Солитонные уравнения и симметрические функции

Н.А. Рожковская

12 июня 2020 г.

Оглавление

0.1 Предисловие

Солитонами называют удивительное явление – изолированные волны, взаимодействующие при столкновении особенным образом. Таким образом, солитоны – это волновые функции. Волновые функции, как правило, изучают с помощью уравнений в частных производных. Однако солитоны – столь важный и интересный феномен, что их описание давно вышло за рамки искусства решения дифференциальных уравнений. Современное исследование солитонов широко использует самые разнообразные ресурсы науки. Удивительными одиночными волнами занимаются инженеры, физики, прикладные математики, алгебраические геометры, специалисты по теории представлений, по математической физике, по уравнениям в частных производных, по интегрируемым системам, по вычислительной математике и моделированию. Именно сочетание столь разных областей математики и физики позволило ученым понять глубокую симметрию солитонных уравнений и разработать применения на практике.

На фоне богатого разнообразия результатов современных исследований задачи данного курса достаточно скромны. Наша цель – проследить одну-единственную связь между дифференциальными уравнениями, описывающими солитоны, и, казалось бы, достаточно далекой от них областью математики: теорией представлений бесконечномерных алгебраических структур. Связующим звеном между этими двумя областями является еще одна важная область современной математики: симметрические функции.

Представленные в этой брошюре лекции разбиты на две части. Первая часть основана на лекциях прочитанных автором в летней школе Современная Математика - Дубна 2019, и адресована студентам младших курсов математических факультетов. Следует признать, что вторая часть рассчитана на более опытного читателя, и представляет записки лекций для студентов старших курсов и аспирантов, прочитанных автором в 2018-2020 гг. в Сычуанском университете (г. Ченду, Китай) и в Канзасском государственном университете (Манхеттен, Канзас, США). Автор выражает глубокую благодарность слушателям этих курсов, а также организаторам летней школы в Дубне и зимней школы в Ченду.

Глава 1

Примеры солитонных уравнений и их решений

В первой части наших лекций мы рассмотрим два знаменитых примера солитонных уравнений: *уравнение Кортевега – де Фриза* (КдФ) и *уравнение Кадомцева – Петвиашвили* (КП). Мы определим в Лекции 1.5 *производные Хироты*, и с их помощью перепишем КдФ и КП уравнения в так называемой *билинейной форме*. Эта форма позволит нам увидеть, что КП уравнение входит в целое семейство уравнений в частных производных, называемое *КП иерархией*. Структура КП иерархии в билинейной форме описывается в Лекции 1.10 через *симметрические функции*, необходимые факты о которых мы вспомним в Лекции 1.8.

Продолжение этой темы, связь билинейной формы КП иерархии с представлениями алгебры фермионов, обсуждается во второй части этих лекций. Повторим, что вне нашего повествования останутся многие важные понятия и замечательные открытия в теории солитонов. В заключительной Лекции 2.9 читателю предлагается небольшой список литературы, который поможет ему продолжить изучение солитонов, познакомиться с другими примерами солитонных систем и их решениями, с Лаксовой формой уравнений, с псевдодифференциальными операторами, узнать про связь между КП иерархией и бесконечными грассманианами.

1.1 Краткая история открытия солитонов

Уже несколько столетий различные физические явления описываются учеными с помощью уравнений в частных производных. Однако приходится признать, что современная наука умеет решать аналитически лишь небольшую часть таких уравнений. Хорошо изучены свойства и решения линейных уравнений, а также отдельных примеров семейств нелинейных уравнений. Но для большинства даже самых простых нелинейных уравнений мы не можем выписать явные решения, выразить их через известные нам функции. Солитонные уравнения – это примеры нелинейных уравнений в частных производных, удивительным образом обладающие точными решениями.

Основные особенности солитонных уравнений заключаются в следующем:

- У этих нелинейных уравнений существуют решения, представляющие из себя движущиеся одиночные волны, или группы таких волн (именно они и называются *солитонами*).

Скорость движения одиночной волны зависит от высоты ее гребня, что и отличает ее от решения *линейного* дифференциального уравнения.

- Главной характеристикой солитонов является их поведение при столкновении. Столкновение двух одиночных волн не разрушает их, а провоцирует интересное взаимодействие, после которого волны продолжают свое движение, сохраняя ту же форму, что была до столкновения.

Эти особенности мы увидим ниже на примере конкретных решений КдФ уравнения.

В свое время открытие солитонов и их удивительных свойств показалось многим ученым настоящим чудом. Более того, самые первые сообщения о наблюдениях солитонов были встречены исследователями со значительным недоверием. Знаменитая история открытия солитонов столь поучительна, что ее часто включают в книги и статьи посвященные этому явлению. Мы тоже вкратце перескажем ее здесь, следуя [10], [11].

Первым обнаружил феномен одинокой бегущей волны выдающийся инженер - кораблестроитель из Эдинбурга Джон Скот Рассел[1]. Рассел был очень наблюдательным человеком. Как-то раз, следя за движением баржи в узком канале, он заметил одиночную волну, созданную носом судна. Баржа остановилась, но волна оторвалась и продолжила свое путешествие вдоль канала самостоятельно. Она пробежала несколько километров, не изменяя своей формы. Это явление настолько поразило Рассела, что он решил изучить его подробнее. Рассел не был математиком, он не решал уравнений. Он описал свои наблюдения в заметках, дополнив результатами поставленных им экспериментов. Инженер опубликовал свои наблюдения в *Докладе о волнах* в 1844 г. Однако поведение описанных в докладе волн настолько не соответствовало всему, что было известно на тот момент о решениях дифференциальных уравнений, что Расселу не поверили, и предположили, что скорее всего, он ошибся. Лишь много лет спустя Жозеф Валентин де Буссинеск[2] в 1877 году, а затем Дидерик Иоханнес Кортевег и Густав де Фриз[3] в 1895 году, вывели дифференциальные уравнения, которые допускают решения со свойствами, аналогичными свойствам уединенных волн Рассела.

Вероятно, Рассел так и не узнал, что он верно описал феномен. Однако и работы Буссинеска, Кортевега и де Фриза не привели к немедленному развитию науки о солитонах. Лишь в 1960-е годы, опять удивив ученых, солитонные волны были переоткрыты по-настоящему. В этом случае прорыв в понимании явления произошел благодаря развитию компьютеров. В 1965-м году Мартин Дэвид Крускал[4] и Норман Джулиус Забуски[5] провели численные исследования уравнения КдФ. Компьютерные эксперименты позволили обнаружить новые тонкие особенности поведения солитонов, которые сложно было заметить невооруженным глазом в обыкновенном эксперименте с волнами. Оказалось, что в некотором смысле внутреннее взаимодействие этих решений подобно поведению частиц.

Сегодня мы знаем ответы на многие вопросы о солитонах, в частности, что именно делает уравнение солитонным, и как написать другие уравнения такого типа.

[1]Джон Скот Рассел, шотландский инженер-кораблестроитель, (1808 - 1882).

[2]Жозеф Валентин де Буссинеск, французский физик и математик, (1842 - 1929).

[3]Дидерик Иоханнес Кортевег, нидерландский математик, (1848 - 1941). Густав де Фриз, нидерландский математик, (1866 - 1934).

[4]Мартин Дэвид Крускал, американский физик-теоретик и математик, (1925 - 2006).

[5]Норман Джулиус Забуски, американский физик-теоретик и математик, (1929 - 2018).

1.2 Уравнение КдФ

Рассмотрим наш первый пример солитонного уравнения. Это нелинейное уравнение в частных производных третьего порядка на функцию $u(x,t)$ от одной пространственной переменной x и одной временной переменной t:

$$u_t + \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx} = 0. \tag{1.2.1}$$

Уравнение носит имя *Кортевег – де Фриза* (сокращенно, *КдФ уравнение*). Заметим, что в литературе можно встретить различные эквивалентные формы КдФ уравнения. Приведенная здесь форма удобна для вычислений и дальнейшего сравнения с результатами второй части лекций, однако входящие в нее константы безразмерны и не имеют физического смысла.

Мы будем искать решения[6] специального вида

$$u(x,t) = z(x - ct). \tag{1.2.2}$$

Конечно, большинство нелинейных уравнений в частных производных не имеют решений вида (1.2.2), но, забегая вперед, скажем, что в данном случае нас ожидает удача: такое решение существует, и его явную формулу можно найти. Заметим, что подстановка (1.2.2) сведет уравнение в частных производных к дифференциальному уравнению на функцию от одной переменной. Решение будет действительно напоминать бегущую волну: с изменением времени t неизменный профиль графика функции $z(x)$ будет двигаться со скоростью c вдоль оси координат.

Для удобства вычислений сделаем замену переменных $\zeta = x - ct$. Получим:

$$u_x = z'(\zeta), \quad u_t = -cz'(\zeta), \quad u_{xxx} = z'''(\zeta).$$

Тогда КдФ уравнение принимает вид

$$-cz'(\zeta) + \frac{3}{2}z(\zeta)z'(\zeta) + \frac{1}{4}z'''(\zeta) = 0.$$

Заметим, что

$$(z^2)' = 2z'z,$$

поэтому

$$-cz' + \frac{3}{4}(z^2)' + \frac{1}{4}z'''(\zeta) = 0.$$

Проинтегрируем обе части по ζ:

$$-cz + \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{4}z'' + A_1 = 0,$$

где A_1 - некоторая константа. Домножим обе части на $4dz$ и проинтегрируем по dz:

$$-4czdz + 3z^2dz + z''dz + 4A_1dz = 0,$$

$$-2cz^2 + z^3 + \frac{1}{2}(z')^2 + 4A_1z + A_2 = 0,$$

[6] Дальнейшие вычисления в этой главе выполнены совместно с участником Летней Школы Современная Математика - Дубна 2019 Акпан Диммухаммедом.

где A_1, A_2 - константы. Здесь мы использовали, что

$$\frac{1}{2}d\left((z')^2\right) = z''dz,$$

так как

$$\frac{1}{2}\frac{d\left((z')^2\right)}{d\zeta} = \frac{1}{2}((z')^2)' = z''z' = z''\frac{dz}{d\zeta}.$$

Нам удобно считать, что $A_1 = A_2 = 0$. Этого можно добиться определив нужным образом начальные и граничные условия искомого решения. Тогда перепишем

$$(z')^2 = z^2(4c - 2z)$$

и выберем решение

$$\frac{dz}{d\zeta} = z\sqrt{4c - 2z}.$$

Применим метод разделения переменных:

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{4c-2z}} = \int d\zeta + A.$$

Чтобы посчитать интеграл в левой части уравнения, сделаем замену переменных с помощью гиперболических функций. Напомним определения гиперболического косинуса $ch(x)$, гиперболического синуса $sh(x)$ и гиперболического тангенса $th(x)$:

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}.$$

Сделаем замену переменных

$$z = \frac{2c}{ch^2(w)}.$$

Используя, что $ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1$, получим

$$4c - 2z = 4c\,th^2(w), \quad \frac{d\,z}{dw} = -4c\frac{sh(w)}{ch^3(w)}.$$

Тогда

$$\int \frac{1}{z\sqrt{(4c-2z)}}dz = \int \frac{ch^2(w)}{2c}\,\frac{ch(w)}{2\sqrt{c}\cdot\, sh(w)}\,\frac{-4c\cdot sh(w)dw}{ch^3(w)} = \int -\frac{1}{\sqrt{c}}\;dw.$$

Значит,

$$\int -\frac{1}{\sqrt{c}}dw = \int d\zeta + A,$$

и с точностью до изменения константы A имеем равенство

$$\zeta = -\frac{1}{\sqrt{c}}w - A, \quad w = -\sqrt{c}\,\zeta + A.$$

Подставив последнее выражение в $z = \frac{2c}{ch^2(w)}$, получим

$$z(\zeta) = \frac{8c}{(e^{-\sqrt{c}\zeta+A} + e^{\sqrt{c}\zeta-A})^2},$$

и, вернувшись к исходным обозначениям,

$$u(x,t) = \frac{8c}{(e^{-\sqrt{c}(x-ct)+A} + e^{\sqrt{c}(x-ct)-A})^2}.$$

Перепараметризировав $k = \sqrt{c}$, и положив $A = 0$, мы получим семейство решений КдФ уравнения

$$u_{(k)}(x,t) = \frac{8k^2}{(e^{-kx+k^3t} + e^{kx-k^3t})^2}. \tag{1.2.3}$$

Задача 1. Проверьте подстановкой функции в КдФ уравнение, что оно является решением этого уравнения[7].

1.3 Поведение найденного решения КдФ

Итак, для уравнения КдФ мы смогли найти целое семейство $u_{(k)}(x,t)$ явных решений этого уравнения. Изучим их поведение при различных значениях параметров k и t. Ответы на вопросы Задачи 2 мы приведем сразу же, но предлагаем читателю сначала попробовать ответить на них самостоятельно.

Задача 2.

1. Зафиксируем $k = 1$. Нарисуйте график $u_{(1)}(x,t)$ в моменты времени $t = 0, 1, 2$. Опишите поведение $u_{(1)}(x,t)$ с изменением значения параметра времени t.

2. Пусть k и t – некоторые фиксированные значения. Что тогда происходит со значением $u_{(k)}(x,t)$ как функции от перменной x при $x \to \pm\infty$?

3. Как зависит скорость движения профиля графика $u_{(k)}(x,t)$ вдоль оси x от значения параметра k? Как зависит высота профиля графика $u_{(k)}(x,t)$ от значения параметра k?

Приведем ответы на эти вопросы.

1. График решения $u_{(1)}(x,t) = 8/(e^{-x+t} + e^{x-t})^2$ в моменты времени $t = 0, 1, 2$ представлен на следующих рисунках.[8]

[7] Еще недавно большинство математиков проверяли бы подобное утверждение с помощью ручки и бумаги, но сегодня многие обратятся к удобствам компьютерных программ. Такой подход стал неотъемлемой частью современных исследований, поэтому данное и подобные упражнения предлагается выполнять соответственно предпочтениям читателя: “в ручную”, или с использованием компьютера.

[8] Построение выполнено в графическом онлайн калькуляторе desmos.com

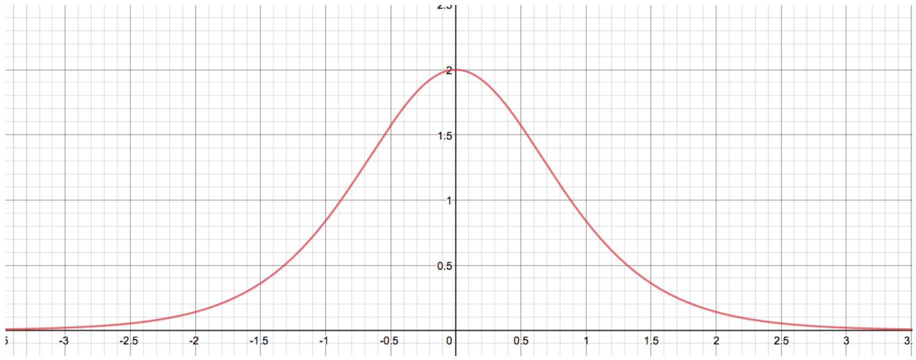


График $u_{(1)}(x, 0)$.

