто: каждый школьник отправляется в первый кабинет с вероятностью $\frac{1}{2}$, и с такой же вероятностью он идет во второй кабинет; выбор кабинета школьники осуществляют независимо друг от друга. Иными словами, мы как бы 30 раз бросаем симметричную монетку, и, если монетка в i-м бросании падает решкой кверху, то i-й школьник идет в первый кабинет, иначе — во второй. Введем обозначение A_i, $i = 1, \ldots, 15$, для события, состоящего в том, что пятерка M_i целиком попала в один кабинет. Какова вероятность $\mathrm{P}(A_i)$ этого события? Поскольку выбор производится школьниками независимо, вероятности перемножаются, и мы получаем

$$\mathrm{P}(A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}.$$

Теперь изучим вероятность того, что *хотя бы одна* пятерка целиком сидит в одном кабинете. Разумеется, это вероятность события $\bigcup\limits_{i=1}^{15} A_i$. Ясно, что

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{15} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{15} \mathrm{P}(A_i) = \frac{15}{16} < 1.$$

Значит, с *положительной* вероятностью имеет место противоположное событие, которое состоит в том, что ни одна пятерка целиком не сидит в одном из кабинетов. Но ведь это ровно то, что нужно! "Ни одна пятерка целиком не сидит" — это же то же самое, что "в каждом кабинете есть хотя бы один представитель каждой из пятерок". И это выполнено с положительной вероятностью. Если веротность рассадки с нужным свойством положительна, то такая рассадка точно есть. Как ее искать — другой вопрос. Но задача решена: рассадка есть всегда.

Отметим, что в нашем *решении* нигде не использовался тот факт, что всего школьников именно 30. Соответственно, возникает вопрос: а можно ли, по-прежнему пренебрегая исходным количеством школьников, увеличить 15 и получить тот же результат с возможностью рассадки? До шестнадцати дотянуть легко. В самом деле, все события A_i имеют непустое пересечение. Заведомо в этом пересечении находится дурацкая рассадка, при которой все школьники сидят в первом кабинете. Но тогда вероятность объединения *строго меньше* суммы вероятностей, и снова наш метод срабатывает. Уже с семнадцатью такой номер не проходит...

Легко видеть, что для 126 пятерок ответ уже положительным не является. Странное число, да? Ну, сейчас разберемся! Мы же вольны в выборе исходного количества школьников. Давайте возьмем *все* пятерки, какие только можно составить из *девяти* человек. Их в аккурат $126 = C_9^5$. Попробуем теперь рассадить девятерых школьников по двум кабинетам. И вот не тут-то было! При любой рассадке в какой-то кабинет попадет не менее пяти школьников. Но у нас *каждая* пятерка сейчас "в деле". Значит, все плохо, и мы имеем пример ситуации, когда ответ на первоначальный вопрос уже не является утвердительным.

Итак, для любых 16 пятерок ответ утвердительный, но *существуют* 126 пятерок, для которых ответ отрицательный. Все это приводит к общей постановке задачи, о которой мы и поговорим в следующем разделе.

3 Постановка общей задачи

Прежде всего пора перейти от школьников к абстрактным объектам. А именно, введем понятие *гиперграфа*. Оно является прямым обобщением понятия графа. У гиперграфа также есть вершины, образующие некоторое конечное множество V, и ребра, образующие множество E. Только у гиперграфа в каждом ребре не обязательно две вершины: может быть и больше (ребра из одной вершины мы исключим из рассмотрения вовсе). Более строго, гиперграф — это пара $H = (V, E)$, где V — некоторое множество, а E — некоторая совокупность подмножеств множества V. Подмножества неупорядоченные (сочетания без повторений), кратных ребер нет, в каждом ребре хотя бы две вершины. Гиперграф называется *n-однородным*, если в каждом его ребре ровно n вершин. Обыкновенный граф, тем самым, — это 2-однородный гиперграф. А школьники и пятерки — это 5-однородный гиперграф на тридцати вершинах.

Часто замечают, что у гиперграфа, в отличие от графа, нет естественного "портрета". Действительно, если граф легко изобразить как множество точек на плоскости, соединенных отрезками (или дугами), то попытка сделать то же самое с гиперграфом приводит к странному хитросплетению эдаких "сарделек" (см. рис. 1). В своих лекциях я часто употребляю слово "сарделька" для обозначения ребра гиперграфа, но картинок не рисую. Мне самому легче представлять себе именно эдакую кастрюльку (множество вершин) с намешанными в ней сардельками-ребрами. Некоторые "продвинутые пользователи" вспоминают выражение "симплициальный комплекс" (просьба тех, кто не слышал его, не пугаться, т.к. мы его употреблять не будем). Но (опять же, для тех, кто в теме) симплициальный комплекс — это гиперграф, у которого каждое подмножество каждого ребра само является ребром, т.е. это заведомо не однородный гиперграф. В общем, нам это знание не поможет, и мы больше о симплициальных комплексах вспоминать не будем.

Назовем *хроматическим числом* гиперграфа H величину $\chi(H)$, равную наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все вершины гиперграфа, чтобы каждое его ребро было неодноцветным. Позвольте, но ведь задача из предыдущего раздела отлично формулируется в этих терминах! В самом деле, вопрос о пятнадцати пятерках отныне звучит так: "Верно ли, что у любого 5-однородного гиперграфа с тридцатью вершинами и пятнадцатью ребрами хроматическое число равно двум?" Рассадка по двум кабинетам и раскраска в два цвета — лишь два способа описания одного и того же явления.

Введем, наконец, классическую величину $m(n)$, предложенную Эрдешем и Хайналом в 1961 году и равную наименьшему m, при котором существует n-однородный гиперграф H с m ребрами и с $\chi(H) > 2$. Главное сразу понять, что в терминах этой величины результаты предыдущего раздела выглядят так:

$$17 \leqslant m(5) \leqslant 126. \tag{1}$$

У любого 5-однородного гиперграфа с шестнадцатью ребрами хроматическое число равно двум, поэтому $m(5) \geqslant 17$, но существует 5-однородный гиперграф со 126-ю ребрами, у которого хроматическое число больше двух, откуда $m(5) \leqslant 126$.

Очевидное обобщение неравенства (1) приводим ниже:

$$2^{n-1} + 1 \leqslant m(n) \leqslant C_{2n-1}^{n}. \tag{2}$$

Мы не станем доказывать эти неравенства, ведь это совсем легкое упражнение. Но мы обсудим вопрос о том, насколько близки друг к дружке верхняя и нижняя оценки. В самом деле, хорошо известно тождество (см. [3])

$$C_{2n-1}^{0} + C_{2n-1}^{1} + \ldots + C_{2n-1}^{n-1} + C_{2n-1}^{n} + \ldots + C_{2n-1}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

Также известно, конечно, что два центральных слагаемых в этом тождестве являются в нем самыми большими. При этом общее число слагаемых в левой части тождества равно $2n$. Следовательно,

$$\frac{2^{2n-1}}{2n} < C_{2n-1}^n < 2^{2n-1}.$$

В итоге понятно, что зазор между оценками в (2) экспоненциальный: нижняя имеет порядок 2^n, а верхняя с точностью до возможного деления на что-то порядка n имеет порядок 4^n. Это не очень круто, и это одна из серьезнейших проблем современной экстремальной комбинаторики! (Раздел науки, с которым мы сейчас имеем дело, называется "экстремальной комбинаторикой" не потому, что только экстремалы им занимаются (хотя он и захватывающе красив, и не менее захватывающе труден), но потому, что в его рамках ищутся экстремальные (максимальные или минимальные) комбинаторные величины, среди которых $m(n)$.)

