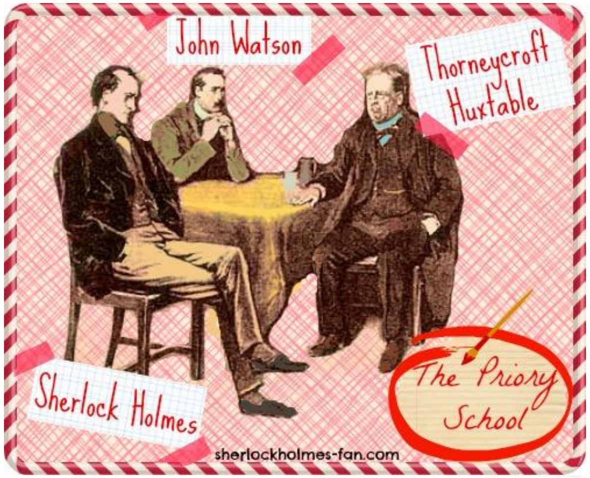
NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

Велосипедная математика: от гиперболической геометрии до сверхпроводимости

Владлен Тиморин
Факультет математики НИУ ВШЭ
http://math.hse.ru

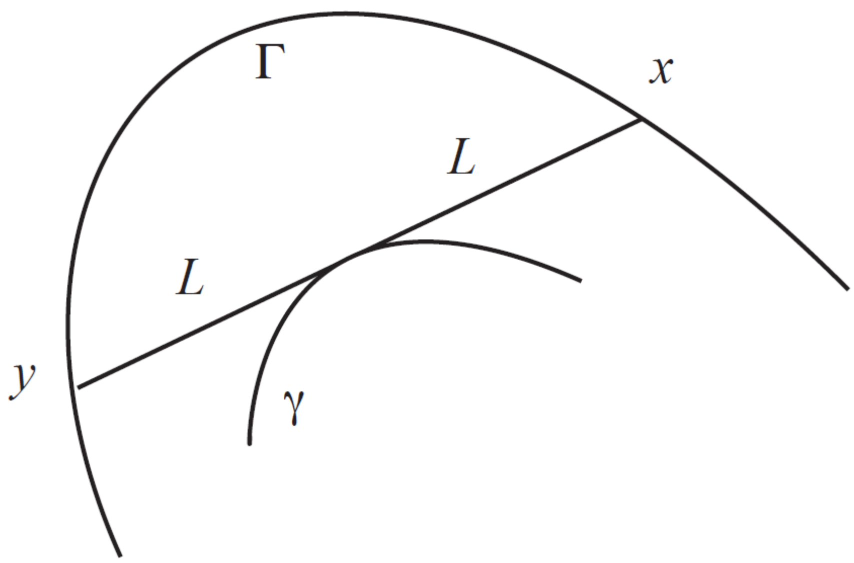
В рассказе А.Конан-Дойля «Случай в интернате» Холмс определяет направление движения велосипеда по следам шин, но его объяснение ошибочно.



Эти следы, как вы сами можете убедиться, ведут от школы.
– Или по направлению к школе.
– Нет, мой дорогой Уотсон. Отпечаток заднего колеса всегда глубже, потому что на него приходится большая тяжесть. Вот видите? В нескольких местах он совпал с менее ясным отпечатком переднего и уничтожил его. Нет, велосипедист несомненно ехал от школы.

Формализация задачи: в какую сторону ехал велосипед?

Даны две кривые на плоскости (отпечаток заднего колеса γ и отпечаток переднего колеса Γ). При каких условиях на γ и Γ можно однозначно определить направление движения велосипеда?



Велосипед – отрезок заданной длины L, касательный к γ в начальной точке отрезка.

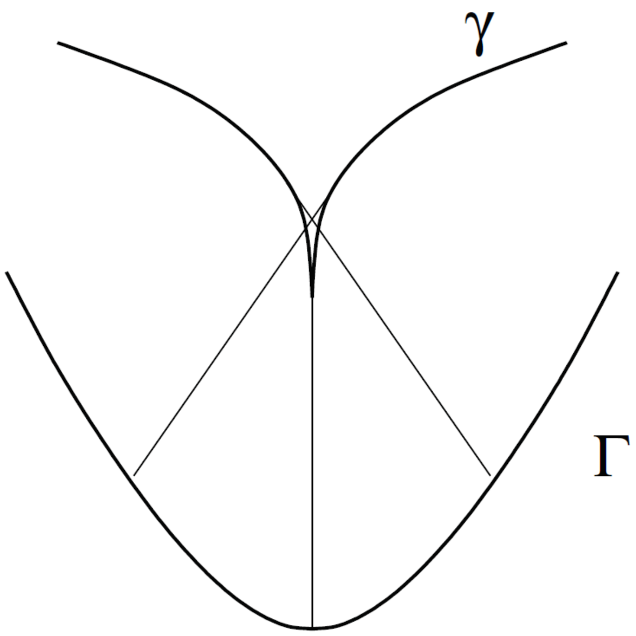
Чтобы определить, в какую сторону двигался велосипед, достаточно промоделировать его движение, т.е. посмотреть совпадет ли $\Gamma(t)$ с