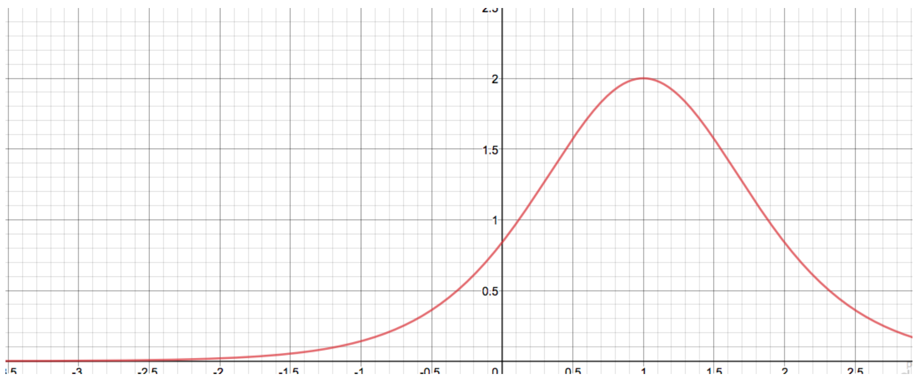


График $u_{(1)}(x, 1)$.

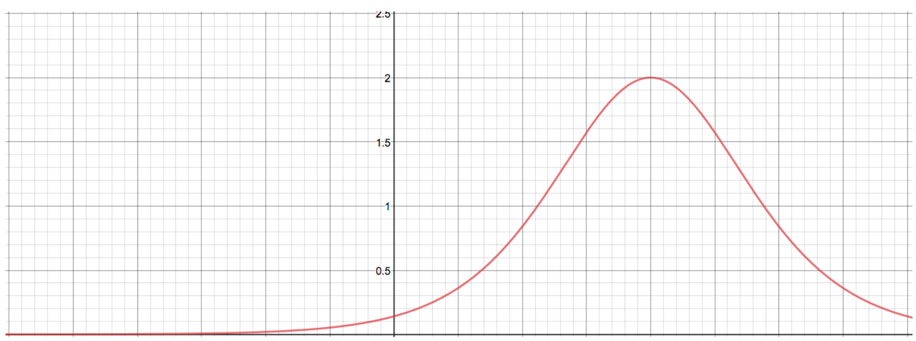


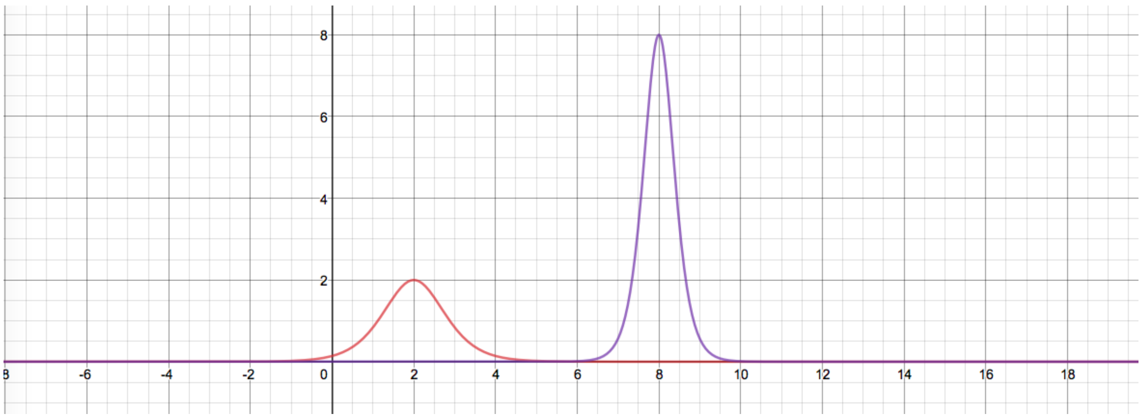
График $u_{(1)}(x, 2)$.

Профиль решения $u_{(1)}(x, t)$ в каждый момент времени представляет из себя уединенный гребень волны. Соответственно нашим ожиданиям, его форма не меняется со временем, а лишь передвигается вдоль оси x.

2. Зафиксируем значения параметров k и t. Тогда при $x \to \pm\infty$ имеем $u_{(k)}(x, t) \to 0$. Это свойство графика связано с нашим выбором в вычислениях констант $A_1 = A_2 = 0$.

3. Заметим, что высота гребня решения $u_{(k)}(x, t)$ равна $2k^2$, а скорость передвижения вдоль оси x равна k^3. Получается, что высота волны и ее скорость передвижения связаны между собой, и высокие волны движутся быстрее низких. Это можно увидеть, например,

сравнив движение графиков $u_{(1)}(x,t)$ и $u_{(2)}(x,t)$. На следующем рисунке изображено относительное положение этих двух профилей в момент времени $t=2$ (красный профиль соответствует $k=1$, а фиолетовый $k=2$): При $t=0$ пики обеих волн находились на отметке $x=0$; к моменту $t=2$ гребень решения $u_{(2)}(x,2)$ продвинулся на 8 единиц от $x=0$, в то время как $u_{(1)}(x,2)$ только на 2 единицы. Высота медленного низкого красного гребня равна 2 единицам, а высота быстрого высокого фиолетового гребня равна 8 единицам.



Графики $u_{(1)}(x,2)$ и $u_{(2)}(x,2)$.

Однако это еще не все удивительные свойства решений уравнения КдФ. Слово "солитон" содержит в себе два намека на сущность явления. Уединенность бегущих волн внесла в название корень *соло*, одинокий. Окончание - *тон* подсказывает ассоциации с названиями частиц (электрон, протон ...), так как в поведении некоторых волн - солитонов ученые увидели аналогии с поведением частиц. Именно это свойство обнаружили М. Крускал и Н. Забуски, и мы тоже сможем увидеть его в нашем случае.

Для начала возьмем два различных солитонных решения КдФ уравнения вида (1.2.3), например при $k=1$ и $k=2$, и сложим их:

$$v(x,t) = u_{(1)}(x,t) + u_{(2)}(x,t).$$

Нетрудно понять, как будет эволюционировать график этой функции с течением времени. Гребень, соответсвующий $u_{(2)}(x,2)$, догонит гребень соответсвующий $u_{(1)}(x,2)$, сложится с ним в момент времени $t=0$, и умчится вперед:

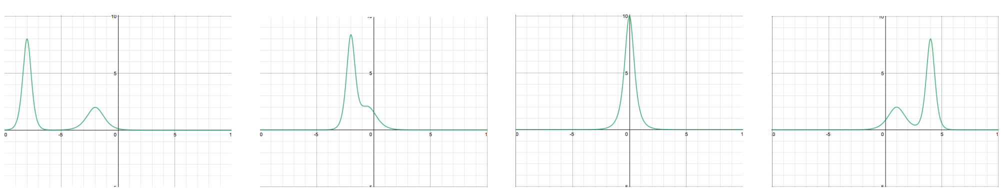


График $v(x,t)$ в разные моменты времени t.

Однако $v(x,t)$ – не совсем та функция, которая нам нужна. Дело в том, что $u_{(1)}(x,t)+u_{(2)}(x,t)$ не является решением КдФ уравнения. Вспомним, что уравнение КдФ нелинейно, и линейные комбинации решений не обязаны являться решениями КдФ. Поэтому математически мы не обнаружили ничего нового, мы всего лишь независимо запустили два отдельных решения, и подтвердили, что разной высоты волны двигаются с разной скоростью.

Каждое найденное нами выше решение КдФ вида (1.2.3) называется *один-солитоном*, потому что состоит из одного движущегося гребня волны. Оказывается, существуют более общие N-солитонные решения, которые состоят из группы N гребней (но не являются суммами один-солитонов!) Удивительным образом, как и в случае с один-солитонами, каждый из гребней этой группы двигается со скоростью, зависящей от его высоты.

Например, следующая функция является 2-солитоном. Она является решением КдФ уравнения и, как следует из графика, представляет из себя группу из двух гребней. [9]

$$u(x,t) = \frac{24\left(e^{(2x-2t)} + 6e^{(6x-18t)} + 4e^{(4x-16t)} + 4e^{(8x-20t)} + e^{(10x-34t)}\right)}{\left(1 + 3e^{(2x-2t)} + e^{(6x-18t)} + 3e^{(4x-16t)}\right)^2} \tag{1.3.1}$$

На первый взгляд, поведение графика $u(x,t)$ ничем не отличается от поведения $v(x,t)$: быстрый гребень догоняет медленный и убегает вперед (и это само по себе удивительно!):

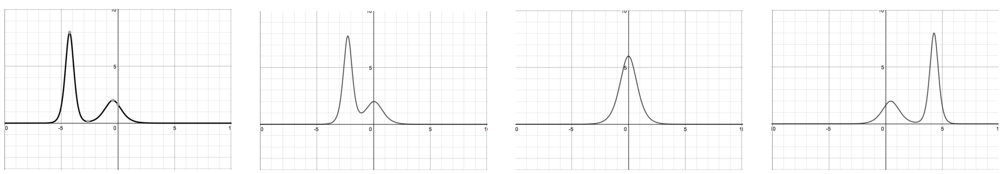
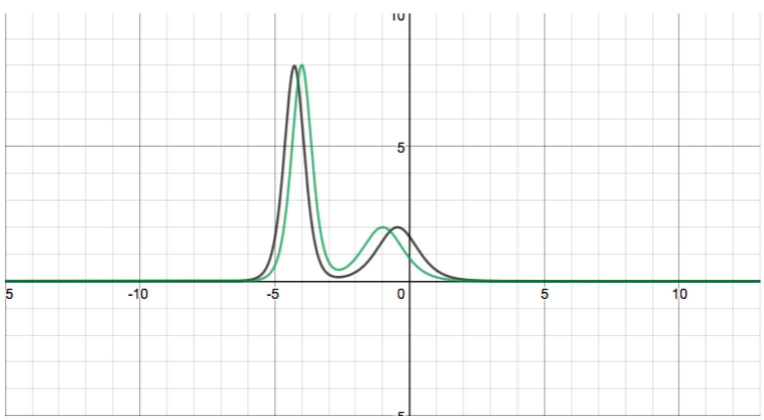
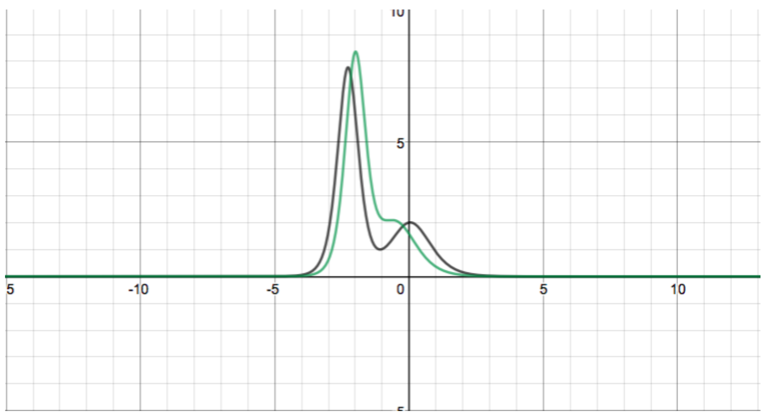


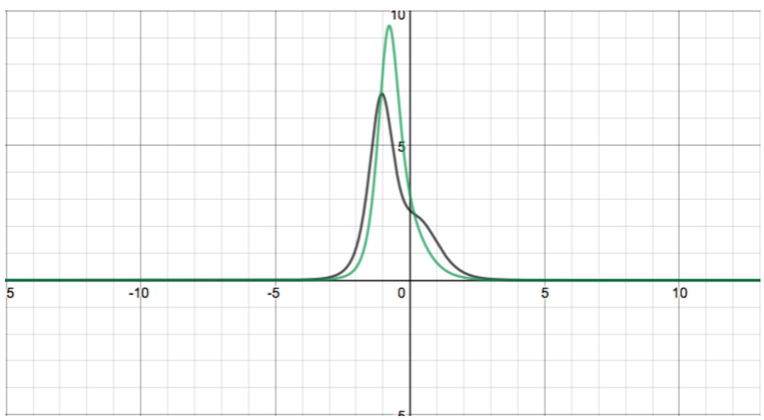
График $u(x,t)$ в разные моменты времени t.

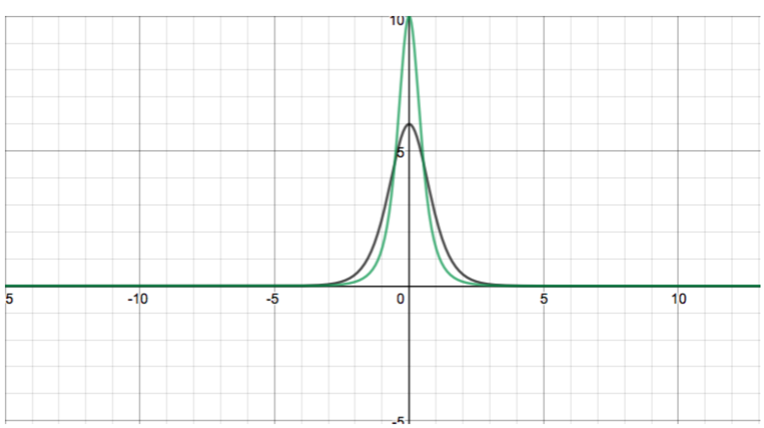
Однако дополнительно к общему типу поведения обеих функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$, есть очень тонкое свойство, выделяющее 2-солитон $u(x,t)$. Это свойство считается характеристической особенностью солитонов. Его легче всего обнаружит, наложив движение черного профиля 2-солитона $u(x,t)$ на движение зеленого профиля функции $v(x,t)$:

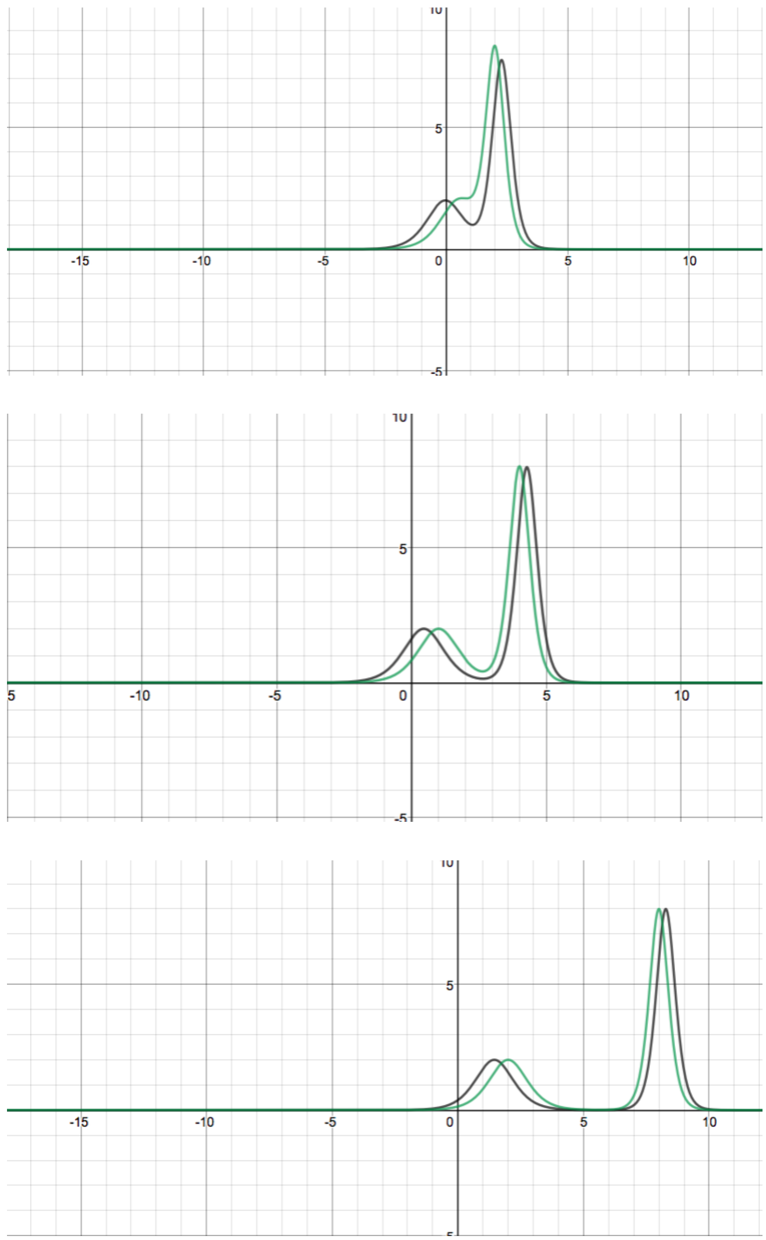


[9] Формула этого решения взята из [11].