В последующих разделах мы изучим красивейшие подходы к уменьшению зазора в (2), а также рассмотрим ряд различных уточнений и обобщений задачи. Отметим, что нижняя оценка в (2) вероятностная (т.е. она гарантирует наличие раскраски, но не объясняет, как ее искать), а верхняя оценка в (2) конструктивная (приводится явный пример гиперграфа, не имеющего раскраски в 2 цвета). В разделе 4 мы значительно улучшим верхнюю оценку, но сделаем это... вероятностным методом, т.е. за улучшение мы заплатим потерей конструктивности.

Напоследок предлагаем читателю самостоятельно ответить на вопрос, чему равно $m(2)$ (совсем просто) и $m(3)$ (сложнее, но посильно). Отметим при этом, что $m(4)$ нашли совсем недавно с помощью весьма нетривиального компьютерного перебора, а величину $m(5)$, которая послужила нам в качестве затравки, никто до сих пор не знает!

4 Верхняя оценка величины $m(n)$

В этом разделе мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0, такое, что для любого $n > n_0$ выполнено*

$$m(n) \leqslant (1+\varepsilon)\frac{e\ln 2}{4}n^2 2^n.$$

Теорема замечательна тем, что она дает оценку величины $m(n)$, которая отличается от известной нам нижней оценки лишь в порядка n^2 раз. Это уже не экспоненциальный, но всего лишь квадратичный по n зазор.

Для понимания доказательства потребуется, помимо базовой вероятности, с которой мы уже немного свыклись, знание одного комбинаторного неравенства и одного несложного факта о логарифме.

Неравенство выпуклости. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Пусть $v \geqslant n$ — четное число. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$ и $a+b=v$. Тогда*

$$\frac{C_a^n + C_b^n}{2} \geqslant C_{v/2}^n = C_{\frac{a+b}{2}}^n.$$

Название неравенства происходит оттого, что оно говорит о выпуклости биномиального коэффициента как функции от нижнего индекса при заданном верхнем индексе. Конечно, четность v не обязательна. Но так проще для восприятия. Неравенство очень простое, и мы оставляем читателю его доказательство. Заметим, что мы считаем $C_m^k = 0$ при $k > m$.

Свойство логарифма. *При всех $x > 0$ выполнено неравенство $\ln(1-x) \leqslant -x$, и при всех достаточно малых положительных x выполнено неравенство $\ln(1-x) \geqslant -x - x^2$.*

Доказательство свойства также является хорошо известным и может быть рассмотрено как несложное упражнение.

Приступим к доказательству теоремы 1. Для уменьшения громоздкости будем считать, что n четно. Для нечетных n все аналогично.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Будем также считать, что $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Положим

$$m = \left[(1+\varepsilon)\frac{e\ln 2}{4}n^2 2^n\right],$$

где $[\cdot]$ — целая часть. Построим *случайный* n-однородный гиперграф с m ребрами. Нам нужно будет так осуществить построение, чтобы при всех достаточно больших n с положительной вероятностью в любой раскраске вершин случайного гиперграфа в 2 цвета было хотя бы одно одноцветное ребро или, что равносильно, чтобы с вероятностью, меньшей единицы, нашлась раскраска вершин случайного гиперграфа в 2 цвета, при которой все ребра неодноцветны. Положим $v = \frac{n^2}{2}$ и рассмотрим множество вершин $V = \{1, \dots, v\}$. Случайными будут ребра. Выберем каждое из них независимо ото всех остальных из множества всех n-сочетаний из V с вероятностью $\frac{1}{C_v^n}$. Читатель может спросить: "А что, если появятся кратные ребра? Ведь при взаимно независимом выборе ребра могут и совпасть." Но ответ простой. Если какие-то ребра совпадут, мы их отождествим. Получится гиперграф с еще меньшим числом ребер, а нам это только на пользу, раз уж мы доказываем сейчас верхнюю оценку для $m(n)$. Итак, пусть $H = (V, E)$ — это описанный только что случайный гиперграф и $E = \{f_1, \dots, f_m\}$.

Пусть χ — некоторая раскраска V в два цвета. Пусть в ней a красных и b синих вершин. Естественно, $v = a + b$. Обозначим $A_{\chi,i}$ событие, состоящее в том, что ребро f_i одноцветно в раскраске χ. Очевидно,

$$\mathrm{P}(A_{\chi,i}) = \frac{C_a^n + C_b^n}{C_v^n}.$$

За счет неравенства выпуклости получаем оценку

$$\mathrm{P}(A_{\chi,i}) = \frac{C_a^n + C_b^n}{C_v^n} \geqslant \frac{2C_{v/2}^n}{C_v^n}.$$

Положим $p = \frac{2C_{v/2}^n}{C_v^n}$. Тогда вероятность отрицания события $A_{\chi,i}$ (ребро f_i неодноцветно) не больше $1 - p$.

Пусть A_χ — событие, при котором все ребра случайного гиперграфа неодноцветны в раскраске χ. Поскольку ребра выбирались независимо друг от друга, получаем неравенство

$$\mathrm{P}(A_\chi) \leqslant (1-p)^m.$$

Наконец, интересующее нас событие A — "найдется раскраска вершин случайного гиперграфа в 2 цвета, при которой все ребра неодноцветны" — это $\bigcup\limits_{\chi} A_\chi$. Значит,

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{\chi} A_\chi\right) \leqslant \sum_{\chi} \mathrm{P}(A_\chi) \leqslant 2^v(1-p)^m,$$

ведь всего раскрасок V в 2 цвета 2^v штук.

Осталось доказать, что $2^v(1-p)^m < 1$ при всех достаточно больших n. Заметим, что

$$2^v(1-p)^m = e^{v\ln 2 + m\ln(1-p)} \leqslant e^{v\ln 2 - pm}$$

за счет свойства логарифма. Теперь оценим величину p снизу, т.к. она идет у нас с минусом. Рассмотрим сперва ее знаменатель:

$$C_v^n = \frac{v!}{n!(v-n)!} = \frac{v(v-1)\cdot\ldots\cdot(v-n+1)}{n!} = \frac{v^n}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{v}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{v}\right).$$

Аналогично

$$C_{v/2}^n = \frac{(v/2)^n}{n!}\cdot\left(1-\frac{2}{v}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2(n-1)}{v}\right).$$

Стало быть, p равно величине 2^{1-n}, помноженной на отношение двух произведений, состоящих из $n-1$ скобок каждое. Изучим произведение в знаменателе. Его надо оценить сверху:

$$\left(1-\frac{1}{v}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{v}\right) = e^{\ln\left(1-\frac{1}{v}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{n-1}{v}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{1}{v}-\ldots-\frac{n-1}{v}} = e^{-\frac{n(n-1)}{2v}}.$$

Аналогично делаем оценку числителя снизу:

$$\left(1-\frac{2}{v}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2(n-1)}{v}\right) = e^{\ln\left(1-\frac{2}{v}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{2(n-1)}{v}\right)} \geqslant$$

$$\geqslant e^{-\frac{2}{v}-\ldots-\frac{2(n-1)}{v}-\frac{2^2}{v^2}-\ldots-\frac{2^2\cdot(n-1)^2}{v^2}} = e^{-\frac{n(n-1)}{v}-\frac{4n(n-1)(2n-1)}{6v^2}}$$