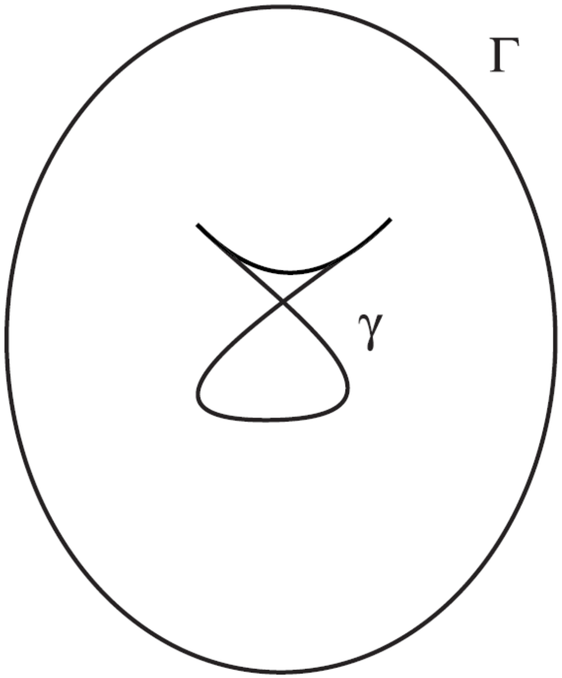
$$\gamma(t) + L\dot{\gamma}(t),$$

где t – натуральный параметр на γ (тогда $\dot{\gamma}(t)$ – единичный касательный вектор к γ в точке $\gamma(t)$).

Как может выглядеть траектория заднего колеса?

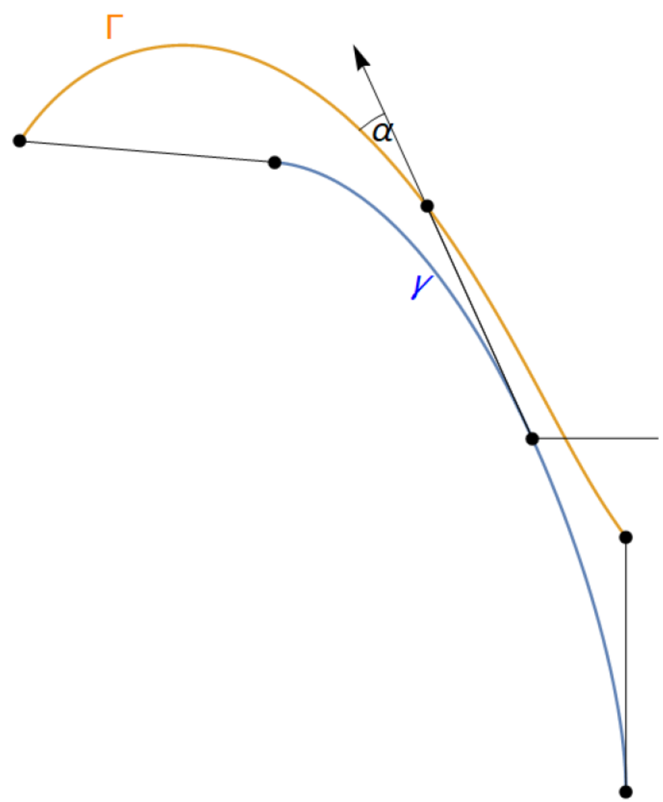
Траектория заднего колеса может иметь каспы





Кривизна траектории переднего колеса?

Обозначим через x *натуральный* параметр на Γ, т.е. такой параметр, для которого $|\Gamma'(x)| = 1$ (другими словами, отрезок кривой Γ от $\Gamma(x_0)$ до $\Gamma(x_1)$ имеет длину $|x_0 - x_1|$).