10
5
5
-10
-5
0
5
10
-5


10
5
5
-10
-5
0
5
10
-5


10
5
5
-10
-5
0
5
10
-5



Сравнение поведения $u(x,t)$ и $v(x,t)$.

Читатель наверняка заметил сходства и различия в поведении этих графиков. В обоих случаях высокий пик профиля догоняет низкий, затем происходит момент слияния, после которого высокий пик, покинув низкий, уходит вперед, причем оба пика обретают ту же форму, что и была до взаимодействия. Однако момент взаимодействия происходит по-разному.

- Обратим внимание на высоту графиков в момент полного слияния $t = 0$. У зеленого профиля $v(x,t)$ максимум в момент полного слияния высокого и низкого пиков очевидным образом равен сумме высот пиков. Однако у черного профиля $u(x,t)$ высота пика в этот момент явно меньше суммы высот исходных пиков.

- Заметим также, что до момента слияния черный низкий гребень двигался впереди зеленого низкого гребня, но оказался позади после момента слияния.

- Момент взаимодействия поведение пиков у черного решения КдФ $u(x,t)$ существенно отличается от поведения пиков у зеленой суммы решений $v(x,t)$. Зеленые гребни просто "проскакивают" друг сквозь друга. Более сложное поведение черного графика можно описать используя разные аналогии. Мы приведем здесь описание из [11], проводящее аналогию с поведением частиц следующим образом. Когда обе волны соприкасаются, большая волна как бы замедляется и начинает уменьшаться, "перетекать" в малую, в то время как малая волна начинает ускоряться и расти, пока не вырастает до размера большой. В этот момент бывшая малая волна отрывается от бывшей большой и уходит вперед, оставляя за собой бывшую большую. Получается что-то вроде фазового перехода - волны "обмениваются импульсами". Именно такое необычное поведение решений КдФ напомнило ученым аналогию с поведением частиц, которые, столкнувшись, обменялись импульсами: быстрые частицы замедлились, подтолкнув медленные, и продолжили свое движение.

1.4 Уравнение КП

Мы познакомились с солитонным уравнением КдФ и некоторыми его решениями. В дальнейшем речь пойдет о другом солитонном уравнении, которое названо *КП уравнением* в честь Бориса Борисовича Кадомцева [10] и Владимира Иосифовича Петвиашвили[11]. Это уравнение описывает свойства функции $u(x,y,t)$ от трех переменных, где t, как и раньше, – параметр времени, а x и y – пространственные координаты:

$$\frac{3}{4}u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_t - \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{4}u_{xxx}\right). \tag{1.4.1}$$

Заметим, что правая часть уравнения (1.4.1) содержит в себе левую часть уравнения КдФ (1.2.1) (при замене переменной t на $-t$), поэтому можно считать КП уравнение двумерным аналогом КдФ уравнения, а решения уравнения КдФ можно отождествить с теми решениями уравнения КП, которые не зависят от параметра y. Однако интересно найти решения КП уравнения (1.4.1) зависящие от y. Поиски таких решений привели ученых к замечательным открытиям.

- Оказалось, что КП уравнение существует не само по себе, а входит в целое семейство уравнений. Это счетное семейство называется *КП иерархией.*

- Всю КП иерархию можно записать в компактной форме в виде одного уравнения, называемого *билинейным тождеством*:

$$P_Y\tau\cdot\tau = 0. \tag{1.4.2}$$

  Конечно, за столь короткой формулой скрываются довольно сложные обозначения. Наша цель – понять структуру этого билинейного тождества.

[10] Борис Борисович Кадомцев, советский и российский физик(1928 - 1998)
[11]Владимир Иосифович Петвиашвили, советский и российский физик (1936 - 1993).

- Удивительным образом система уравнений КП иерархии совместима - существуют общие решения всех уравнений одновременно.
- Еще более удивительным образом, среди решений КП иерархии оказались знаменитые объекты из совершенно другой области математики – *симметрические функции Шура.*

Итак, разберемся, что скрывается за обозначениями формулы (1.4.2).

1.5 Производные Хироты

Уравнение (1.4.2) записано в терминах производных Хироты[12], которые мы определим в этой главе. При первом знакомстве производные Хироты могут показаться довольно странной и громоздкой операцией, особенно учитывая, что результат применения производных Хироты можно записать через привычные нам производные, и эти формулы, как правило, довольно сложны. Более того, производные Хироты отнюдь не универсальны – далеко не каждое дифференциальное уравнение можно записать через производные Хироты. Кроме того, производные Хироты не обладают привычными нам алгебраическими свойствами дифференцирования (такими, например, как тождество Лейбница). Поэтому у читателя может возникнуть естественное недоумение: зачем нужно вводить такую сложную операцию? Чем это лучше записи уравнений в привычных нам терминах обыкновенных производных?

Мы ответим на этот вопрос следующим образом. Производные Хироты были придуманы специально для изучения солитонных уравнений. Неуниверсальность производных Хироты в каком-то смысле является их достоинством, а не недостатком: если какое-то уравнение все-таки можно записать через производные Хироты, это указывает, что у этого уравнения могут быть определенные симметрии, уравнение может оказаться интересным для исследования. Более того, именно запись уравнений в терминах производных Хироты помогает связать изучение таких уравнений с другими, более алгебраическими областями математики и применить знания из этой области.

Дадим, наконец, определение производной Хироты.

Зафиксируем набор переменных $(x_1, x_2, \dots)$. Пусть $P(x_1, x_2, \dots)$ – многочлен от этих переменных, а $f(x_1, x_2, \dots)$ и $g(x_1, x_2, \dots)$ – некоторые функции.

Определение 1.5.1. *Производной Хироты* $Pf \cdot g$ функций f g называется выражение

$$Pf \cdot g = P\left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2} \dots\right) f(x_1 - u_1, x_2 - u_2, \dots) g(x_1 + u_1, x_2 + u_2, \dots)|_{u_1 = u_2 = \dots = 0}.$$

Уравнение

$$Pf \cdot g = 0$$

называется *билинейным уравнением Хироты.*

Пример 1.5.1. Рассмотрим случай одной переменной. Тогда

$$\text{для } P = x, \quad x\, f \cdot g = \frac{\partial}{\partial u} f(x-u) g(x+u)|_{u=0} = -f'g + g'f,$$

$$\text{для } P = x^2\ , \quad x^2\, f \cdot g = \frac{\partial^2}{\partial u^2} f(x-u) g(x+u)|_{u=0} = f''g - 2f'g' + fg'',$$

[12] Реге Хирота – японский математик, (1932 - 2015).

и в общем случае

$$\text{для } P = x^n \ , \quad x^n\, f \cdot g = \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^n f(x-u)g(x+u)|_{u=0} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \frac{\partial^{n-k} g}{\partial x^{n-k}}. \qquad (1.5.1)$$

Задача 3. Докажите равенство (1.5.1).

Пример 1.5.2. Пусть $P = xy$. Тогда

$$xy\, f \cdot f = 2(f''_{xy} f - f'_x f'_y).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} xy\, f \cdot f &= \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} \left(f(x-u, y-v) f(x+u, y+v)\right)|_{u=v=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial v}\big(-f'_x(x, y-v) f(x, y+v) + f'_x(x, y+v) f(x, y-v)\big)|_{v=0} \\ &= f''_{xy} f - f'_x f'_y + f''_{xy} f - f'_x f'_y = 2(f f''_{xy} - f_x f_y). \end{aligned}$$

□

Пример 1.5.3. Рассмотрим случай нескольких переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Пусть $P = x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}$. Тогда

$$P f \cdot g = (-1)^{i_1 + i_2 \cdots + i_k} P g \cdot f.$$

Задача 4. Рассмотрим случай одной переменной. Тогда $P f \cdot f$ тождественно равно нулю для всех функций f в том и только в том случае, когда $P(x) = -P(-x)$.

1.6 Уравнения КдФ и КП через производные Хироты

Предложение 1.6.1. *Уравнение КдФ* [13]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2} u u_x + \frac{1}{4} u_{xxx} = 0$$

эквивалентно уравнению в производных Хироты на функцию $\tau(x,t)$

$$(4t\, x + x^4)\, \tau \cdot \tau = 0.$$

Связь между $u(x,t)$ *и* $\tau(x,t)$ *задается переходом*

$$u(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, \ln \tau(x,t).$$

Доказательство. Используя $(u^2)_x = 2uu_x$, перепишем КдФ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{4}(u^2)_x + \frac{1}{4} u_{xxx} = 0,$$

[13] Вычисления в этой главе выполнены совместно с участником летней школы Современная Математика 2019 Акпан Диммухаммедом.

и сделаем замену переменных $u(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln\tau(x,t)$:

$$2\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2} \ln\tau + \frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{2\partial^2}{\partial x^2}\ln\tau\right)^2\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^5}{\partial x^5}(\ln\tau) = 0.$$

Проинтегрируем обе части по x:

$$2\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} \ln\tau + 3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\tau\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^4}{\partial x^4}(\ln\tau) = 0. \tag{1.6.1}$$

Доказательство утверждения про КдФ завершает следующая лемма. □

Лемма 1.6.1.

$$\frac{1}{\tau^2}(tx\,\tau\cdot\tau) = 2\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} \ln\tau. \tag{1.6.2}$$

$$\frac{1}{2\tau^2}\left(x^2\tau\cdot\tau\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\tau. \tag{1.6.3}$$

$$\frac{1}{4\tau^2}\left(x^4\tau\cdot\tau\right) - 3\left(\frac{1}{2\tau^2}\left(x^2\tau\cdot\tau\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\ln\tau. \tag{1.6.4}$$

Доказательство. Все три утверждения леммы доказываются прямой проверкой определения производной Хироты. В Примере 1.5.2 мы показали, что

$$tx\,\tau\cdot\tau = 2(\tau_{xt}\tau - \tau_t\tau_x),$$

и это равенство можно сравнить с

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} \ln\tau = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tau_x}{\tau}\right) = \frac{\tau_{xt}\tau - \tau_t\tau_x}{\tau^2}.$$

Имеем:

$$\frac{1}{2\tau^2}\left(x^2\tau\cdot\tau\right) = \frac{1}{2\tau^2}\left(-2\tau'_x\tau'_x + 2\tau''_{xx}\tau\right), \tag{1.6.5}$$

в то время как

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\tau = \left(\frac{\tau'_x}{\tau}\right)'_x = \frac{\tau''_{xx}\tau - \tau'_x\tau'_x}{\tau^2}.$$

Для последнего равенства вычислим

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}(\ln\tau) = \frac{1}{\tau^4}\left(\tau_{xxxx}\tau^3 - 4\tau_{xxx}\tau_x\tau^2 + 12\tau_{xx}(\tau_x)^2\tau - 3(\tau_{xx})^2\tau^2 - 6\tau_x^4\right).$$

Используя формулу (1.5.1), найдем что

$$\frac{1}{4\tau^2}\left(x^4\,\tau\cdot\tau\right) = \frac{1}{2\tau^2}(\tau\tau_{xxxx} - 4\tau_x\tau_{xxx} + 3(\tau_{xx})^2).$$

Тогда полученный ранее результат (1.6.5) позволяет убедиться, что выражения $\frac{1}{4\tau^2}\left(x^4\tau\cdot\tau\right) - 3\left(\frac{1}{2\tau^2}\left(x^2\tau\cdot\tau\right)\right)^2$ и $\frac{1}{2}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\ln\tau$ совпадают. □

.

Предложение 1.6.2. *КП уравнение*

$$\frac{3}{4}u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_t - \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{4}u_{xxx}\right)$$

эквивалентно уравнению в производных Хироты

$$(3y^2 - 4tx + x^4)\tau \cdot \tau = 0. \tag{1.6.6}$$

Связь между функциями $u(x, y, t)$ и $\tau(x, y, t)$ задается переходом

$$u(x, y, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ \ln \tau(x, y, t).$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения повторяет в точности предыдущее. Запишем КП уравнение в виде

$$\frac{3}{4}u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_t - \frac{3}{4}(u^2)_x - \frac{1}{4}u_{xxx}\right),$$

и сделаем замену переменных $u(x, y, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ \ln \tau(x, y, t)$. Получим

$$\frac{3}{2}\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}\ \ln \tau = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2}\ \ln \tau - \frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{2\partial^2}{\partial x^2}\ln \tau\right)^2\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^5}{\partial x^5}\left(\ln \tau\right)\right).$$

Проинтегрируем дважды по x обе части уравнения, получим

$$\frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ \ln \tau = 2\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\ \ln \tau - 3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln \tau\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\ln \tau\right). \tag{1.6.7}$$

Правая части этого равенства аналогична КдФ уравнению (1.6.1), и мы ее уже посчитали в предыдущем предложении. Она равна $\frac{1}{\tau^2}(tx - 1/4x^4)$ Из (1.6.3) левая часть выражается как

$$\frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ \ln \tau = \frac{3}{4\tau^2}\left(y^2\, \tau \cdot \tau\right),$$

откуда получаем (1.6.6). □

1.7 От одного уравнения к системе уравнений

Итак, мы теперь знаем, что в компактной форме билинейного уравнения (1.4.2) использованы обозначения производных Хироты, где некоторое выражение P_Y применяется в виде производной Хироты к функции τ. Объясним, как из одного уравнения (1.4.2) получится счетная система уравнений на функцию τ. Выражение

$$P_Y(p_1, p_2, \dots) = P(Y_1, Y_2, \dots, p_1, p_2, \dots)$$

окажется степенным рядом от двух наборов переменных: $(Y_1, Y_2, \dots)$ и $(p_1, p_2, \dots)$. Мы разложим $P_Y(p_1, p_2, \dots)$ по степеням $Y_1, Y_2, \dots$, и получим

$$\begin{aligned} P_Y(p_1, p_2, \dots) = & P_0(p_1) + Y_1\, P_1(p_1, p_2) + Y_2\, P_2(p_1, p_2, p_3) \\ & + Y_1^2\, P_{1^2}(p_1, p_2, p_3) + Y_3\, P_3(p_1, p_2, p_3, p_4) + \dots, \end{aligned}$$

где $P_{1^{a_1}2^{a_2}\dots k^{a_k}}(p_1, \dots, p_{k+1})$ – многочлен от переменных $(p_1, \dots, p_{k+1})$. В таком разложении билинейное тождество

$$P_Y \tau \cdot \tau = 0$$

имеет вид

$$\begin{aligned} & P_0(p_1)\tau\cdot\tau + Y_1 P_1(p_1, p_2)\tau\cdot\tau + Y_2 P_2(p_1, p_2, p_3)\tau\cdot\tau \\ & + Y_1^2 P_{1^2}(p_1, p_2, p_3)\tau\cdot\tau + Y_3 P_3(p_1, p_2, p_3, p_4)\tau\cdot\tau + \dots = 0. \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

Каждый коэффициент этого разложения задает уравнение в частных производных:

$$\begin{aligned} P_0(p_1)\tau\cdot\tau = 0, \\ P_1(p_1, p_2)\tau\cdot\tau = 0, \\ P_2(p_1, p_2, p_3)\tau\cdot\tau = 0, \\ P_{1^1}(p_1, p_2, p_3)\tau\cdot\tau = 0, \\ P_3(p_1, p_2, p_3, p_4)\tau\cdot\tau = 0, \\ \dots \end{aligned}$$

Эта система уравнений называется *КП иерархией*. Мы покажем, что исходное КП уравнение (1.6.6) входит в эту систему как коэффициент при Y_3 (т. е. совпадает с билинейным уравнением Хироты $P_3(p_1, p_2, p_3, p_4)\tau\cdot\tau = 0$). Этот факт мы продемонстрируем позже.