(пользуемся свойством логарифма и известной формулой для суммы квадратов первых натуральных чисел, см. [3]). Получаем, что

$$p \geqslant 2^{1-n}e^{-\frac{n(n-1)}{2v}-\frac{4n(n-1)(2n-1)}{6v^2}}.$$

Величина

$$\frac{4n(n-1)(2n-1)}{6v^2}$$

стремится к нулю при $n\to\infty$, ибо $v=n^2/2$. То же самое верно для величины $\frac{n}{2v}$. Поэтому при всех достаточно больших n выполнено

$$e^{-\frac{n(n-1)}{2v}-\frac{4n(n-1)(2n-1)}{6v^2}} \geqslant e^{-\frac{n^2}{2v}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{-1},$$

так что

$$p \geqslant 2^{1-n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{-1}.$$

Далее, замечая, что при всех достаточно больших n

$$m \geqslant \left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)\frac{e\ln 2}{4}n^2 2^n,$$

имеем

$$e^{v\ln 2-pm} \leqslant e^{v\ln 2-2^{1-n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{-1}m} \leqslant e^{\frac{n^2\ln 2}{2}-2^{1-n}\left(1+\frac{\varepsilon}{4}-\frac{3\varepsilon^2}{8}\right)\frac{n^2(\ln 2)2^n}{4}}.$$

Поскольку $\varepsilon<\frac{1}{2}$, с огромным запасом

$$\frac{\varepsilon}{4}-\frac{3\varepsilon^2}{8} > \frac{\varepsilon}{100}.$$

В итоге

$$e^{\frac{n^2\ln 2}{2}-2^{1-n}\left(1+\frac{\varepsilon}{4}-\frac{3\varepsilon^2}{8}\right)\frac{n^2(\ln 2)2^n}{4}} = e^{\frac{n^2\ln 2}{2}-\left(1+\frac{\varepsilon}{4}-\frac{3\varepsilon^2}{8}\right)\frac{n^2\ln 2}{2}} < e^{-\frac{\varepsilon n^2\ln 2}{200}} < 1$$

при всех достаточно больших n. Теорема доказана.

Крайне любопытно, что, жертвуя конструктивностью, мы реально упростили себе жизнь. До сих пор не известны явные конструкции гиперграфов со столь малым числом ребер и хроматическим числом, большим двух. Лишь совсем недавно — в 2013 году — Гебауэр построила пример гиперграфа, у которого число ребер не превосходит величины

$$2^{n+cn^{2/3}}, \quad c > 0.$$

Это круто, поскольку основной сомножитель — 2^n — совпадает с известной нам экспонентой в верхней и нижней оценках. Но это гораздо слабее теоремы 1, ведь n^2 несравнимо меньше, чем $2^{n^{2/3}}$.

5 Улучшение нижней оценки величины $m(n)$ с помощью жадного алгоритма

В этом разделе мы улучшим нижнюю оценку $m(n)$ в примерно $\sqrt[4]{n}$ раз.

Теорема 2. *Существует такая константа $c > 0$, что для любого n выполнено*

$$m(n) \geqslant c\sqrt[4]{n} \cdot 2^n.$$

Доказательство теоремы 2 основано на красивой и несложной идее, которую предложил Плухар. Для описания идеи введем несколько новых понятий. Пусть дан гиперграф $H = (V, E)$. Изначально его вершины представляют собой некоторую совокупность объектов, которые никак не упорядочены. Порядок на этой совокупности можно задать, разумеется, $|V|!$ способами. Пусть задан некоторый порядок (нумерация вершин) π и есть два ребра f_1, f_2, имеющие ровно одну общую вершину i. Назовем пару (f_1, f_2) *упорядоченной 2-цепью* в нумерации π, если номера всех вершин ребра f_1 предшествуют номеру i, а номера всех вершин ребра f_2 идут после номера вершины i. На рис. 2 показана "кастрюлька с двумя сардельками" и два способа нумерции вершин в кастрюльке, при одном из которых сардельки образую упорядоченную 2-цепь, а при другом из которых они ее не образуют. Идея Плухара формулируется в виде следующего критерия.

Критерий Плухара. *Хроматическое число гиперграфа равно двум тогда и только тогда, когда существует нумерация его вершин, в которой нет упорядоченных 2-цепей.*

Прежде чем привести простое доказательство критерия, полезно осознать, что он говорит в случае обыкновенного графа (т.е. 2-однородного гиперграфа). В самом деле, что означает утверждение "хроматическое число графа равно двум"? Оно означает, что множество вершин графа можно разделить на две непересекающиеся части, внутри которых ребер графа нет, но между которыми как раз и проходят все ребра графа (см. рис. 3). Такой граф еще называют *двудольным* (т.е. буквально двухчастным), и многие читатели наверняка сталкивались с этим объектом. Понятно, что вершинам одной доли можно присвоить номера от единицы до числа, равного количеству вершин в этой доле, а вершинам второй доли — все последующие номера, и тогда упорядоченных 2-цепей не возникнет (здесь 2-цепь — это "галочка", у которой номера вершин идут в порядке "меньше-больше-меньше" или "больше-меньше-больше").

Доказательство критерия. В одну сторону мы фактически доказательство уже привели. Действительно, если существует двухцветная раскраска, при которой все ребра неодноцветны, то достаточно взять любую нумерацию, при которой все вершины первого цвета имеют меньшие номера, нежели все вершины второго цвета (двудольность).

В обратную сторону рассуждение основано на простейшем жадном алгоритме, и это объясняет название раздела. Итак, пусть существует нумерация вершин без упорядоченных 2-цепей. Обозначим будущие цвета числами $1, 2, \ldots$ Рассматриваем вершины по порядку и красим их в минимальный цвет, с которым они не образуют одноцветных ребер вместе с уже покрашенными вершинами. Если для некоторой вершины v нам не хватает цветов 1 и 2, то существует ребро f_2, которому принадлежит вершина v и в котором все остальные (предшествующие) вершины уже покрашены в цвет 2. Пусть w — вершина в f_2 с наименьшим номером. Раз мы ее покрасили в свое время в цвет 2, то мы не смогли тогда ее покрасить в цвет 1. Почему? А потому, что, стало быть, имелось ребро f_1, для которого вершина w была, наоборот, последней и которое имело все вершины цвета 1. В этом случае очевидно, что ребра f_1, f_2 образуют упорядоченную 2-цепь. Противоречие.

Критерий полностью доказан.

До доказательства теоремы 2 остался еще один небольшой шаг. Надо вспомнить утверждение об *асимптотике факториала*. Во введении мы уже приводили обозначение “$\sim$”, называемое *асимптотическим равенством* (или *эквивалентностью*). Строго говоря, две функции f и g натурального аргумента, не принимающие нулевых значений, асимптотически равны (пишут $f \sim g$), если предел их отношения равен единице при стремлении аргумента к бесконечности. Отметим, что разность при этом вовсе не обязана стремиться к нулю: например, $n^2 + n \sim n^2$. В этих терминах справедлива знаменитая

Формула Стирлинга. *Имеет место асимптотическое равенство*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

В некотором смысле формула Стирлинга входит в эдакий синклит “самых прекрасных формул математики” — формул, в которых одновременно участвуют обе мировые константы e и π. Доказательство формулы можно найти во всех стандартных учебниках по математическому анализу, и мы его, конечно, не приводим. Получить с ходу некоторую интуицию формулы помогает обычная математическая индукция, с помощью которой легко доказывается неравенство

$$n! \geqslant \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Для наших целей подобных неравенств не достаточно. Сомножитель $\sqrt{n}$ и даст нам в итоге корень четвертой степени из теоремы 2, к доказательству которой мы, наконец, готовы перейти.

Доказательство теоремы 2. Пусть дан произвольный n-однородный гиперграф $H = (V, E)$ с m ребрами. Мы хотим показать, что при некотором $c > 0$ (не зависящем ни от чего, включая наш гиперграф) и $m \leqslant c\sqrt[4]{n} \cdot 2^n$ выполнено $\chi(H) = 2$. Согласно критерию Плухара достаточно доказать существование нумерации V без упорядоченных 2-цепей. Рассмотрим, как водится, случайную нумерацию. Иными словами, каждая нумерация выбирается с вероятностью $\frac{1}{|V|!}$. Пусть $f_1, f_2 \in E$ и пересечение этих ребер состоит из одной вершины. Обозначим A_{f_1,f_2} событие, состоящее в том, что в случайной нумерации ребра f_1, f_2 образуют упорядоченную 2-цепь. Легко сообразить, что

$$\mathrm{P}(A_{f_1,f_2}) = \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}.$$

Далее, вероятность того, что найдутся два ребра, образующие упорядоченную 2-цепь, равна

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{f_1,f_2} A_{f_1,f_2}\right) \leqslant \sum_{f_1,f_2} \mathrm{P}(A_{f_1,f_2}) < |E|^2 \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} = m^2 \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}.$$

Остается лишь проверить, что при m вида $c\sqrt[4]{n}\cdot 2^n$ с подходящей константой c выполнено

$$m^2\cdot\frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}<1. \tag{3}$$

Пользуемся формулой Стирлинга:

$$\frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}=\frac{(n!)^2\cdot(2n)}{n^2\cdot(2n)!}=\frac{2(n!)^2}{n\cdot(2n)!}\sim\frac{2}{n}\cdot\frac{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}=\frac{2}{n}\cdot\sqrt{\pi n}\cdot 2^{-2n}.$$

В последней выкладке, помимо обычных равенств, есть одно асимптотическое. Как с ним бороться? Ну, точно можно сказать, что существует константа C, с которой при всех n выполнено

$$\frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}<\frac{C}{\sqrt{n}}\cdot 2^{-2n}.$$

Значит, неравенство (3) заведомо будет выполнено, коль скоро

$$m^2\leqslant\frac{\sqrt{n}}{C}\cdot 2^{2n},$$

откуда и получаем вожделенное $m\leqslant c\sqrt[4]{n}\cdot 2^n$ с $c=\frac{1}{\sqrt{C}}$. Теорема доказана.

6 Дальнейшее улучшение нижней оценки $m(n)$ с помощью рандомизированного алгоритма перекраски

В этом разделе мы используем иной вероятностный подход, нежели до сих пор, и докажем следующую теорему, придуманную Беком и Спенсером.

Теорема 3. *При всех достаточно больших n выполнено*

$$m(n)\geqslant\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{n}{\ln n}}\cdot 2^{n-1}\right].$$

Конечно, можно было написать $1/4$ и 2^n в формулировке, но так будет удобнее для доказательства, к которому на сей раз мы безо всяких предисловий приступим.

Пусть $H=(V,E)$ — n-однородный гиперграф с

$$m=\left[x\cdot 2^{n-1}\right]$$

ребрами, где

$$x=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{n}{\ln n}}.$$

Покажем, что существует раскраска в 2 цвета множества V, при которой все ребра неодноцветны. Раскраску будем строить с помощью следующего рандомизированного алгоритма.

Шаг 1. Красим вершины независимо друг от друга, с вероятностью $\frac{1}{2}$ выбирая для каждой вершины один из двух цветов — красный или синий. Пусть D — случайное множество вершин, принадлежащих одноцветным ребрам (объединение всех ребер, которые оказались одноцветными). Это может быть и пустое множество, например.

Шаг 2. Пусть $p \in [0,1]$ (мы для каждого n выберем конкретное p позднее). Рассматриваем только вершины из множества D. У каждой из них мы независимо ото всех остальных вершин множества D меняем цвет на противоположный с вероятностью p и не меняем цвет с вероятностью $1-p$. Иными словами, у нас как бы есть монета со смещенным, вообще говоря, центром тяжести. При случайном бросании монета ложится решкой кверху с вероятностью p и орлом — с вероятностью $1-p$. Мы бросаем монету $|D|$ раз, и, если в очередном бросании монета падает решкой кверху, то меняем цвет соответствующей вершины из D; иначе не меняем.

Понятно, что шаг 1 — это обычная случайная раскраска, с помощью которой мы доказывали неравенство $m(n) \geqslant 2^{n-1}+1$. Таким образом, шаг 2 — это попытка исправить ошибки шага 1 за счет того, что шаг 1 не чувствителен к виду исходного гиперграфа, а шаг 2 пытается учесть его структуру и повысить, тем самым, вероятность того, что на выходе все ребра окажутся неодноцветными. Разумеется, качество шага 2 зависит от выбора p, и скоро мы увидим, как нужно этот выбор осуществлять оптимально.

Пусть $\mathcal{F}$ — событие, состоящее в том, что раскраска не удалась, т.е. существуют одноцветные ребра. Как конкретное ребро f может оказаться одноцветным? Есть всего 6 вариантов:

1. $A_{f,1}$: ребро f красное после шага 1 и красное после шага 2;
2. $A_{f,2}$: ребро f красное после шага 1 и синее после шага 2;
3. $A_{f,3}$: ребро f синее после шага 1 и синее после шага 2;
4. $A_{f,4}$: ребро f синее после шага 1 и красное после шага 2;
5. $C_{f,1}$: ребро f неодноцветное после шага 1 и красное после шага 2;
6. $C_{f,2}$: ребро f неодноцветное после шага 1 и синее после шага 2.

Очевидно,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{f \in E} \left(A_{f,1} \cup A_{f,2} \cup A_{f,3} \cup A_{f,4} \cup C_{f,1} \cup C_{f,2}\right),$$

$$\mathrm{P}(A_{f,1}) = \mathrm{P}(A_{f,3}), \quad \mathrm{P}(A_{f,2}) = \mathrm{P}(A_{f,4}), \quad \mathrm{P}(C_{f,1}) = \mathrm{P}(C_{f,2}).$$

Поэтому

$$\mathrm{P}(\mathcal{F}) \leqslant 2 \sum_{f \in E} \left(\mathrm{P}(A_{f,1}) + \mathrm{P}(A_{f,2}) + \mathrm{P}(C_{f,1})\right).$$

Оценим вероятности, стоящие в скобках под знаком суммирования. Совсем легко разобраться с первыми двумя:

$$\mathrm{P}(A_{f,1}) = 2^{-n} \cdot (1-p)^n, \quad \mathrm{P}(A_{f,2}) = 2^{-n} \cdot p^n.$$

А вот с третьей вероятностью намного труднее.