Чтобы полностью понять структуру тождества (1.4.2), мы должны объяснить, что такое P_Y. Точную формулу для выражения P_Y мы предъявим чуть позже, определив его через симметрические функции.

1.8 Симметрические функции

Оставим на время билинейные и дифференциальные уравнения, чтобы сформулировать необходимые сведения о симметрических функциях. Мы опустим доказательства большинства из этих утверждений, предлагая читателю обратиться к подробным монографиям о симметрических функциях, таким, как, например, [7], [9].

Определение 1.8.1. Многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ от n переменных называется *симметрическим*, если значение многочлена не меняется от перестановки переменных:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \quad \text{для любой перестановки} \quad \sigma \in S_n.$$

Обозначим через $\Lambda^n = \Lambda[x_1, x_2, \dots, x_n]$ кольцо всех симметрических многочленов от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Пример 1.8.1. *Степенные суммы* – это симметрические многочлены вида

$$p_k = x_1^k + \dots + x_n^k, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Например, след k-й степени матрицы $\operatorname{tr} A^k$ равен степенной сумме p_k от собственных значений этой матрицы.

Пример 1.8.2. *Полные симметрические* многочлены

$$h_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} x_{i_1} \dots x_{i_k} \quad k = 1, 2, \dots.$$

Нам будет удобно считать $h_0 = 1$ и $h_k = 0$ при $k < 0$.

Пример 1.8.3. *Элементарные симметрические* многочлены

$$e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} x_{i_1} \dots x_{i_k} \quad k = 1, 2, \dots.$$

Вспомним, например, что e_k появляются в разложении многочлена с корнями $x_1, \dots, x_n$:

$$(u - x_1) \dots (u - x_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e_k(x_1, \dots, x_n) u^{n-k} \tag{1.8.1}$$

Нам будет удобно считать $e_0 = 1$ и $e_k = 0$ при $k < 0$.

Задача 5. Выпишите явно выражения для $h_2(x_1, x_2, x_3)$, $e_n(x_1, \dots, x_n)$, $e_{n+1}(x_1, \dots, x_n)$.

Определенные выше три семейства симметрических многочленов будут играть ключевую роль в нашем повествовании. Кроме того, нам необходимо вспомнить определение двух других семейств симметрических функций, имеющих широкое приложение в разных областях математики.

Определение 1.8.2. *Разбиением числа* N называется конечная последовательность $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ неотрицательных целых чисел, расположенных в невозрастающем порядке $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_l \ge 0$, таких что $\lambda_1 + \dots + \lambda_l = N$. В этом случае пишут $\lambda \vdash N$.

Пример 1.8.4. Пусть. $x_1, \dots, x_n$ – набор переменных, и пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ – некоторое разбиение, где $l \le n$. Дополнив части разбиения $\lambda_{l+1} = \dots = \lambda_n = 0$, можно считать, что $l = n$. *Многочленом Шура* называется симметрический многочлен

$$s_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{\det[x_i^{\lambda_j + n - j}]}{\det[x_i^{n-j}]}. \tag{1.8.2}$$

Обратите внимание на любопытное свойство этого выражения: определение s_λ содержит отношение двух многочленов, которое в общем случае не обязано быть многочленом. Однако в этом случае рациональное выражение сокращается и действительно является многочленом

Задача 6. Убедитесь, что $s_{(k)} = h_k$ и $s_{(1^k)} = e_k$ (здесь $(1^k) = (\underbrace{1 \dots 1}_{k})$). Отметим, что степенные суммы p_k при $k > 1$ не являются примерами многочленов Шура.

Замечание 1.8.1. Существуют другие эквивалентные определения многочленов Шура s_λ, например как суммы мономов по стандартным таблицам Юнга формы λ. Многочлены Шура играют важную роль в теории представлений групп и алгебр Ли и в алгебраической геометрии.

Пример 1.8.5. Пусть. $x_1, \dots, x_n$ – набор переменных, и пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ – некоторое разбиение, где $l \le n$. *Мономиальным симметрическим многочленом* называется симметрический многочлен

$$m_\lambda = \sum_{i_1,\dots,i_l=1}^{n} x_{i_1}^{\lambda_1} \dots x_{i_l}^{\lambda_l}.$$

Задача 7. Выпишите явно выражение для $m_{2,1}(x_1, x_2, x_3)$.

Важное замечание: от симметрических многочленов к симметрическим функциям.

Мы определили симметрические *многочлены* как функции от конечного числа n переменных $x_1, \dots, x_n$, инвариантные относительно действия перестановок переменных, и число переменных n является частью этого определения. Однако нам понадобятся симметрические *функции*, которые отличаются от многочленов тем, что зависят от бесконечного набора переменных $x_1, x_2, \dots$, и их определение не зависит от числа переменных. Как обычно, при переходе от конечных объектов к бесконечным, необходимо соблюдать осторожность, определения должны быть корректны и не противоречивы.

Переход от определения симметрических полиномов к определению симметрических функций можно совершить двумя эквивалентными способами.

Первый способ [7] предлагает использовать те же самые определения e_k, h_k, p_k, не указывая в них число переменных, считая его равным любому удобному нам числу (а остальные симметрические функции можно определить через эти семейства, используя формулы перехода). Такой переход возможен благодаря свойству *стабильности* симметрических многочленов. Проиллюстрируем свойство стабильности на примере e_2: можно определить элементарную симметрическую функцию от трех переменных

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = \sum_{1 \le i < j \le 3} x_i x_j,$$

а можно от четырех:

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j,$$

и эти два многочлена связаны соотношением

$$e_2(x_1, x_2, x_3, 0) = e_2(x_1, x_2, x_3).$$

Это и есть пример свойства стабильности.

Приведем для полноты изложения определение симметрических функций основанное на свойстве стабильности многочленов. Однако мы не будем использовать его явно в наших рассуждениях, поэтому читатель, при желании, может его пропустить. Пусть $f(x_1, \dots, x_m) \in \Lambda^m$ – однородный симметрический многочлен. Для любого $n < m$ рассмотрим

$$\rho_{m,n}(f) = f(x_1, \dots, x_n, 0, \dots 0).$$

Заметим, что $\rho_{m,n}(f)$ – тоже симметрический многочлен, но теперь от n переменных. Таким образом, у нас есть набор гомоморфизмов $\rho_{m,n} : \Lambda^m \to \Lambda^n$, и соответствующий набор последовательностей $(f_0, f_1, \dots)$, где члены последовательности обладают свойством $f_n = \rho_{m,n} f_m$. Именно эти последовательности формально называются симметрическими функциями. Они образуют кольцо, которое мы будем обозначать Λ, и по сути это обратный предел колец Λ^n: $\Lambda = \varprojlim \Lambda^n$.

Второй подход [9] предлагает перенести Определение 1.8.1 на бесконечное число переменных, рассматривая степенные ряды вместо многочленов. Однако здесь могут возникнуть некоторые трудности с понятием, что такое перестановка бесконечного числа переменных, а также со свойствами такого множества инвариантных степенных рядов. Чтобы избежать неприятных ньюансов, в новом определении накладывается ограничение, что мы рассматриваем только степенные ряды в линейной оболочке базиса мономиальных симметрических функций. Именно, пусть $x_1, x_2, x_3 \dots$ – бесконечный набор переменных. Для любого разбиения $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 0)$ определим *мономиальную симметрическую функцию* как формальный степенной ряд

$$m_\lambda = \sum_{i_1,\dots,i_l=1}^{\infty} x_{i_1}^{\lambda_1} \dots x_{i_l}^{\lambda_l}.$$

Определение 1.8.3. Формальный степенной ряд $f(x_1, x_2, \dots)$ называется *симметрической функцией* если он является линейной комбинацией мономиальных симметрических функций.

Линейная оболочка мономиальных симметрических функций является не только векторным пространством, но и кольцом, которое мы будем называть *кольцом симметрических функций* и обозначать Λ.

Замечание 1.8.2. Заметим, что любая симметрическая функция инвариантна относительно любой конечной перестановки $\sigma \in S_n$ переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для любого конечного n:

$$f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \dots) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, x_{n+1} \dots).$$

Однако не всякий формальный степенной ряд обладающий подобным свойством мы называем симметрической функцией. Например, несмотря на то, что выражение $\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x_i)$ инвариантно относительно любых конечных перестановок, его разложение в ряд не является симметрической функцией, так как не может быть записано в виде конечной линейной комбинации мономиальных симметрических функций.

1.9 Переходы между семействами симметрических функций

Очень важная теорема объясняет структуру кольца симметрических функций. Доказательство этой теоремы можно найти в [7].

Теорема 1.9.1.

$$\Lambda = \mathbb{C}[h_1, h_2, \dots] = \mathbb{C}[e_1, e_2, \dots] = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]. \tag{1.9.1}$$

Теорема гласит, что любая симметрическая функция может быть представлена в виде многочлена от полных симметрических функций, или в виде многочлена от элементарных симметрических функций, или в виде многочлена от степенных сумм.

В частности, элементы каждого из трех семейств можно выразить как многочлены от элементов любого другого семейства. Например,

$$\begin{aligned} e_n &= \det(h_{1-i+j})_{1\le i,j\le n}, \\ h_n &= \det(e_{1-i+j})_{1\le i,j\le n}, \end{aligned} \tag{1.9.2}$$

$$p_n = \det\begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ne_n & e_{n-1} & e_{n-2} & \dots & e_1 \end{pmatrix}, \tag{1.9.3}$$

$$e_n = \frac{1}{n!}\det\begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & p_1 \end{pmatrix}, \tag{1.9.4}$$

$$p_n = (-1)^{n-1}\det\begin{pmatrix} h_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2h_2 & h_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ nh_n & h_{n-1} & h_{n-2} & \dots & h_1 \end{pmatrix}, \tag{1.9.5}$$

$$h_n = \frac{1}{n!}\det\begin{pmatrix} p_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & p_1 \end{pmatrix}. \tag{1.9.6}$$

Формула, выражающая функции Шура через полные симметрические функции, называется *тождеством Якоби - Труди*[14] :

$$s_\lambda = \det[h_{\lambda_i - i + j}]. \tag{1.9.7}$$

Эти формулы можно найти в [7]. Там же ([7], I.5.) доказывается следующее утверждение.

Теорема 1.9.2. *Множество функций Шура $\{s_\lambda\}$, пронумерованных всеми разбиениями λ, образует линейный базис кольца симметрических функций Λ*

Иначе говоря, любую симметрическую функцию можно записать как конечную линейную комбинацию функций Шура (единственным образом).

Задача 8. Выразите степенные суммы p_1, p_2, p_3 как линейные комбинации функций Шура $\{s_\lambda\}$.

[14] Тождество сформулировано в 1841 г немецким математиком Карлом Густавом Якоби (1804-1851) и доказано в 1864 г итальянским математиком Никола Труди (1811-1884)

Есть еще один, очень изящный способ выразить соотношения между различными семействами симметрических функций: записать соотношения для производящих функции этих симметрических функций. Основы методов производящих функций различных *числовых* последовательностей можно изучить по [5], [12]. Здесь мы введем формальные производящие функции для семейств симметрических функций:

$$E(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k u^k, \quad H(u) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k u^k, \quad P(u) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k u^{k-1}. \tag{1.9.8}$$

Доказательства следующих свойств производящих функций можно найти в [7].

Предложение 1.9.1.

$$E(u) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x_i u). \tag{1.9.9}$$

$$H(u) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x_i u}, \tag{1.9.10}$$

$$H(u)E(-u) = 1. \tag{1.9.11}$$

Замечание 1.9.1. В равенстве (1.8.1) разделим обе части на u^n и заменим $x_i \to -x_i$ и $u \to 1/u$. Получим

$$(1 + x_1 u) \dots (1 + x_n u) = \sum_{k=0}^{n} e_k(x_1, \dots, x_n) u^k$$

Устремив $n \to \infty$ мы получим тождество (1.9.9).

Определение 1.9.1. Для любого выражения Y определим $exp(Y)$ как формальный ряд

$$exp(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y^k}{k!} = 1 + Y + \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{6} + \dots. \tag{1.9.12}$$

Предложение 1.9.2. *[7].*

$$P(u) = \frac{H'(u)}{H(u)}, \quad P(-u) = \frac{E'(u)}{E(u)}, \tag{1.9.13}$$

$$H(u) = exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{p_n}{n} u^n \right), \tag{1.9.14}$$

$$E(u) = exp\left(- \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n p_n}{n} u^n \right). \tag{1.9.15}$$

Замечание 1.9.2. Заметим, что формулы (1.9.14), (1.9.15) следуют из формул (1.9.13), так как $\frac{H'(u)}{H(u)} = (\ln H(u))'$, поэтому

$$P(u) = p_1 + p_2 u + p_3 u^2 + \cdots = (\ln H(u))',$$

$$p_1 + \frac{p_2 u}{2} + \frac{p_3 u^2}{3} + \cdots = \ln H(u),$$
$$exp\left(p_1 + \frac{p_2 u}{2} + \frac{p_3 u^2}{3} + \dots\right) = H(u).$$

Нам понадобится обобщение соотношений (1.9.14), (1.9.15), которое мы сформулируем в следующем предложении.

Предложение 1.9.3. *Пусть $X(u) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k u^k$, где X_k – некоторые выражения. Пусть $S_k(X_1, X_2, \dots, X_k)$ – коэффициенты в разложении ряда*

$$\exp(X(u)) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(X_1, X_2, \dots, X_k) u^k. \tag{1.9.16}$$

Тогда

$$S_k(X_1, X_2, \dots X_k) = \det \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} X_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2X_2 & X_1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 3X_3 & 2X_2 & X_1 & -3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ kX_k & (k-1)X_{k-1} & (k-2)X_{k-2} & (k-3)X_{k-3} & \dots & X_1 \end{pmatrix},$$

или, эквивалентно,

$$S_k(X_1, X_2, \dots, X_k) = \sum_{s=1}^{k} \sum_{l_1 + 2l_2 + \dots + sl_s = k,\, l_i \geq 1} \frac{1}{l_1! \dots l_s!} X_1^{l_1} \dots X_s^{l_s}.$$

Доказательство этого предложения можно провести дословно повторив рассуждения в [7], объясняющие связь между степенными симметрическими функциями и полными симметрическими функциями. В частности, заметим, что $h_k = S_k(p_1, p_2/2, p_3/3 \dots p_k/k)$.

Пример 1.9.1. Посчитаем несколько первых коэффициентов в (1.9.16):

$$S_0 = 1, \qquad S_1 = X_1, \qquad S_2 = \frac{1}{2} X_1^2 + X_2, \qquad S_3 = X_3 + X_2 X_1 + \frac{1}{6} X_1^3,$$
$$S_4 = X_4 + X_3 X_1 + \frac{1}{2} X_2^2 + \frac{1}{2} X_2 X_1^2 + \frac{1}{24} X_1^4.$$

1.10 Определение $P_Y(p_1, p_2, \dots)$

Теперь мы можем определить в (1.4.2) выражение $P_Y(p_1, p_2, \dots)$ и проверить, что в разложении (1.7.1) уравнения $P_Y \tau \cdot \tau = 0$ один из коэффициентов действительно совпадает с билинейной формой КП уравнения.