Как могло случиться, что ребро f неодноцветное после шага 1, но красное после шага 2? Конечно, синие вершины ребра f, имевшиеся в нем после шага 1, должны были перекраситься. Но почему? Как они попали в множество D, если f неодноцветное и в формировании D не участвовало? Значит, было еще хотя бы одно ребро φ, которое было синим после шага 1 и которое имеет непустое пересечение с f. Это именно следствие, не равносильность! Все могло быть очень и очень хитро. Например, красные после шага 1 вершины ребра f тоже могли попасть в D и пытаться поменять цвет, но монетка легла орлом. И так далее. Но мы точно знаем, что следствие имеет место, откуда

$$\mathrm{P}(C_{f,1}) \leqslant \mathrm{P}\left(\bigcup_{\varphi} B_{f,\varphi}\right),$$

где объединение берется по всем $\varphi \in E$, которые имеют непустое пересечение с f, а $B_{f,\varphi}$ — событие, состоящее в том, что f неодноцветное после шага 1, f красное после шага 2 и φ синее после шага 1. Таким образом,

$$\mathrm{P}(C_{f,1}) \leqslant \sum_{\varphi} \mathrm{P}(B_{f,\varphi}),$$

и нам нужно оценить величину $\mathrm{P}(B_{f,\varphi})$.

Положим $h = |f \cap \varphi| \geqslant 1$. Посмотрим отдельно на $a = f \cap \varphi$, отдельно на $b = \varphi \setminus f$ и отдельно на $c = f \setminus \varphi$. С вершинами из a все ясно. Они были синими и стали красными. Вероятность этого $2^{-h} \cdot p^h$. Так же просто все и в случае c. Вершины там были синими, а что с ними стало, мы не знаем. Вероятность этого не больше, чем $2^{-(n-h)} \cdot 1$. Интереснее всего обстоят дела с b. Пусть $v \in b$. Есть два варианта. Во-первых, v могла быть синей и стать красной. Вероятность этого $\frac{1}{2} \cdot p$. Во-вторых, она могла быть красной и остаться красной. Как произошло последнее, мы не знаем: то ли v попала в D, но монетка легла орлом, то ли v не попала в D и просто не пыталась сменить цвет. В любом случае здесь вероятность не больше, чем $\frac{1}{2} \cdot 1$. Итого для данной $v \in b$ имеем оценку вероятности величиной, равной сумме оценок вероятностей первого и второго варианта, т.е. $\frac{p}{2} + \frac{1}{2}$. В целом по b за счет независимости вероятность оценивается величиной $\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n-h}$. Собирая все оценки вместе, получаем

$$\mathrm{P}(B_{f,\varphi}) \leqslant 2^{-h} \cdot p^h \cdot 2^{-(n-h)} \cdot \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n-h} = 2^{h-2n} \cdot p^h \cdot (1+p)^{n-h}.$$

Очевидно, последняя величина принимает максимальное значение при $h = 1$ (она убывает по h). Значит, всегда

$$\mathrm{P}(B_{f,\varphi}) \leqslant 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^{n-1} < 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n.$$

Вернемся к оценке вероятности $C_{f,1}$. Ясно, что

$$\mathrm{P}(C_{f,1}) \leqslant \sum_{\varphi} \mathrm{P}(B_{f,\varphi}) < |E| \cdot 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n = m \cdot 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n \leqslant$$

$$\leqslant x \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n = x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n.$$

Далее,

$$\mathrm{P}(\mathcal{F}) \leqslant 2 \sum_{f \in E} (\mathrm{P}(A_{f,1}) + \mathrm{P}(A_{f,2}) + \mathrm{P}(C_{f,1})) \leqslant 2 \sum_{f \in E} \left(2^{-n} \cdot (1-p)^n + 2^{-n} \cdot p^n + x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n\right) =$$

$$= 2m \left(2^{-n} \cdot (1-p)^n + 2^{-n} \cdot p^n + x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n\right) \leqslant$$
$$\leqslant x \cdot 2^n \left(2^{-n} \cdot (1-p)^n + 2^{-n} \cdot p^n + x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n\right) = x \cdot (1-p)^n + x \cdot p^n + x^2 \cdot p \cdot (1+p)^n.$$

Полученный результат можно трактовать так: “Пусть дано n и x — максимальное число, для которого существует $p \in [0,1]$, удовлетворяющее неравенству

$$x \cdot (1-p)^n + x \cdot p^n + x^2 \cdot p \cdot (1+p)^n < 1.$$

Тогда $m(n) \geqslant x \cdot 2^{n-1}$.” Теорема 3 лишь говорит нам, что для

$$x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{\ln n}}$$

такое p действительно есть. Какое же оно? Обалденное:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln\left(\frac{n}{\ln n}\right)}{n}.$$

Впечатляет? Еще красивее выглядит проверка (пользуемся свойством логарифма):

$x\cdot(1-p)^n+x\cdot p^n+x^2\cdot p\cdot(1+p)^n=x\cdot e^{n\ln(1-p)}+x\cdot p^n+x^2\cdot p\cdot e^{n\ln(1+p)}\leqslant x\cdot e^{-pn}+c\cdot p^n+x^2\cdot p\cdot e^{pn}<$

(при достаточно больших n)

$$<\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/3}\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{n}{\ln n}\right)}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{2/3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\ln n}{n}\cdot e^{\frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{n}{\ln n}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/3}\cdot\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{-1/3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{2/3}\cdot\frac{\ln n}{n}\cdot\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}<1.$$

Теорема доказана.

Заметим, что в рамках метода можно улучшить константы, но нельзя увеличить по порядку корень кубический. Попробуйте осознать это!

7 Самая сильная известная нижняя оценка

В этом разделе мы соберем вместе идею случайной раскраски и идею жадного алгоритма. В результате мы докажем следующую теорему.

Теорема 4. *При всех достаточно больших n выполнено*

$$m(n)\geqslant\left[\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\cdot 2^n\right].$$

С точностью до константы это самый лучший известный результат! Доказав теорему 4, мы окажемся на самой вершине современного знания в области, ведь и верхняя оценка величиной порядка $n^2\cdot 2^n$ — это лучшее, что сейчас известно.

У теоремы 4 очень любопытная история. В 2002 году ее доказали Радакришнан и Сринивасан. Их рассуждение можно прочесть в книге [13]. А в 2013 году Черкашин и Козик придумали иной алгоритм, еще более простой и изящный. Именно его мы здесь и изложим. Черкашин и Козик работали совершенно независимо друг от друга. Но в итоге они буквально с разницей в одну неделю подали свои статьи в один и тот же журнал! Удивительное совпадение.

Еще немного знаний из математического анализа потребуется нам для понимания выкладок. А именно, нужно знать, что

$$e^x=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^t}{t!}. \tag{4}$$

Опять же, этот факт можно найти в любом стандартном учебнике.

Дан n-однородный гиперграф $H=(V,E)$ с

$$m=\left[\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\cdot 2^n\right]$$

ребрами. Действуем на стыке методов. Положим (сразу!)

$$p=\frac{\ln(4n\ln^2 n)}{2n}.$$

Шаг 1. Красим вершины независимо друг от друга, с вероятностью $\frac{1-p}{2}$ выбирая для каждой вершины один из двух цветов — красный или синий, — а с вероятностью p делая ее же бесцветной. Пусть W — случайное множество бесцветных вершин.

Шаг 2. Берем случайную нумерцию вершин из W. Как из этой нумерации сделать раскраску и кого вообще мы будем красить, поймем совсем скоро.

Для каждого ребра $f \in E$ есть следующие и только следующие "плохие" варианты после шага 1:

1. $A_{f,1}$: ребро f красное после шага 1;
2. $A_{f,2}$: ребро f синее после шага 1;
3. $A_{f,3}$: после шага 1 в ребре f только одна бесцветная вершина, а все остальные вершины красные;
4. $A_{f,4}$: после шага 1 в ребре f только одна бесцветная вершина, а все остальные вершины синие;
5. $A_{f,5}$: после шага 1 в ребре f не менее двух и не более $n-1$ бесцветных вершин, а все остальные вершины красные;
6. $A_{f,6}$: после шага 1 в ребре f не менее двух и не более $n-1$ бесцветных вершин, а все остальные вершины синие;
7. $A_{f,7}$: после шага 1 в ребре f все вершины бесцветные.

Как мы скоро увидим, все события, кроме 5-го и 6-го, имеют крайне маленькие вероятности. Шаг 2 борется именно с 5-м и 6-м случаями. А именно, если для f выполнилось $A_{f,5}$, то рассмотрим множество $f \cap W$ и присвоим ему "метку" 1. Если же для f выполнилось $A_{f,6}$, то также рассмотрим множество $f \cap W$ и присвоим ему "метку" 2. Скажем, что в данной нумерации множества W пара $f \cap W$ и $f' \cap W$ образует *сильную упорядоченную 2-цепь*, если она образует упорядоченную 2-цепь, причем у $f \cap W$ метка 1, а у $f' \cap W$ метка 2. Имеет место аналог критерия Плухара, который доказывается совершенно аналогично.

Аналог критерия Плухара. *Множество W можно так покрасить в красный и синий цвета, чтобы каждое подмножество вида $f \cap W$ с меткой 1 не было целиком красным и каждое подмножество вида $f \cap W$ с меткой 2 не было целиком синим, если и только если существует нумерация его вершин, в которой нет сильных упорядоченных 2-цепей.*

В чем тут дополнительная хитрость? В том, что нам не нужно красить W так, чтобы все "обрубки" $f \cap W$ были неодноцветными. Достаточно добиться того, чтобы их цвета были не такими, как у $f \setminus W$!

Остается убедиться в том, что при достаточно больших n сумма вероятностей всех плохих событий меньше единицы.

Для первых двух типов событий сумма вероятностей оценивается величиной

$$2m \cdot \left(\frac{1-p}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^n \cdot 2^{-n} \cdot e^{-pn} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot e^{-\frac{\ln(4n\ln^2 n)}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n} \cdot \ln n},$$

которая стремится к нулю и, стало быть, при больших n значения не имеет.

Для третьего и четвертого типов событий оценка слегка ухудшается из-за необходимости выбрать бесцветную вершину:

$$2m \cdot np \left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-1} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^n \cdot \frac{\ln(4n\ln^2 n)}{2} \cdot 2^{-n+1} \cdot \frac{e^{-pn}}{1-p}.$$

Величина $1-p$ стремится к единице, а

$$\frac{\ln(4n\ln^2 n)}{2} \sim \frac{\ln n}{2}.$$

Поэтому при всех больших n можно, например, написать

$$\frac{\ln(4n\ln^2 n)}{2}\cdot\frac{1}{1-p}\leqslant \ln n,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\cdot 2^n\cdot\frac{\ln(4n\ln^2 n)}{2}\cdot 2^{-n+1}\cdot\frac{e^{-pn}}{1-p}\leqslant\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\cdot(\ln n)\cdot e^{-pn}=\sqrt{n\ln n}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{n}\cdot\ln n}\to 0.$$

Наконец, для событий 7-го типа имеем оценку mp^n, и эта величина стремится к нулю буквально со свистом.

Для получения оценки в случае 5-го и 6-го типов событий нужно зафиксировать произвольную 2-цепь (это делается заведомо не более чем m^2 способами). Пусть $a\geqslant 2, b\geqslant 2$ суть $|f\cap W|$ и $|f'\cap W|$ соответственно. Тогда искомая вероятность оценивается следующим произведением:

$$\left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-a-b}\cdot p^{a+b-1}\cdot C_{n-1}^{a-1}\cdot C_{n-1}^{b-1}\cdot\frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}.$$

Здесь первый множитель отвечает вершинам из $(f\setminus W)\cup(f'\setminus W)$, второй множитель отвечает вершинам из $(f\cap W)\cup(f'\cap W)$, третий и четвертый множители отвечают выбору из f и f' тех вершин, которые окажутся бесцветными (единственная общая вершина 2-цепи заведомо должна стать бесцветной, поэтому выбор осуществляется из $n-1$ по $a-1$ и по $b-1$), последний множитель — это вероятность того, что в случайной нумерации на шаге 2 наша 2-цепь окажется сильной упорядоченной. Сумма вероятностей не превосходит

$$m^2\sum_{a,b\geqslant 2}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-a-b}\cdot p^{a+b-1}\cdot C_{n-1}^{a-1}\cdot C_{n-1}^{b-1}\cdot\frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}.$$

Сделаем замену $t=a+b-2$. Учтем также, что

$$C_{n-1}^{a-1}=\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-a+1)}{(a-1)!}<\frac{n^{a-1}}{(a-1)!},$$

откуда

$$C_{n-1}^{a-1}\cdot C_{n-1}^{b-1}\cdot\frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}\leqslant\frac{n^t}{(t+1)!}$$

и (при данном t числа a,b фиксируются не более t способами)

$$m^2\sum_{a,b\geqslant 2}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-a-b}\cdot p^{a+b-1}\cdot C_{n-1}^{a-1}\cdot C_{n-1}^{b-1}\cdot\frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}<m^2\sum_{t=0}^{\infty}t\cdot\left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-t-2}\cdot p^{t+1}\cdot\frac{n^t}{(t+1)!}<$$

$$<m^2\cdot\left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-2}\cdot p\cdot\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{-t}\cdot p^t\cdot\frac{n^t}{t!}\leqslant$$

(с учетом выбора m, свойства логарифма, формулы (4) и того факта, что при больших n величина p не больше $\frac{\ln n}{n}$)

$$\leqslant\frac{1}{16}\cdot\frac{n}{\ln n}\cdot 2^{2n}\cdot 2^{-2n+2}\cdot e^{-2pn+2p}\cdot\frac{\ln n}{n}\cdot e^{\frac{2pn}{1-p}}=\frac{1}{4}\cdot e^{-2pn+2p+\frac{2pn}{1-p}}.$$

Поскольку $p\to 0$, при больших n имеем $\frac{1}{1-p}\leqslant 1+2p$, так что

$$e^{-2pn+2p+\frac{2pn}{1-p}}<e^{-2pn+2p+2pn+4p^2n}=e^{4p^2n+p}.$$

В свою очередь $p^2 n \to 0$ и $p \to 0$, а значит, при больших n

$$e^{4p^2n+p} < 2,$$

откуда

$$\frac{1}{4} \cdot e^{-2pn+2p+\frac{2pn}{1-p}} < \frac{1}{2}.$$

Складывая последнюю оценку с тремя оценками, стремящимися к нулю, при больших n получаем, что наш алгоритм завершится неудачей с вероятностью, меньшей единицы. И торема доказана.