Рассмотрим два набора независимых переменных $(Y_1, Y_2, Y_3, \dots)$ и $(p_1, p_2, p_3, \dots)$. Следуя Предложению 1.9.3, определим $S_k(-2Y_1, -2Y_2, -2Y_3 \dots)$ и $S_k(p_1, p_2/2, p_3/3, \dots)$ через соотношения

$$exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2Y_k}{u^k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(-2Y_1, -2Y_2, -2Y_3 \dots)}{u^k},$$
$$exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{ku^k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(p_1, p_2/2, p_3/3 \dots)}{u^k}.$$

Определение. *КП иерархией* называется система уравнений

$$P_Y \tau \cdot \tau = 0$$

на функцию $\tau(p_1, p_2, \dots)$, где

$$P_Y(p_1, p_2, \dots) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(-2Y_1, -2Y_2, -2Y_3 \dots) S_{j+1}(p_1, p_2/2, p_3/3, \dots) exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} Y_s p_s\right). \quad (1.10.1)$$

Вспомним, что нас интересуют коэффициенты разложения $P_Y(p_1, p_2, \dots)$ относительно переменных $Y_1, Y_2, \dots$. Вычислим нескольких младших коэффициенты в этом разложении используя вычисления Примера 1.9.1. Мы используем ниже обозначение $\tilde{p} = (p_1, p_2/2, p_3/3, \dots)$.

$$\begin{aligned} P_Y(p_1, p_2, \dots) = &\big(S_0(-2Y_1, -2Y_2, \dots)S_1(\tilde{p}) + S_1(-2Y_1, -2Y_2, \dots)S_2(\tilde{p}) \\ &+ S_2(-2Y_1, -2Y_2, \dots)S_3(\tilde{p}) + S_3(-2Y_1, -2Y_2, \dots)S_4(\tilde{p}) + \dots\big) \\ \times &\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} Y_s p_s + \frac{1}{2}\left(\sum_{s=1}^{\infty} Y_s p_s\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\sum_{s=1}^{\infty} Y_s p_s\right)^3 + \dots\right) \\ = &\left(p_1 - 2Y_1 S_2(\tilde{p}) + \left(2Y_1^2 - 2Y_2\right) S_3(\tilde{p}) + \left(\frac{-4}{3} Y_1^3 + 4Y_2 Y_1 - 2Y_3\right) S_4(\tilde{p}) + \dots\right) \\ &\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} Y_s p_s + \frac{1}{2}\left(\sum_{s=1}^{\infty} Y_s p_s\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\sum_{s=1}^{\infty} Y_s p_s\right)^3 + \dots\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P_Y(p_1, p_2, \dots) = &p_1 + Y_1(-2S_2(\tilde{p}) + p_1^2) + Y_2(-2S_3(\tilde{p}) + p_1 p_2) \\ &+ Y_1^2(-2S_2(\tilde{p})p_1 + \frac{1}{2}p_1^3 + 2S_3(\tilde{p})) + Y_3(-2S_4(\tilde{p}) + p_3 p_1) + \dots, \end{aligned}$$

и билинейное тождество в терминах производных Хироты (1.4.2) можно понимать как семейство уравнений, каждое из которых соответсвует одному из коэффициентов этого разложения:

$$\begin{aligned} &p_1 \tau \cdot \tau = 0, \\ &(-2S_2(\tilde{p}) + p_1^2)\tau \cdot \tau = 0, \\ &(-2S_3(\tilde{p}) + p_2 p_1)\tau \cdot \tau = 0, \\ &(-2S_2(\tilde{p})p_1 + \frac{1}{2}p_1^3 + 2S_3(\tilde{p}))\tau \cdot \tau = 0, \\ &(-2S_4(\tilde{p}) + p_3 p_1)\tau \cdot \tau = 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Предложение 1.10.1. *В разложении выше коэффициент при* Y_3 *задает КП уравнение в билинейной форме.*

Доказательство. Коэффициент при Y_3 равен

$$(p_3p_1 - 2S_4(\tilde{p}))\tau \cdot \tau = (p_1p_3/3 - p_4/2 - p_2^2/4 - p_1^4/12 - p_1^2p_2/2)\tau \cdot \tau \tag{1.10.2}$$

Вспомним, что мы доказали в Примере 1.5.1, что для любых $f(x)$, $g(x)$,

$$x\, f \cdot g = -f'g + g'f.$$

Отсюда легко видеть, что для любого k,

$$p_k \tau \cdot \tau \equiv 0,$$

и точно также можно увидеть, что

$$p_1^2 p_2 \tau \cdot \tau \equiv 0.$$

Это наблюдение позволяет упростить выражение (1.10.2) задаваемое коэффициентом при Y_3 до

$$(p_1^4 + 3p_2^2 - 4p_1p_3)\tau \cdot \tau = 0,$$

что точности совпадает с билинейной форму КП уравнения (1.6.6) при замене

$$p_1 \to x, \quad p_2 \to y, \quad p_3 \to t. \tag{1.10.3}$$

Задача 9. Выпишите и упростите уравнения КП иерархии, соответствующие постоянному коэффициенту, а также коэффициентам при Y_1, Y_2, Y_1^2. Какие условия на $\tau(p_1, p_2, \dots)$ они накладывают? Какие из этих уравнений задают тавтологические равенства?

□

Мы показали, что КП уравнение является частью бесконечной системы билинейных уравнений на функцию $\tau(p_1, p_2, \dots)$, где переменные $p_1, p_2, \dots$ естественным образом отождествляются со степенными функциями. Используя это отождествление, можно искать решения КП иерархии в кольце симметрических функции Λ (или в его пополнении). Очевидным образом каждое найденное решение КП иерархии будет решением КП уравнения. На данный момент, конечно, нам не ясно, существуют ли вообще такие решения – является ли система уравнений КП иерархии совместимой. Забегая вперед, сообщим, что удивительным образом эта система не только совместима, но и обладает замечательным набором решений: функции Шура s_λ являются решениями КП иерархии. Мы докажем это в конце второй части этих лекций.

Глава 2

Действия алгебраических структур

В предыдущих лекциях мы объяснили структуру билинейного тождества $P_Y \tau \cdot \tau = 0$ и показали, что КП уравнение входит в это тождество как один из коэффициентов разложения в степенной ряд. Однако многое по-прежнему осталось неясным. Во-первых, мы никак не объяснили происхождение столь замысловатой формулы для P_Y. Во-вторых, мы заявили, что функции Шура являются решениями билинейного КП тождества, однако мы не привели никакого доказательства этого факта. Цель второй главы – ответить на эти и некоторые другие вопросы.

Стиль изложения во второй главе может показаться читателю отличным от стиля первой главы: действительно, от изучения конкретных решений уравнений в частных производных мы переходим к теории представлений. Соответственно, эта глава предполагает большей математической осведомленности от читателя: мы будем использовать такие понятия, как скалярное произведение, прямые суммы и тензорные произведения векторных пространств, внешняя степень пространства, и т.д.

2.1 Операторы, действующие на кольце симметрических функций

В Лекции 1.8 мы познакомились со многими важными свойствами симметрических функций. Продолжим знакомство с кольцом симметрических функций Λ.

В кольце симметрических функций Λ можно ввести скалярное произведение $\langle \, , \, \rangle$, потребовав, чтобы базис функций Шура был ортонормированным относительно этого скалярного произведения:

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}.$$

С помощью этого скалярного произведения для любого оператора действующего на кольце Λ можно определить соответствующий сопряженный оператор. В частности заметим, что каждый элемент f кольца Λ задает оператор умножения на симметрическую функцию f:

$$f : g \mapsto fg, \qquad f, g \in \Lambda.$$

Соответствующий сопряженный оператор мы будем обозначать $f^\perp$, а действие этого оператора на Λ определено соотношением

$$\langle f^\perp g, w \rangle = \langle g, fw \rangle, \quad \text{где} \quad g, f, w \in \Lambda.$$

Известно ([7], I.5. Упражнение 3), что

$$p_n^\perp = n\frac{\partial}{\partial p_n}.$$

Из (1.9.1) следует, что каждый элемент $f \in \Lambda$ можно выразить как многочлен от степенных функций

$$f = F(p_1, p_2, p_3, \dots).$$

Тогда соответствующий сопряженный оператор можно записать как полиномиальный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$f^\perp = F(\partial/\partial p_1, 2\partial/\partial p_2, 3\partial/\partial p_3, \dots). \tag{2.1.1}$$

В частности, из (1.9.4), (1.9.6) получим:

$$e_n^\perp = \frac{1}{n!}\det\begin{pmatrix} \partial/\partial p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2\partial/\partial p_2 & \partial/\partial p_1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n\partial/\partial p_n & (n-1)\partial/\partial p_{n-1} & (n-2)\partial/\partial p_{n-2} & \dots & \partial/\partial p_1 \end{pmatrix}, \tag{2.1.2}$$

$$h_n^\perp = \frac{1}{n!}\det\begin{pmatrix} \partial/\partial p_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 2\partial/\partial p_2 & \partial/\partial p_1 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n\partial/\partial p_n & (n-1)\partial/\partial p_{n-1} & (n-2)\partial/\partial p_{n-2} & \dots & \partial/\partial p_1 \end{pmatrix}. \tag{2.1.3}$$

Из этих формул следует очень важное для нас свойство локальной конечности действия операторов $h_n^\perp$ и $e_n^\perp$ на пространстве Λ:

Лемма 2.1.1. *Для любой симметрической функции $f \in \Lambda$ существует такое натуральное число N, что $e_l^\perp(f) = 0$ и $h_l^\perp(f) = 0$ для всех $l \geq N$.*

Доказательство. Докажем лемму в случае когда f – моном, $f = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m} \in \Lambda$, где $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Положим $N = k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m$. Заметим, что из формул (2.1.2), (2.1.3) следует, что операторы $e_l^\perp$ и $h_l^\perp$ являются линейными комбинациями мономов $(\partial/\partial p_1)^{a_1} \dots (\partial/\partial p_m)^{a_m}$, таких что $a_1 + 2a_2 + \dots + ma_m = l$. Пусть $l > N$. Тогда по принципу Дирихле существует такое i, что $a_i > k_i$, и поэтому $e_l^\perp(f) = 0$ и $h_l^\perp(f)$.

В общем случае вспомним, что любая симметрическая функция является линейной комбинацией мономов переменных $p_1, p_2, \dots$, поэтому следует взять максимальное из всех значений N для мономов этой линейной комбинации. ☐

Мы определили в (1.9.8) производящие функции $H(u)$ полных симметрических функций h_k и $E(u)$ элементарных симметрических функций e_k. Будем использовать это же обозначение, $H(u)$ и $E(u)$, для производящих функций операторов умножения на элементы h_k, e_k. Введем производящие функции для сопряженных операторов

$$E^\perp(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k^\perp u^{-k}, \quad H^\perp(u) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k^\perp u^{-k}.$$

Также определим $P^\perp(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p_k} u^{-k}$. Следующее предложение немедленно следует из (1.9.14), (1.9.15) и (2.1.1).

Предложение 2.1.1. *([7], I.5)*

$$E^{\perp}(u) = exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\partial}{\partial p_k}\frac{1}{u^k}\right), \tag{2.1.4}$$

$$H^{\perp}(u) = exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p_k}\frac{1}{u^k}\right). \tag{2.1.5}$$

Итак, мы определили семейства операторов $\{e_k, h_k, p_k, e_k^{\perp}, h_k^{\perp}, p_k^{\perp}\}$ действующих на пространстве Λ. Информацию об этих операторах мы храним в виде производящих функций $E(u)$, $H(u)$, $P(u)$, $E^{\perp}(u)$, $H^{\perp}(u)$, $P^{\perp}(u)$. Заметим, что операторы умножения на симметрические функции коммутируют между собой, равно как и соответствующие присоединенные операторы:

$$fg(w) = gf(w), \quad f^{\perp}g^{\perp}(w) = g^{\perp}f^{\perp}(w) \quad \text{для любых} \quad f, g, w \in \Lambda.$$

Однако, как правило, операторы умножения не коммутируют с присоединенными операторами:

$$fg^{\perp}(w) \neq g^{\perp}f(w).$$

Коммутационные соотношения в этом случае удобно записать в компактной форме с помощью производящих функций.

Предложение 2.1.2. *Операторы $e_k, h_k, e_k^{\perp}, h_k^{\perp}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям, которые можно записать в виде формальных равенств производящих функций*

$$\left(1 - \frac{v}{u}\right) E^{\perp}(u)E(v) = E(v)E^{\perp}(u),$$
$$\left(1 - \frac{v}{u}\right) H^{\perp}(u)H(v) = H(v)H^{\perp}(u),$$
$$H^{\perp}(u)E(v) = \left(1 + \frac{v}{u}\right) E(v)H^{\perp}(u),$$
$$E^{\perp}(u)H(v) = \left(1 + \frac{v}{u}\right) H(v)E^{\perp}(u).$$

Доказательство этих формул можно найти в ([7] I.5, Упражнение 29).

Замечание 2.1.1. Равенства Предложения 2.1.2 следует понимать как равенства коэффициентов бесконечных рядов в разложении по степеням $u^{-k}v^m$ для $k, m \geq 0$. Коэффициенты этих рядов – операторы, действующие на пространстве симметрических функций. Например, левую часть первого равенства следует понимать как

$$\left(1 - \frac{v}{u}\right) E^{\perp}(u)E(v) = \left(1 - \frac{v}{u}\right) \sum_{k,l=0}^{\infty} e_k^{\perp} e_l \frac{v^l}{u^k} = \sum_{k,l=0}^{\infty} (e_k^{\perp} e_l - e_{k-1}^{\perp} e_{l-1}) \frac{v^l}{u^k},$$

а правую - как

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} e_l e_k^{\perp} \frac{v^l}{u^k},$$

что дает соотношения на операторы

$$e_k^{\perp} e_l - e_{k-1}^{\perp} e_{l-1} = e_l e_k^{\perp} \quad \text{для} \quad k, l \geq 0,$$

и т. п.

2.2 Формальные распределения.

В дальнейшем мы будем использовать производящие функции для доказательств соотношений между операторами действующими на симметрических функциях. Для этих целей нам понадобятся общие сведения о формальных распределениях – объектах, обобщающих понятие степенных рядов и рядов Лорана.

В этой главе мы используем материалы [1], [3], [4], и рекомендуем читателю обратиться к этим источникам для получения более полной информации о формальных распределениях.

Рассмотрим алгебру A. Введем формальное выражение вида

$$a(u) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i u^i, \quad a_i \in A.$$

Такие выражения мы будем называть *формальными распределениями* с коэффициентами в алгебре A. Множество всех формальных распределений с коэффициентами в алгебре A мы будем обозначать $A[[u, u^{-1}]]$.

Строго говоря, каждое формальное распределение $\sum a_i u^i$ – это набор $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ элементов алгебры A, записаный в форме, удобной для определения некоторых операций на множестве этих элементов. Например, сложение двух формальных распределений

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i u^i + \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i u^i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (a_i + b_i) u^i, \quad a_i, b_i \in A,$$

и умножение на элементы алгебры A

$$b \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i u^i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (b a_i) u^i, \quad a_i, b \in A,$$

задает на $A[[u, u^{-1}]]$ структуру A-модуля.