8 Задача об уклонении: постановка и некоторые результаты

В этом разделе мы расскажем об одном интересном уточнении задачи о раскраске. А именно, зачастую важно не просто добиться того, чтобы все ребра были неодноцветными, но еще и постараться сделать так, чтобы количества красных и синих вершин в каждом ребре были примерно одинаковыми. Для формализации новой постановки удобно счесть, что красный цвет — это 1, а синий цвет — это -1, т.е. раскраска — это отображение χ, при котором каждой вершине присваивается одно из двух значений. В таких терминах для каждого $H = (V, E)$ и для раскраски χ нас интересует величина

$$\operatorname{disc}(H, \chi) = \max_{f \in E} |\chi(f)|, \quad \chi(f) = \sum_{v \in f} \chi(v),$$

называемая *уклонением* (обозначение происходит от английского слова “discrepancy”). Положим также

$$\operatorname{disc}(H) = \min_{\chi} \operatorname{disc}(H, \chi).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать не только однородные гиперграфы. Приведем и прокомментируем ниже основные известные результаты.

Теорема 5. *Пусть $H = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$. Тогда*

$$\operatorname{disc}(H) \leqslant \sqrt{2n \ln(2m)}.$$

Теорема 5 во многих ситуациях дает весьма хорошую оценку. Действительно, если m не слишком велико (например, не больше какого-нибудь многочлена от n), а ребра гиперграфа достаточно большие (например, порядка n), то получается, что не просто можно всегда сделать все ребра неодноцветными, но еще и сделать так, чтобы разница между количествами вершин разного цвета в каждом ребре не превосходила корня из его размера, помноженного на логарифм его размера. Таким образом, оптимальное уклонение бесконечно мало по сравнению с числом вершин в каждом ребре.

Теорему 5 мы доказывали в книге [14]. Но там мы дали не совсем аккуратное и довольно-таки неэлементарное доказательство. В следующем разделе мы приведем другое, более замкнутое в себе рассуждение, обосновывающее теорему 5. В случае $m = n$ теорема 5 допускает уточнение.

Теорема 6. *Пусть $H = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = n$. Тогда*

$$\operatorname{disc}(H) \leqslant 6\sqrt{n}.$$

Теорема 6 доказана в книге [13]. По сложности она несколько превосходит все, о чем мы здесь пишем. Поэтому в этой книге мы ее доказывать не станем.

Теорема 6 точна по порядку.

Теорема 7. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0, такое, что при каждом $n > n_0$ найдется гиперграф $H = (V, E)$, у которого $|V| = n$, $|E| = n$ и*

$$\mathrm{disc}(H) \geqslant (1 - \varepsilon) \cdot \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Теорема 7 доказана вероятностным методом в книге [14] и линейно-алгебраическим — в книге [12]. Для полноты картины мы в разделе 10 воспроизведем второе (чуть более аккуратное и красивое) доказательство.

9 Доказательство теоремы 5

9.1 Вспомогательное неравенство из теории вероятностей

Материал этого параграфа есть в книге [15]. Мы приводим его для полноты доказательства.

Теорема 8. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, принимающие значения ± 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Тогда для любого $a > 0$ выполнено*

$$\mathrm{P}(|\xi_1 + \ldots + \xi_n| > a) \leqslant 2e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

Фактически в теореме 8 речь идет о совершенно классическом объекте теории вероятностей — о случайном блуждании на прямой. В шуточной интерпретации, которую я обычно рассказываю на лекциях, в точке 0 на прямой находится кабак. Из него выходит пьяница, который с вероятностью $\frac{1}{2}$ перемещается в точку 1 и с такой же вероятностью идет в точку -1. Дальше он снова выбирает направление движения случайно. Так вот теорема говорит о том, что крайне мала вероятность, с которой пьяница уйдет сравнительно далеко от родного кабака. Например, при $n = 10^6$, $a = 10^4$ вероятность не больше $2e^{-50}$, т.е., сделав миллион шагов, пьяница удалится от "сияющего центра" на расстоние, равное всего лишь десяти тысячам шагов, с вероятностью, не превосходящей чудовищно малой величины $2e^{-50}$.

Докажем теорему. Ввиду симметрии достаточно убедиться в том, что

$$\mathrm{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n > a) \leqslant e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

Положим $\lambda = \frac{a}{n}$. Имеем

$$\mathrm{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n > a) = \mathrm{P}(\lambda(\xi_1 + \ldots + \xi_n) > \lambda a) = \mathrm{P}\left(e^{\lambda(\xi_1 + \ldots + \xi_n)} > e^{\lambda a}\right).$$

Пользуемся неравенством Маркова (см. [5]) и независимостью случайных величин:

$$\mathrm{P}\left(e^{\lambda(\xi_1 + \ldots + \xi_n)} > e^{\lambda a}\right) \leqslant e^{-\lambda a} \cdot \mathrm{E} e^{\lambda(\xi_1 + \ldots + \xi_n)} = e^{-\lambda a} \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E} e^{\lambda \xi_i} = e^{-\lambda a} \cdot \left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}\right)^n =$$

(по формуле (4))

$$= e^{-\lambda a} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!}\right)\right)^n = e^{-\lambda a} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\right)^n \leqslant$$

(за счет того, что $(2k)! \geqslant 2^k \cdot k!$)

$$\leqslant e^{-\lambda a} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{2^k \cdot k!} \right)^n =$$

(по формуле (4))

$$= e^{-\lambda a} \cdot e^{\frac{\lambda^2}{2} \cdot n} = e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

Теорема доказана.

9.2 Теорема 8 и раскраска

Нам дан гиперграф $H = (V, E)$ с $V = \{1, \ldots, n\}$ и $|E| = m$. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные величины из теоремы 8. С помощью них построим случайную раскраску χ, полагая $\chi(i) = \xi_i$. Покажем, что с положительной вероятностью для каждого $f \in E$ выполнено

$$|\chi(f)| \leqslant a, \quad a = \sqrt{2n \ln(2m)}.$$

Это и завершит доказательство теоремы 5. Но это равносильно тому, что с вероятностью, меньшей единицы, найдется $f \in E$, для которого $|\chi(f)| > a$. Для каждого отдельного ребра f

$$\mathrm{P}(|\chi(f)| > a) = \mathrm{P}\left(\left| \sum_{i \in f} \xi_i \right| > a \right) \leqslant$$

(по теореме 8)

$$\leqslant 2e^{-\frac{a^2}{2|f|}} \leqslant 2e^{-\frac{2n\ln(2m)}{2n}} = \frac{1}{m}.$$

При этом $|f|$ может равняться n лишь для одного $f \in E$, откуда

$$\mathrm{P}(\exists\ f: \ |\chi(f)| > a) \leqslant \sum_{f \in E} \mathrm{P}(|\chi(f)| > a) < \frac{|E|}{m} = 1,$$

и теорема доказана.

10 Доказательство теоремы 7

Сперва нам потребуются нетривиальные сведения из линейной алгебры.

Матрицы Адамара. Квадратную матрицу размера $n \times n$ мы назовем *матрицей Адамара*, если все ее элементы суть плюс и минус единицы, а строки ее попарно ортогональны. Априори не ясно даже, существует ли такая матрица, но заведомо понятно, что с тем же успехом можно было потребовать попарную ортогональность ее столбцов (вышло бы эквивалентное определение) и что домножение всех элементов любой строки (любого столбца) матрицы Адамара на -1 сохраняет "адамаровость". Упомянутые факты позволяют считать, что, скажем, все элементы первого столбца и первой строки матрицы Адамара суть единицы. Обозначим такую матрицу H_1.

Теперь о существовании матриц Адамара. Гипотеза, которая до сих пор не доказана, состоит в том, что эти матрицы существуют при $n = 1, 2$ и $n = 4k$. Известно, тем не менее, достаточно много. Так, например, установлено существование матриц при $n = 2^k$, $n = p^k + 1$, где p простое, а n делится на 4, при $n = 92, 116, 172$ и при различных других специальных значениях n (см. [16]). В конечном счете множество тех n, для которых матрицы Адамара железно найдутся, "плотно" в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ между n и $n(1 + \varepsilon)$ есть порядок матрицы Адамара.

Основная лемма. Пусть $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, где n_i — порядок матрицы Адамара. Рассмотрим для каждого $n = n_i$ матрицу H_1 порядка n. Возьмем, кроме того, матрицу J, состоящую из одних единиц, и положим $H^* = \frac{H_1+J}{2}$ (H^* — это (0,1)-матрица). Считая, что $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — это вектор в $\mathbb{R}^n$, определим его *норму* в l_p как

$$|\mathbf{x}|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p}$$

при $p \in [1, \infty)$ и как

$$|\mathbf{x}|_p = \max_i |x_i|$$

при $p = \infty$. Выполнена

Лемма 1. *Для любого вектора* $\mathbf{x}$*, координаты которого суть плюс и минус единицы, имеет место оценка*

$$|H^*\mathbf{x}|_\infty \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Доказательство леммы 1. Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ из формулировки леммы. Тогда

$$H_1\mathbf{x} = x_1\mathbf{h}_1 + \ldots + x_n\mathbf{h}_n,$$

где $\mathbf{h}_i$ — векторы-столбцы матрицы H_1. Полагая $H_1\mathbf{x} = (L_1, \ldots, L_n)$, имеем

$$L_1^2 + \ldots + L_n^2 = |H_1\mathbf{x}|_2^2 = x_1^2|\mathbf{h}_1|_2^2 + \ldots + x_n^2|\mathbf{h}_n|_2^2 = n + \ldots + n = n^2,$$

поскольку векторы $\mathbf{h}_i$ попарно ортогональны. Значит, некоторое L_i^2 оценивается снизу величиной n, и, стало быть, $|H_1\mathbf{x}|_\infty \geqslant \sqrt{n}$.

Хорошо. Пусть $h_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, — элементы матрицы H_1. Тогда

$$L_1 + \ldots + L_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j h_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} h_{i,j}\right) = x_1 \cdot n = \pm n,$$

поскольку сумма элементов матрицы H_1, стоящих в первой строке, есть, очевидно, n, а сумма элементов в остальных строках равна нулю (числа единиц и минус единиц в них одинаковы, ведь они должны быть ортогональны первой строке, в которой одни единицы).

Положим, далее,

$$\lambda = x_1 + \ldots + x_n,$$

так что $J\mathbf{x} = (\lambda, \ldots, \lambda)$. Соответственно,

$$(H_1 + J)\mathbf{x} = (L_1 + \lambda, \ldots, L_n + \lambda).$$

Следовательно,

$$|(H_1 + J)\mathbf{x}|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(L_i + \lambda)^2 = \sum_{i=1}^{n}(L_i^2 + 2L_i\lambda + \lambda^2) = n^2 \pm 2n\lambda + n\lambda^2.$$

У нас n четно, так как матриц Адамара нечетного порядка, конечно же, не бывает (исключение составляет вырожденный случай $n = 1$). Величина λ, будучи, стало быть, суммой четного числа плюс и минус единиц, есть тогда четное целое. Квадратичная форма (по λ) $n^2 \pm 2n\lambda + n\lambda^2$ достигает минимума при $\lambda = \pm 1$, но, как мы выяснили только что, λ обязано быть четным, и посему реальный минимум находится в $\lambda \in \{-2, 0, 2\}$. Это рассуждение влечет оценку

$$|(H_1 + J)\mathbf{x}|_2^2 \geqslant n^2.$$

Как это уже было однажды, последнее неравенство означает, что

$$|(H_1 + J)\mathbf{x}|_\infty \geqslant \sqrt{n},$$

т.е. $|H^*\mathbf{x}| \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$, и лемма доказана.

Завершение доказательства теоремы. Обозначим строки матрицы H^* через $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n$. Это (0,1)-векторы, которые мы превратим в подмножества $M_1, \ldots, M_n$ множества $V = \{1, \ldots, n\}$ по принципу $i \in M_j$ тогда и только тогда, когда i-я координата вектора $\mathbf{g}_j$ равна 1. Возникает гиперграф $H = (V, \{M_1, \ldots, M_n\})$, и нам остается понять, что для него

$$\mathrm{disc}(H) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Пусть χ — это произвольная раскраска. Ей однозначно соответствует $(-1, 1)$-вектор $\mathbf{x}$, состоящий из "цветов". Нетрудно видеть, что

$$|H^*\mathbf{x}|_\infty = \mathrm{disc}(H, \chi).$$

В самом деле,

$$H^*\mathbf{x} = ((\mathbf{g}_1, \mathbf{x}), \ldots, (\mathbf{g}_n, \mathbf{x})),$$

но

$$(\mathbf{g}_\nu, \mathbf{x}) = \sum_{i \in M_\nu} \chi(i), \;\; \nu = 1, \ldots, n,$$

и все в порядке. Раскраска χ была выбрана, по сути, наугад, и потому

$$\mathrm{disc}(H) = \min_\chi \mathrm{disc}(H, \chi) = \min_{\mathbf{x}} |H^*\mathbf{x}|_\infty \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$$

ввиду леммы 1. Теорема доказана для любого n, служащего порядком матрицы Адамара.

Во всей же своей полноте теорема немедленно следует из упомянутой выше плотности порядков матриц Адамара.

Список литературы

[1] А.М. Райгородский, *Хроматические числа*, Второе издание, МЦНМО, Москва, Россия, 2015.

[2] А. Райгородский, В. Воронов, А. Савватеев, *Прорыв в задаче о раскраске плоскости*, Квант, 11 (2018), 2 - 9.

[3] Н.Я. Виленкин, *Комбинаторика*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969.

[4] А.А. Глибичук, Д.Г. Ильинский, Д.В. Мусатов, А.М. Райгородский, А.А. Чернов, *Основы комбинаторики и теории чисел: задачник*, Интеллект, Второе издание, Долгопрудный, 2019.

[5] А.М. Райгородский, *Комбинаторика и теория вероятностей*, Интеллект, Долгопрудный, 2013.

[6] https://www.coursera.org/learn/kombinatorika-dlya-nachinayushchikh

[7] https://www.coursera.org/learn/modern-combinatorics

[8] https://www.coursera.org/learn/teoriya-grafov

[9] Ф. Харари, *Теория графов*, М.: Мир, 1973.

[10] А.А. Глибичук, А.Б. Дайняк, Д.Г. Ильинский, А.Б. Купавский, А.М. Райгородский, А.Б. Скопенков, А.А. Чернов, *Элементы дискретной математики в задачах*, МЦНМО, Москва, Россия, 2016.

[11] https://www.coursera.org/learn/probability-theory-basics

[12] А.М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, Москва, Россия, 2015, второе издание.

[13] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, 2007.

[14] А.М. Райгородский, *Вероятность и алгебра в комбинаторике*, МЦНМО, Москва, Россия, 2015, третье издание.

[15] А.М. Райгородский, *Модели случайных графов*, МЦНМО, Москва, Россия, 2016, второе издание.

[16] М. Холл, *Комбинаторика*, Москва, “Мир”, 1970.