Заметим что, ограничивая число ненулевых коэффициентов формального распределения, можно получить объекты широко используемые в алгебре и анализе. Например,

$A[u]$ – множество многочленов от одной переменной: $\displaystyle\sum_{i=0}^{M} a_i u^i$,

$A[[u]]$ – множество степенных рядов от одной переменной: $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i u^i$,

$A[u, u^{-1}]$ – множество многочленов Лорана: $\displaystyle\sum_{i=-N}^{M} a_i u^i$,

$A((u, u^{-1}))$ – множество рядов Лорана: $\displaystyle\sum_{i=-N}^{\infty} a_i u^i$.

Каждое из этих множеств является алгеброй с умножением определенным по правилу

$$\sum_i a_i u^i \cdot \sum_j b_j u^j = \sum_k \left(\sum_i a_i b_{k-i} \right) u^k,$$

здесь выражение $\sum_i a_i b_{k-i}$ – корректно определенная конечная сумма, элемент алгебры A. Однако в общем случае умножение формальных распределений не определено. Поэтому умножение формальных распределений мы будем рассматривать только тогда, когда эта операция имеет смысл в силу особых свойств заданных формальных распределений.

Задача 10. Убедитесь, что $a(u)^2$ не может быть корректно определено для комплекснозначного формального распределения $a(u) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u^i$.

Задача 11. Пусть $a(u) \in A[[u, u^{-1}]]$ – формальное распределение с коэффициентами в алгебре A, а $b(u) \in A((u, u^{-1}))$ – ряд Лорана с коэффициентами в алгебре A. Докажите, что $a(u)b(u)$ – корректно определенное формальное распределение.

Аналогично можно ввести формальные распределения от нескольких переменных $u_1, \dots, u_l$ как наборы $(a_{i_1,\dots,i_l})_{i_1,\dots,i_l \in \mathbb{Z}}$ элементов алгебры A, записаных в виде формального ряда

$$\sum_{i_1,\dots,i_l} a_{i_1,\dots,i_l} u_1^{i_1} \dots u_l^{i_l}$$

с покомпонентным сложением и умножением на элементы алгебры A. Множество формальных распределений от нескольких переменных мы будем обозначать $A[[u_1, \dots, u_l, u_1^{-1}, \dots, u_l^{-1}]]$.

Формальная дельта-функция $\delta(u, w)$ – это замечательный пример комплекснозначного формального распределения от двух переменных. По определению,

$$\delta(u, w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{u^n}{w^{n+1}}. \tag{2.2.1}$$

Предложение 2.2.1. *Формальная дельта-функция обладает следующими свойствами:*

a)
$$\delta(u, w) = \delta(w, u).$$

b) Пусть $a(u) \in A[[u, u^{-1}]]$ – формальное распределение. Тогда $a(u)\delta(u, w)$ и $a(w)\delta(u, w)$ – корректно определенные формальные распределения от двух переменных, при этом

$$a(u)\delta(u, w) = a(w)\delta(u, w).$$

Доказательство. a) Это свойство очевидно из симметрии в выражении $\delta(u, w)$:

$$\delta(u, w) = \dots + \frac{w}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} + \dots .$$

b) Заметим, что для любого формального распределения $a(u) \in A[[u, u^{-1}]]$,

$$a(u)\delta(u, w) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m u^m \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{u^n}{w^{n+1}} = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} a_m \frac{u^{n+m}}{w^{n+1}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_{k+p+1} u^k w^p$$

– корректно определенное формальное распределение, коэффициент каждого монома $u^k w^p$ – элемент a_{k+p+1} алгебры A. Кроме того,

$$\sum_{p,k \in \mathbb{Z}} a_{k+p+1} u^k w^p = \sum_{m,k \in \mathbb{Z}} a_m u^k w^{m-k-1} = a(w) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{u^k}{w^{k+1}} = a(w)\delta(u, w).$$

□

Замечание 2.2.1. Введем обозначение $i_{u,w}(f)$ для ряда Тейлора разложения рациональной функции f в области $|u| > |w|$. Вспомним, что в области $|u| > |w|$ значения рациональной функции $1/(u-w)$ можно представить как сумму сходящегося ряда геометрической прогрессии, т.е.

$$\frac{1}{u-w} = i_{u,w}\left(\frac{1}{u-w}\right) = \frac{1}{u} + \frac{w}{u} + \frac{w^2}{u^3} + \dots,$$

а в области $|u| < |w|$ как сумму сходящегося ряда

$$\frac{1}{u-w} = i_{w,u}\left(\frac{1}{u-w}\right) = -\frac{1}{w} - \frac{u}{w} - \frac{u^2}{w^3} - \dots,$$

что связывает формальную дельта-функцию с этими разложениями:

$$\delta(u,w) = i_{u,w}\left(\frac{1}{u-w}\right) - i_{w,u}\left(\frac{1}{u-w}\right).$$

Алгебра фермионов

Алегбра фермионов $\mathcal{C}l$ (или *бесконечная алгебра Клиффорда*) определяется следующим образом. Она порождена операторами рождения $\{\psi_k^+\}_{k\in\mathbb{Z}+1/2}$, операторами уничтожения $\{\psi_k^-\}_{k\in\mathbb{Z}+1/2}$, единицей 1, удовлетворяющим антикоммутационным соотношениям

$$\psi_k^{\pm}\psi_l^{\pm} + \psi_l^{\pm}\psi_k^{\pm} = 0, \tag{2.2.2}$$
$$\psi_k^{+}\psi_l^{-} + \psi_l^{-}\psi_k^{+} = \delta_{k,-l}\cdot 1, \quad k,l \in \mathbb{Z}+1/2. \tag{2.2.3}$$

Здесь, как обычно,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Задача 12. Покажите, что $\left(\sum_{k=M}^{N} A_k\psi^+\right)^2 = 0$ и $\left(\sum_{k=M}^{N} A_k\psi^-\right)^2 = 0$ для любых целых чисел $N \geq M$ и $A_k \in \mathbb{C}$.

Введем формальные распределения с коэффициентами в алгебре фермионов

$$\psi^+(u) = \sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_i^+ u^{-i-1/2} \quad \text{и} \quad \psi^-(u) = \sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_i^- u^{-i-1/2}. \tag{2.2.4}$$

Предложение 2.2.2. *Соотношения (2.2.2), (2.2.3) эквивалентны равенствам формальных распределений*

$$\psi^{\pm}(u)\psi^{\pm}(v) + \psi^{\pm}(v)\psi^{\pm}(u) = 0, \tag{2.2.5}$$
$$\psi^{+}(u)\psi^{-}(v) + \psi^{-}(v)\psi^{+}(u) = \delta(u,v). \tag{2.2.6}$$

Доказательство. Это следует из несложных вычислений:

$$\psi^{\pm}(u)\psi^{\pm}(v) + \psi^{\pm}(v)\psi^{\pm}(u) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}+1/2} (\psi_i^{\pm}\psi_j^{\pm} + \psi_j^{\pm}\psi_i^{\pm})u^{-i-1/2}v^{-j-1/2} = 0.$$

Аналогично,

$$\psi^+(u)\psi^-(v)+\psi^-(v)\psi^+(u) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}+1/2}(\psi_i^+\psi_j^- + \psi_j^-\psi_i^+)u^{-i-1/2}v^{-j-1/2}$$
$$= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}+1/2}\delta_{i,-j}u^{-i-1/2}v^{-j-1/2} = \sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2}u^{-i-1/2}v^{i-1/2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}u^kv^{-k-1}.$$

□

2.3 Действие фермионов на внешней алгебре

Отметим, что фермионы $\psi_k^\pm, \psi_l^\pm$ антикоммутируют друг с другом при $k \neq -l$. Возможно, читателю это обстоятельство напомнило антикоммутационные соотношения во внешних алгебрах векторных пространств, или в пространствах дифференциальных форм:

$$v \wedge w + w \wedge v = 0, \quad w, v \in V. \tag{2.3.1}$$

Это сходство неслучайно. Оказывается, алгебра фермионов $\mathcal{C}l$ обладает естественным действием на внешней алгебре $\bigwedge^\infty V$ счетномерного векторного пространства V. Этот объект мы определим ниже.

Заметим, что, как всегда, бесконечномерность вводимой алгебраической структуры $\bigwedge^\infty V$ предполагает крайнюю осторожность в определениях. Более того, желательно чтобы эта бесконечномерность "была контролируемой", в частности, чтобы в $\bigwedge^\infty V$ существовал удобный линейный базис. Одним из способов "контроля" над бесконечномерной алгебраической структурой является ее определение как градуированного пространства.

Пусть V – счетномерное пространство со счетным линейным базисом $\{v_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Определим *m-тый вакуумный вектор* как полубесконечный моном

$$|m\rangle = v_m \wedge v_{m-1} \wedge \dots \quad .$$

Здесь используется операция внешнего произведения элементов пространства V, и предполагаются стандартные антикоммутационные свойства (2.3.1) этой операции.

Пусть пространство $\mathcal{F}^{(m)}$ состоит из линейных комбинаций полубесконечных мономов вида

$$v_{i_0} \wedge v_{i_1} \wedge \dots,$$

отличающихся от монома $|m\rangle$ лишь в конечном числе мест:

$$i_k = m - k \quad \text{для} \quad k >> 0.$$

Определим градуированное *фермионное пространство Фока* $\mathcal{F}$ как прямую сумму пространств $\mathcal{F}^{(m)}$:

$$\mathcal{F} = \oplus_{m\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}^{(m)}.$$

Это и есть наш бесконечномерный аналог внешнего произведения векторного пространства

$$\bigwedge^\infty(V) := \mathcal{F}.$$

Задача 13. Принадлежат ли эти мономы пространству $\mathcal{F}$? Если да, то какой градуированной компоненте $\mathcal{F}^{(m)}$?

$$\begin{aligned}
&1)\quad v_0 \wedge v_{-1} \wedge v_{-2} \wedge v_{-3} \wedge v_{-4} \wedge v_{-5} \wedge \dots \\
&2)\quad v_5 \wedge v_6 \wedge v_{-2} \wedge v_{-3} \wedge v_{-4} \wedge v_{-5} \wedge \dots \\
&3)\quad v_5 \wedge v_6 \wedge v_0 \wedge v_{-1} \wedge v_{-2} \wedge v_{-3} \wedge \dots \\
&4)\quad v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4 \wedge v_5 \wedge \dots \\
&5)\quad v_0 \wedge v_{-2} \wedge v_{-4} \wedge v_{-6} \wedge v_{-8} \wedge v_{-10} \wedge \dots \quad .
\end{aligned}$$

Определим на пространстве $\mathcal{F}$ операторы $\psi_k^{\pm}$, $k \in \mathbb{Z}+1/2$, действующие по правилу

$$\psi_k^+ : v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots = v_{-k+1/2} \wedge v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots,$$

$$\begin{aligned}
\psi_k^- : v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k} = {} & \delta_{-k+1/2, i_1}\, v_{i_2} \wedge v_{i_3} \wedge v_{i_4} \dots \\
& - \delta_{-k+1/2, i_2}\, v_{i_1} \wedge v_{i_3} \wedge v_{i_4} \dots \\
& + \delta_{-k+1/2, i_3}\, v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge v_{i_4} \dots - \ \dots
\end{aligned}$$

Иначе говоря, оператор ψ_k^+ приписывает вектор $v_{-k+1/2}$ к заданному полубесконечному моному, а оператор ψ_k^- ищет в мономе и стирает вектор $v_{-k+1/2}$. Заметим, что несмотря на присутствие бесконечной суммы в определении действия ψ_k^-, результат содержит не больше одного ненулевого члена.

Использованные нами обозначения предполагают, что таким образом мы ввели действие алгебры фермионов $\mathcal{C}l$ на *фермионном пространстве Фока* $\mathcal{F}$. Это действительно так:

Задача 14. Покажите, что определенные таким образом операторы $\psi_k^{\pm}$ удовлетворяют соотношениям фермионов (2.2.2), (2.2.3).

Действие фермионов на $\mathcal{F}$ обладает следующими свойствами:

- Операторы ψ_k^+ повышают, а операторы ψ_k^- понижают степень градуировки элементов пространства $\mathcal{F}$ на единицу:
$$\psi_k^{\pm} : \mathcal{F}^{(m)} \to \mathcal{F}^{(m\pm1)}.$$

- Для любого заданного монома $v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots$ при достаточно больших значениях $k >> 0$ операторы $\psi_k^{\pm}$ действуют тривиально:
$$\psi_k^{\pm}(v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots) = 0, \quad k >> 0.$$
Кроме того,
$$\psi_k^{\pm}|0\rangle = 0 \quad \text{при } k > 0.$$

Задача 15. Докажите эти свойства.

2.4 Действие фермионов на симметрических функциях

Вспомним, что умножение в алгебре называется *коммутативным*, если $ab = ba$, и *антикоммутативным*, если $ab = -ba$ для любых элементов a, b этой алгебры. Внешняя алгебра векторного пространства – это пример *антикоммутативной алгебры*, а классическим примером *коммутативной алгебры* может служить алгебра многочленов, например $\mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$.

Мы ввели в предыдущей главе действие фермионов на бесконечномерной внешней алгебре, т.е. на антикоммутативном объекте. Удивительным образом фермионы также действуют и на коммутативном объекте – на прямой сумме алгебр многочленов! Опишем подробно это действие.

Чтобы построить действие операторов $\psi_k^\pm$ на многочленах, удобно отождествить алгебру многочленов $\mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ с алгеброй симметрических функций Λ, используя Теорему 1.9.1. Однако одной копии пространства многочленов (симметрических функций) $\Lambda = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$ для построения действия фермионов недостаточно, необходимо *счетное число копий* пространства Λ. Чтобы различать копии между собой, введем вспомогательную переменную градуировки z, пронумеруем копии степенями z^m, $m \in \mathbb{Z}$. Введем обозначение

$$\mathcal{B}^{(m)} = z^m \Lambda.$$

Прямую сумму $\mathcal{B}$ всех копий $\mathcal{B}^{(m)}$ будем называть *бозонным пространством Фока*:

$$\mathcal{B} = \oplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}^{(m)}.$$

Действие фермионов $\psi_k^\pm$ на пространстве $\mathcal{B}$ будет удобно описать в терминах формальных распределений.

Пусть $f \in \Lambda$ и $m \in \mathbb{Z}$. Пусть, как и в (2.2.4), операторы $\psi_k^\pm$ определены как коэффициенты формальных распределений

$$\psi^\pm(u) = \sum_{i \in \mathbb{Z}+1/2} \psi_i^\pm u^{-i-1/2},$$

действие которых на $z^m f \in \mathcal{B}^{(m)}$ задается формулами

$$\psi^+(u)(z^m f) = z^{m+1} u^m H(u) E^\perp(-u)(f), \tag{2.4.1}$$

$$\psi^-(u)(z^m f) = z^{m-1} u^{-m} E(-u) H^\perp(u)(f). \tag{2.4.2}$$

Предложение 2.4.1. *a) Формулы (2.4.1), (2.4.2) задают корректно определенное действие операторов $\psi_k^\pm$ на градуированном пространстве $\mathcal{B}$.*

b) Для любого фиксированного элемента $f \in \Lambda$

$$\psi^\pm_{-k-1/2}(z^m f) = 0 \quad \text{для} \quad k << 0.$$

c) Производящие функции удовлетворяют соотношениям

$$\psi^\pm(u)\psi^\pm(v) + \psi^\pm(v)\psi^\pm(u) = 0, \tag{2.4.3}$$

$$\psi^+(u)\psi^-(v) + \psi^-(v)\psi^+(u) = \delta(u, v). \tag{2.4.4}$$

Следовательно, (2.4.1), (2.4.2) задают действие алгебры фермионов на пространстве $\mathcal{B}$.

Доказательство. Утверждение a) говорит о том, что произведения формальных распределений, составляющие определение действия $\psi^{\pm}(u)$, имеют смысл, несмотря на то, что, как было замечено в Главе 2.2, в общем случае умножение формальных распределений не определено. Действительно, формальный подсчет коэффициентов при степенях u в правых частях выражений (2.4.1), (2.4.2) показывает, что эти коэффициенты выражаются через бесконечные суммы:

$$H(u)E^{\perp}(-u)(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{l=-k}^{+\infty} (-1)^l h_{l+k} e_l^{\perp}(f) \right) u^k,$$

$$E(-u)H^{\perp}(u)(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{l=-k}^{+\infty} (-1)^{l+k} e_{l+k} h_l^{\perp}(f) \right) u^k.$$

Однако используя Лемму 2.1.1, вспомним, что для любого фиксированного $f \in \Lambda$ существует $N = N(f)$ такое, что $e_l^{\perp}(f) = 0$ и $h_l^{\perp}(f) = 0$ для всех $l > N$, поэтому для любого $f \in \Lambda$,

$$\psi^{+}_{-k-1/2}(z^m f) = z^{m+1} \sum_{l=-k+m}^{N} (-1)^l h_{l+k-m} e_l^{\perp}(f), \tag{2.4.5}$$

$$\psi^{-}_{-k-1/2}(z^m f) = z^{m-1} \sum_{l=-k-m}^{N} (-1)^{l+k+m} e_{l+k+m} h_l^{\perp}(f) \tag{2.4.6}$$

являются корректно определенными элементами пространства $\mathcal{B}$.

b) Более того, если $-k \pm m > N$, то суммы (2.4.5), (2.4.6) не содержат ненулевых элементов, откуда для любого фиксированного $f \in \Lambda$ и $m \in \mathbb{Z}$

$$\psi^{\pm}_{-k-1/2}(z^m f) = 0 \quad \text{для целого} \quad k << 0.$$

c) Фиксируем $f \in \Lambda$. Тогда из соотношений Предложения 2.1.2,

$$\begin{aligned}
\psi^{+}(u)\psi^{+}(v)(z^m f) &= z^{m+2} u^{m+1} v^m H(u)E^{\perp}(-u)H(v)E^{\perp}(-v)(f) \\
&= z^{m+2} u^{m+1} v^m \left(1 - \frac{v}{u}\right) H(u)H(v)E^{\perp}(-u)E^{\perp}(-v)(f) \\
&= z^{m+2} u^m v^m \left(u - v\right) H(u)H(v)E^{\perp}(-u)E^{\perp}(-v)(f).
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
\psi^{-}(u)\psi^{-}(v)(z^m f) &= z^{m-2} u^{-m+1} v^{-m} E(-u)H^{\perp}(u)E(-v)H^{\perp}(v)(f) \\
&= z^{m-2} u^{-m+1} v^{-m} \left(1 - \frac{v}{u}\right) E(-u)E(-v)H^{\perp}(u)H^{\perp}(v)(f) \\
&= z^{m-2} u^{-m} v^{-m} \left(u - v\right) E(-u)E(-v)H^{\perp}(u)H^{\perp}(v)(f).
\end{aligned}$$

Поменяв ролями переменные u и v, получим (2.4.3). Строго говоря, для завершения доказательства этих двух соотношений необходимо проверить, что на каждом шагу наших вычислений мы пользовались корректно определенными произведениями формальных распределений. Эту проверку несложно провести, опираясь на рассуждения подобные доказательству части a).

Для доказательства (2.4.4) вспомним, что первое равенство Предложения 2.1.2

$$\left(1-\frac{v}{u}\right) E^{\perp}(u)E(v) = E(v)E^{\perp}(u) \tag{2.4.7}$$

является равенством рядов от $u^{-k}v^{l}$, где целые $k, l \geq 0$. В пространстве этих рядов имеем:

$$\left(1-\frac{v}{u}\right)\left(1+\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}+\frac{v^3}{u^3}+\ldots\quad\right)=1.$$

Умножим обе части (2.4.7) на $\sum_{k\geq 0} v^k/u^k$, получим:

$$E^{\perp}(u)E(v) = \left(1+\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}+\frac{v^3}{u^3}+\ldots\quad\right)E(v)E^{\perp}(u),$$

и используем это равенство в следующем рассуждении:

$$\psi^+(u)\psi^-(v)(z^m f) = z^m u^{m-1} v^{-m} H(u)E^{\perp}(-u)E(-v)H^{\perp}(v)(f)$$
$$= \left(1+\frac{v}{u}+\frac{v^2}{u^2}+\frac{v^3}{u^3}+\ldots\quad\right) z^m u^{m-1} v^{-m} H(u)E(-v)E^{\perp}(-u)H^{\perp}(v)(f).$$

Аналогично,

$$\psi^-(v)\psi^+(u)(z^m f) = \left(1+\frac{u}{v}+\frac{u^2}{v^2}+\frac{u^3}{v^3}+\ldots\quad\right) z^m u^m v^{-m-1} H(u)E(-v)E^{\perp}(-u)H^{\perp}(v)(f).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&(\psi^+(u)\psi^-(v)+\psi^-(v)\psi^+(u))(z^m f)\\
&= z^m \frac{u^m}{v^m}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{v^k}{u^{k+1}}+\sum_{k\geq 0}\frac{u^k}{v^{k+1}}\right) H(u)E(-v)E^{\perp}(-u)H^{\perp}(v)(f)\\
&= z^m \frac{u^m}{v^m}\,\delta(u,v)H(u)E(-v)E^{\perp}(-u)H^{\perp}(v)(f).
\end{aligned}$$

Из Предложения 2.2.1 b) и свойства (1.9.11),

$$\delta(u,v)H(u)E(-v)E^{\perp}(-u)H^{\perp}(v) = \delta(u,v)H(u)E(-u)E^{\perp}(-u)H^{\perp}(u) = \delta(u,v),$$

откуда

$$(\psi^+(u)\psi^-(v)+\psi^-(v)\psi^+(u))(z^m f) = \delta(u,v)\cdot z^m f.$$

Корректность произведений формальных распределений в этих вычислениях можно проследить прямой проверкой. □

Замечание 2.4.1. Из (2.4.1), (2.4.2) следует, что операторы ψ_k^+ повышают степень градуировки на 1, а операторы ψ_k^- – понижают ее:

$$\psi_k^+|_{\mathcal{B}^{(m)}} : \mathcal{B}^{(m)} \to \mathcal{B}^{(m+1)}, \quad \psi_k^-|_{\mathcal{B}^{(m)}} : \mathcal{B}^{(m)} \to \mathcal{B}^{(m-1)}.$$

Замечание 2.4.2. В Главе 2.3 мы определили действие фермионов $\psi_k^{\pm}$ на бесконечной внешней степени $\mathcal{F}$, а в этой главе – на симметрическом пространстве $\mathcal{B}$. Оказывается, эти действия эквивалентны: $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны как модули алгебры $\mathcal{C}l$. Этот факт является одним из утверждений знаменитого *бозон-фермионного соответствия*, и позволяет применять в приложениях естественные свойства обоих пространств.

2.5 Билинейное тождество в терминах фермионов

Ранее мы рассмотрели билинейное тождество $P_Y\tau\cdot\tau=0$, задающее систему дифференциальных уравнений на функцию $\tau=\tau(p_1,p_2,\dots)$, включающую в себя КП уравнение. Мы также интерпретировали τ как симметрическую функцию, считая переменные $p_1,p_2,\dots$ степенными суммами. Однако само выражение $P_Y(p_1,p_2,\dots)$ мы ввели не объясняя его происхождения. Цель настоящей главы – в некоторой степени восполнить этот пробел. Мы покажем, что билинейное тождество КП иерархии происходит из тождества, задаваемого действием фермионов на пространстве $\mathcal{B}$.

Рассмотрим тензорное произведение $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$ двух копий бозонного пространства Фока $\mathcal{B}$. Вспомнив, что $\mathcal{B}^{(0)}=\mathbb{C}[p_1,p_2,\dots]$, мы будем интерпретировать элементы $\mathcal{B}^{(0)}\otimes\mathcal{B}^{(0)}$ как линейные комбинации произведений многочленов от двух наборов переменных $p_1,p_2,\dots$ и $q_1,q_2,\dots$. В частности для $\tau_1\otimes\tau_2\in\mathcal{B}^{(0)}\otimes\mathcal{B}^{(0)}$ имеем

$$\tau_1\otimes\tau_2=\tau_1(p_1,p_2,\dots)\tau_2(q_1,q_2,\dots).$$

Зададим также действие $\mathcal{C}l\otimes\mathcal{C}l$ в пространстве $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$ по правилу

$$\psi_k^\pm\otimes\psi_l^\pm(\tau_1\otimes\tau_2)=\psi_k^\pm(\tau_1)\otimes\psi_l^\pm(\tau_2),$$

где $\psi_k^\pm,\psi_l^\pm\in\mathcal{C}l$ и $\tau_1,\tau_2\in\mathcal{B}$.

Определим элемент

$$\Omega=\sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2}\psi_i^+\otimes\psi_{-i}^-\quad\in\quad\mathcal{C}l\otimes\mathcal{C}l.$$

Пусть $\tau\in\mathcal{B}^{(0)}$. Рассмотрим выражение

$$\Omega\,(\tau\otimes\tau)=\sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2}\psi_i^+(\tau)\otimes\psi_{-i}^-(\tau)=\sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2}\psi_i^+(\,\tau(p_1,p_2,\dots)\,)\psi_{-i}^-(\,\tau(q_1,q_2,\dots)\,).$$

Предложение 2.5.1. *Билинейное КП тождество (1.4.2) на функцию $\tau\in\mathcal{B}^{(0)}$ эквивалентно тождеству*

$$\Omega\,(\tau\otimes\tau)=0. \tag{2.5.1}$$

Доказательство. Пусть $\tau\in\mathcal{B}^{(0)}$. Рассмотрим формальное распределение с коэффициентами в $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$:

$$\psi^+(u)\tau\otimes\psi^-(u)\tau.$$

Нас интересует коэффициент этого распределения при u^{-1}. С одной стороны, заметим, что

$$\psi^+(u)(\tau)\otimes\psi^-(u)(\tau)=\sum_{i,j\in\mathbb{Z}+1/2}\psi_i^+(\,\tau\,)\,\otimes\psi_j^-(\,\tau\,)u^{-i-j-1},$$

откуда коэффициент при u^{-1} равен $\sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2}\psi_i^+(\,\tau\,)\,\otimes\,\psi_{-i}^-(\,\tau\,)$, что в точности совпадает $\Omega\,(\tau\otimes\tau)$. С другой стороны, вспомним определение (2.4.1), (2.4.2) действия $\psi^\pm(u)$ на бозонном пространстве Фока и, используя (1.9.14), (1.9.15), (2.1.4), (2.1.5), выразим его через переменные $p_1, p_2, \ldots$ и $q_1, q_2, \ldots$:

$$\psi^+(u)(\tau(p)) = zH(u)E^\perp(-u)(\tau(p)) = z\,exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{p_n}{n}u^n\right) exp\left(-\sum_{k\geq 1}\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{1}{u^k}\right)(\tau(p)),$$

$$\psi^-(u)(\tau(q)) = z^{-1}E(-u)H^\perp(u)(\tau(q)) = z^{-1}exp\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{q_n}{n}u^n\right) exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{1}{u^k}\right)(\tau(q)).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\psi^+(u)(\tau)\otimes\psi^-(u)(\tau) = \psi^+(u)(\tau(p))\,\psi^-(u)(\tau(q))\\
&= exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{p_n}{n}u^n\right) exp\left(-\sum_{k\geq 1}\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{1}{u^k}\right) exp\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{q_n}{n}u^n\right) exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{1}{u^k}\right)(\tau(p)\tau(q))\\
&= exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{p_n}{n}u^n\right) exp\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{q_n}{n}u^n\right) exp\left(-\sum_{k\geq 1}\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{1}{u^k}\right) exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{1}{u^k}\right)(\tau(p)\tau(q))\\
&= exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{p_n - q_n}{n}u^n\right) exp\left(\sum_{k\geq 1}\left(\frac{\partial}{\partial q_k}-\frac{\partial}{\partial p_k}\right)\frac{1}{u^k}\right)(\tau(p)\tau(q)).
\end{aligned}$$

Произведем замену переменных по правилу

$$p_n = x_n - y_n, \quad q_n = x_n + y_n.$$

Получим

$$\psi^+(u)(\tau(p))\,\psi^-(u)(\tau(q)) = \; = exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{-2y_n}{n}u^n\right) exp\left(\sum_{k\geq 1}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\frac{1}{u^k}\right)(\tau(x-y)\tau(x+y)),$$

где $(x\pm y) = (x_1\pm y_1, x_2\pm y_2, x_3\pm y_3, \ldots)$. Далее мы покажем, что это выражение можно записать через производные Хироты, что приведет нас к билинейному КП тождеству.

Используя (1.9.12) определим

$$e^{a\partial/\partial t}\, f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\partial_t^n}{n!}\, f(t).$$

Лемма 2.5.1.

$$e^{a\partial/\partial t}\, f(t) = f(t+a).$$

Доказательство. Действительно, утверждение следует из формулы разложения в ряд Тейлора функции f в точке t:

$$e^{a\partial/\partial t}\, f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a\partial_t)^n}{n!}\, f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\, f^{(n)}(t) = f(t+a).$$

□

Введем обозначения $\bar{u} = (u^{-1}, u^{-2}, u^{-3}, \dots)$,$t = (t_1, t_2, t_3, \dots)$,$y = (y_1, y_2, \dots)$ Используя Лемму 2.5.1 дважды, получим:

$$exp\left(\sum_{k\geq 1}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\frac{1}{u^k}\right)\tau(x-y)\tau(x+y) = \tau(x-y-\bar{u})\tau(x+y+\bar{u})$$
$$= \tau(x-y-\bar{u}-t)\tau(x+y+\bar{u}+t)|_{t=0} = exp\left(\sum_{k\geq 1}\left((y_k+u^{-k})\frac{\partial}{\partial t_k}\right)\right)\tau(x+t)\tau(x-t)|_{t=0}$$

Сравнив с Определением 1.5.1 производной Хироты мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.5.2.

$$exp\left(\sum_{k\geq 1}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\frac{1}{u^k}\right)\tau(x-y)\tau(x+y) = exp\left(\sum_{k\geq 1}x_k u^{-k}\right)exp\left(\sum_{k\geq 1}x_k y_k\right)\tau\cdot\tau,$$

где $\tau = \tau(x_1, x_2, \dots)$.

Вспомним обозначения (1.9.16) и запишем

$$exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{-2y_n}{n}u^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty}S_k(-2y_1, -2y_2/2, -2y_3/3, \dots)u^k,$$
$$exp\left(\sum_{k\geq 1}x_k u^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}S_k(x_1, x_2, x_3, \dots)\frac{1}{u^k}.$$

Тогда

$$\psi^+(u)(\tau(p))\,\psi^-(u)(\tau(q)) =$$
$$= exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{-2y_n}{n}u^n\right)exp\left(\sum_{k\geq 1}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\frac{1}{u^k}\right)(\tau(x-y)\tau(x+y))$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}S_l(-2y_1, -2y_2/2, -2y_3/3, \dots)u^l\sum_{m=0}^{\infty}\frac{S_m(x_1, x_2, x_3, \dots)}{u^m}exp\left(\sum_{k\geq 1}x_k y_k\right)\tau\cdot\tau.$$

Коэффициент при u^{-1} в этом выражении равен

$$= \sum_{l=0}^{\infty}S_l(-2y_1, -2y_2/2, -2y_3/3, \dots)S_{l+1}(x_1, x_2, x_3, \dots)exp\left(\sum_{k\geq 1}x_k y_k\right)\tau\cdot\tau = P_Y\tau\cdot\tau,$$

где P_Y в точности совпадает с (1.10.1) при замене

$$x_k \to p_k/k, \quad y_k \to kY_k. \tag{2.5.2}$$

Таким образом, мы показали, что $P_Y\tau\cdot\tau = \Omega\,(\tau\otimes\tau)$, что завершает доказательство предложения.

$\square$

2.6 Решения билинейного КП тождества

Итак, система уравнений КП иерархии оказалась эквивалентной тождеству (2.5.1), определенному через действие фермионов на пространстве $\mathcal{B}$. Этот замечательный факт позволяет использовать свойства фермионов чтобы построить целое семейство решений КП иерархии.

Докажем следующее свойство фермионов, позволяющее переставлять их действие с действием оператора Ω.

Лемма 2.6.1. *Действие оператора $\psi_k^+ \otimes \psi_k^+$ на $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ коммутирует с действием оператора Ω на этом пространстве:*

$$\Omega(\psi_k^+ \otimes \psi_k^+) = (\psi_k^+ \otimes \psi_k^+)\Omega.$$

Доказательство. Это следует из прямого вычисления

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2} (\psi_i^+ \otimes \psi_i^-)(\psi_k^+ \otimes \psi_k^+) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}+1/2} -\psi_k^+\psi_i^+ \otimes (-\psi_k^+\psi_i^- + \delta_{k,i}) \\ &= (\psi_k^+ \otimes \psi_k^+)\Omega + \sum_i (-\psi_k^+\psi_i^+) \otimes \delta_{k,i} \\ &= (\psi_k^+ \otimes \psi_k^+)\Omega - (\psi_k^+)^2 \otimes 1 = (\psi_k^+ \otimes \psi_k^+)\Omega,\end{aligned}$$

поскольку $(\psi_k^+)^2 = 0$. □

Теперь, зная некоторые решения тождества (2.5.1), мы можем с помощью Леммы 2.6.1 построить новые решения:

Следствие 2.6.1. *Пусть $\tau \in \mathcal{B}^{(0)}$ – решение билинейного тождества (2.5.1). Тогда для любого $k \in \mathbb{Z} + 1/2$ элемент $z^{-1}\psi_k^+(\tau) \in \mathcal{B}^{(0)}$ тоже является решением этого тождества.*

Доказательство. Действительно, если $\Omega(\tau \otimes \tau) = 0$, то

$$\Omega\left(z^{-1}\psi_k^+(\tau) \otimes z^{-1}\psi_k^+(\tau)\right) = z^{-2}(\psi_k^+ \otimes \psi_k^+)\Omega(\tau \otimes \tau) = 0.$$

□

Задача 16. Докажите, что $\tau = 1 \in \mathcal{B}^{(0)}$ является решением (2.5.1).

Применим к $\tau = 1$ последовательно несколько операторов ψ_k^+, и получим новое решение (2.5.1):

Следствие 2.6.2. *Для любого набора различных целых чисел $(\alpha_1, \dots \alpha_l)$, элемент*

$$\tau = z^{-l}\psi^+_{-\alpha_1-1/2} \dots \psi^+_{-\alpha_l-1/2}(1) \quad \in B^{(0)} \tag{2.6.1}$$

является решением билинейного тождества (2.5.1).

2.7 Функции Шура как решения билинейного КП тождества

Оказывается, что построенные нами решения (2.6.1) – это ничто иное, как выраженные через степенные суммы симметрические функции Шура s_λ ! Докажем это с помощью производящих функций.

Рассмотрим степенной ряд от переменных $(u_1, \ldots, u_l)$ с коэффициентами в кольце симметрических функций Λ, определенный формулой

$$Q(u_1, \ldots, u_l) = \prod_{1\le i<j\le l} (u_j - u_i) \prod_{i=1}^{l} H(u_i). \tag{2.7.1}$$

Для любого вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \mathbb{Z}^l_{\ge 0}$, пусть Q_α – коэффициент соответствующего монома $u_1^{\alpha_1} \ldots u_l^{\alpha_l}$ в разложении $Q(u_1, \ldots, u_l)$:

$$Q(u_1, \ldots, u_l) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)\in\mathbb{Z}^l_{\ge 0}} Q_\alpha u_1^{\alpha_1} \ldots u_l^{\alpha_l}.$$

Теорема 2.7.1. *a)*

$$\psi^+(u_l) \ldots \psi^+(u_1)\,(1) = z^l Q(u_1, .., u_l), \tag{2.7.2}$$

где $1 \in \mathcal{B}^{(0)} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \ldots]$ *Соответственно, коэффициенты степенного ряда* $Q(u_1, \ldots, u_l)$ *можно представить в виде*

$$Q_\alpha = z^{-l} \psi^+_{-\alpha_l - 1/2} \ldots \psi^+_{-\alpha_1 - 1/2}(1) \quad \in \mathcal{B}^{(0)} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \ldots]. \tag{2.7.3}$$

b) Производящую функцию $Q(u_1, \ldots, u_l)$ *и ее коэффициенты можно выразить как определители:*

$$Q(u_1, \ldots, u_l) = \det[u_i^{j-1} H_i(u_i)] \quad \text{и} \quad Q_\alpha = \det[h_{\alpha_i + 1 - j}]. \tag{2.7.4}$$

c) Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ *– разбиение длины* l*. Положим* $\alpha_i = \lambda_i + l - i$*. Тогда* $Q_\alpha = \det[h_{\lambda_i - i + (l-j+1)}] = \pm s_\lambda$*, где* s_λ *– симметрическая функция Шура.*

Доказательство. a) Применим коммутационные соотношения из Предложения 2.1.2:

$$\begin{aligned}\psi^+(u_l) \ldots \psi^+(u_1)\,(1) &= z^l u_l^{l-1} \ldots u_1^0 H(u_l) E^\perp(-u_l) \ldots H(u_1) E^\perp(-u_1)(1)\\ &= z^l u_l^{l-1} \ldots u_1^0 \prod_{1\le i<j\le l} \left(1 - \frac{u_i}{u_j}\right) H(u_l) \ldots H(u_1) E^\perp(-u_l) \ldots E^\perp(-u_1)(1).\end{aligned}$$

Поскольку $E^\perp(-u)(1) = 1$, получим

$$\psi^+(u_l) \ldots \psi^+(u_1)\,(1) = z^l u_l^{l-1} \ldots u_1^0 \prod_{1\le i<j\le l} \left(1 - \frac{u_i}{u_j}\right) H(u_l) \ldots H(u_1) = z^l Q(u_1, .., u_l),$$

b) Вспомним формулу определителя Вандермонда

$$\det(u_j^{j-1})_{i,j=1,\ldots,l} = \prod_{1\le i<j\le l} (u_j - u_i).$$

Заметим, что

$$
\begin{aligned}
Q(u_1,\dots,u_l) &= \prod_{i<j}(u_j-u_i)\prod_{i=1}^{l} H(u_i) = \det[u_i^{j-1}]\prod_{i=1}^{l} H(u_i) = \det[u_i^{j-1}H(u_i)] \\
&= \sum_{\sigma\in S_l} sgn(\sigma)\sum_{a_1\dots a_l} h_{a_1}u_1^{a_1+\sigma(1)-1}\cdots h_{a_l}u_l^{a_l+\sigma(l)-1} \\
&= \sum_{\alpha_1\dots\alpha_l}\sum_{\sigma\in S_l} sgn(\sigma)h_{\alpha_1+1-\sigma(1)}\cdots h_{\alpha_l+1-\sigma(l)}u_1^{\alpha_1}\cdots u_l^{\alpha_l} \\
&= \sum_{\alpha_1\dots\alpha_l}\det[h_{\alpha_i+1-j}]u_1^{\alpha_1}\cdots u_l^{\alpha_l}.
\end{aligned}
$$

Это вычисление доказывает пункт b).

c) Пусть $\alpha=(\lambda_1+l-1,\dots\lambda_l)$, где $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_l)$ – разбиение. Тогда по формуле (2.7.4) получим

$$Q_\alpha = \det[h_{\lambda_i-i+(l-j+1)}]_{i,j=1\dots l} = \det[h_{\lambda_i-i+j'}]_{i,j'=1\dots l}.$$

Но это в точности утверждение тождества Якоби - Труди (1.9.7), и поэтому $Q_\alpha = s_\lambda$. □

Итак, сравнив формулу (2.7.3) и Следствие 2.6.2, мы получили целое семейство решений билинейного КП тождества:

Следствие 2.7.1. *Коэффициенты Q_α образующей функции $Q(u_1,\dots,u_l)$ являются решениями (2.5.1).*

В частности, мы показали, что функци Шура s_λ совпадают с коэффициентами Q_α для подходящих α, откуда заключаем, что s_λ (выраженные как полиномы от степенных функций) являются решениями (2.5.1), как мы и утверждали ранее.

Замечание 2.7.1. Можно показать, что для любого $\alpha\in\mathbb{Z}^l_{\geq 0}$ либо $Q_\alpha=0$, либо $Q_\alpha=\pm s_\lambda$ для некоторого разбиения λ. Таким образом, все ненулевые решения τ вида (2.6.1) с точностью до знака являются функциями Шура.

2.8 Обратно к решениям уравнения КП

Теперь мы можем вернуться к исходной форме КП уравнения и проследить на несложных примерах, как функции Шура дают решения КП уравнения. Полные симметрические функции h_k и элементарные симметрические функции e_k являются решениями (2.5.1), так как они являются частными случаем функций Шура. В частности, рассмотрим несколько простейших случаев, которые предлагается проверить прямым вычислением.

Пример 2.8.1. Пусть $\tau=h_1(=e_1=p_1)$. Вспомнив переход между двумя наборами переменных (1.10.3), (2.5.2), получим в обозначениях (1.4.1) $\tau(x,y,t)=x$, откуда $u(x,y,t)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln(x)=-2/x^2$. Для этой функции КП уравнение вырождается в

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3}{2}uu_x-\frac{1}{4}u_{xxx}\right)$$

Подставив

$$u = -2x^{-2}, \quad u' = 4x^{-3}, \quad u'' = 12x^{-4}, \quad u''' = -24x^{-5},$$

убедимся, что действительно, тождество выполняется.

Пример 2.8.2. $\tau(x,y,t) = h_2$ соответствует $\tau(x,y,t) = 1/2x^2 + y$ и решению $u(x,y,t) = \frac{-4(x^2-2y)}{(x^2+2y)^2}$ КП уравнения. Для удобства читателя приводим здесь значения соответствующих производных этой функции, однако в примерах ниже предлагаем провести проверку, например, с помощью компьютера. В данном примере

$$\frac{3}{4}u_{yy} = \frac{-24(5x^2-2y)}{x^2+2y)^4}, \quad -\frac{3}{4}\left(u^2\right)_x = \frac{48(x^2-2y)(x^3-6xy)}{(x^2+2y)^5},$$
$$-\frac{1}{4}u_{xxx} = \frac{-24(x^5-20x^3y+20xy^2)}{(x^2+2y)^5},$$

и так как u не зависит от t, следует проверить, что $3u_{yy} = \left(-3\left(u^2\right)_x - u_{xxx}\right)_x$

Пример 2.8.3. Аналогично, τ функции
$e_2 = 1/2x^2 - y$ соответствует решению $u(x,y,t) = \frac{-4(x^2+2y)}{(x^2-2y)^2}$,
$h_3 = 1/6x^3 + xy + t$ соответствует решению $u(x,y,t) = \frac{-6(-12tx+x^4+12y^2)}{(6t+x^3+6xy)^2}$,
$e_3 = 1/6x^3 - xy + t$ соответствует решению $u(x,y,t) = \frac{-6(-12tx+x^4+12y^2)}{(6t+x^3-6xy)^2}$,
$s_{2,2} = 1/12x^4 + y^2 - tx$ соответствует $u(x,y,t) = \frac{-8(36t^2+12tx^3+x^6-36x^2y^2)}{(-12tx+x^4+12y^2)^2}$, и т.д.

2.9 Дополнительная литература

В заключение приведем список литературы и источников, которые использовались при подготовке этих лекций, и могут пригодится читателю заинтересованному продолжить изучение этой области науки. Историю изучения солитонов в XX веке можно прочитать в [10], а также в многочисленных англоязычных источниках, таких, как например [13]. Книга (на английском языке) [11] рассчитана на студентов младших курсов и затрагивает связь КдФ и КП уравнений с грассманнианами, эллептическими кривыми, уравнениями Лакса. Подробное изложение теории и полезных фактов о симметрических функциях содержится в двух замечательных книгах [7], [9]. Производящим функциям и их применению посвящены лекции [5] и (на английском языке) [12]. Идеи знаменитой Киотской школы, положившей основы изучения симметрий солитонных иерархий с помощью теории представлений, изложены в [8]. Алгебра фермионов, введенная нами во второй части лекций, является примером бесконечномерной супералгебры Ли. Бесконечномерные алгебры и супералгебры Ли играют ключевую роль в описании симметрий солитонных иерархий. Структуре этих объектов посвящены монографии [1], [2], [4], [6] В этих книгах, а также в лекциях [3], содержится информация о формальных распределениях и их свойствах.

Литература

[1] В. Г. Кац, *Вертексные алгебры для начинающих*, Москва: Издательство МЦНМО,(2005).

[2] В. Г. Кац, *Бесконечномерные алгербры Ли*, Москва: Издательство Мир, (1985).

[3] В. Г. Кац, *Vertex Algebras by V. Kac. Lecture 3: Fundamentals of formal distributions notes by Darij Grinberg* https://www.cip.ifi.lmu.de/∼ grinberg/algebra/va3.pdf

[4] В. Г. Кац, А. Райна, Н. А. Рожковская, *Бомбейские лекции о представлениях со старшим весом бесконечномерных алгебр Ли,* Москва: Издательство МЦНМО, (2017).

[5] С. К. Ландо, *Лекции о производящих функциях*, 3-е издание, исправленное, Москва: Издательство МЦНМО, (2007).

[6] Д. Леповски, Х. Ли, *Введение в вершинные операторные алгебры и их представления*, Москва: Издательство РХД, (2008).

[7] И. Макдональд. *Симметрические функции и многочлены Холла*, Москва: Издательство Мир, (1985).

[8] Т. Мива, М. Джимбо, Е. Дейт, *Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии, и бесконечномерные алгебры*, Москва: Издательство МЦНМО, (2005).

[9] Р. Стенли, *Перечислительная Комбинаторика*, Москва: Издательство Мир. Редакция литературы по математическим наукам, (1990).

[10] А. Т. Филиппов, *Многоликий солитон.* Москва: Издательство Наука, Глав. ред. физико-математической лит-ры, Выпуск 48 серии "Библиотечка Квант", Издание второе, переработанное и дополненное, (1990).

[11] A Kasman, *Glimpses of Soliton Theory: The Algebra and Geometry of Nonlinear PDEs.* Student Mathematical Library (Book 54), American Mathematical Society, (2010).

[12] H. Wilf, *generatingfunctionology*, Academic Press, (1990).

[13] F. Marin, *Solitons: Historical and Physical Introduction.* In: Meyers R. (eds) Encyclopedia of Complexity and Systems Science. Springer, New York, NY(2009).