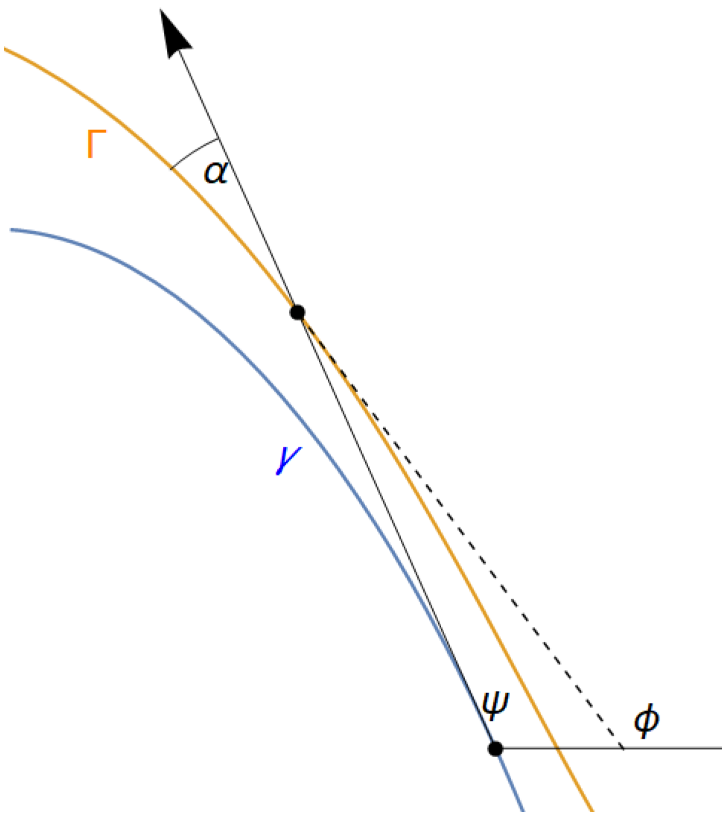


Пусть $\kappa(x)$ – *кривизна* кривой Γ в точке $\Gamma(x)$, т.е. скорость относительно x, с которой поворачивается касательный вектор. Пусть $\alpha(x)$ – угол между линией велосипеда и вектором $\Gamma'(x)$. Тогда

$$\kappa(x) = \frac{\sin\alpha(x)}{L} + \frac{d\alpha}{dx}(x).$$

Если кривая Γ задана, то это уравнение – дифференциальное уравнение на α, позволяющее восстановить динамику велосипеда по начальному условию.

Доказательство формулы $\kappa = \frac{\sin\alpha}{L} + \frac{d\alpha}{dx}$.



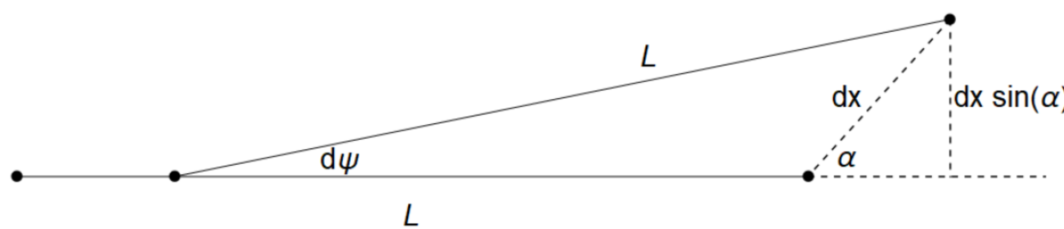
Пусть
ϕ – угол наклона касательной к Γ в точке $\Gamma(x)$,
ψ – угол наклона велосипеда.
Тогда $\alpha = \phi - \psi$.

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\phi}{dx} - \frac{d\psi}{dx}.$$

По определению кривизны, $\frac{d\phi}{dx} = \kappa(x)$.

Осталось найти $\frac{d\psi}{dx}$.

$$L\, d\psi = \sin\alpha\, dx.$$



Планиметр из топора

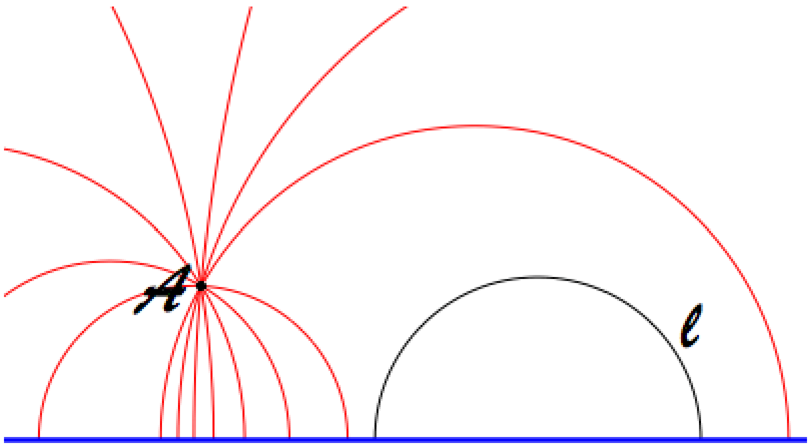
На основе принципа движения велосипеда можно самостоятельно довольно просто сделать прибор для измерения площади, так называемый *планиметр*.

Этот планиметр был изобретен в 1875 датским офицером Хольгером Прицем как бюджетный аналог дорогостоящих «профессиональных» планиметров.

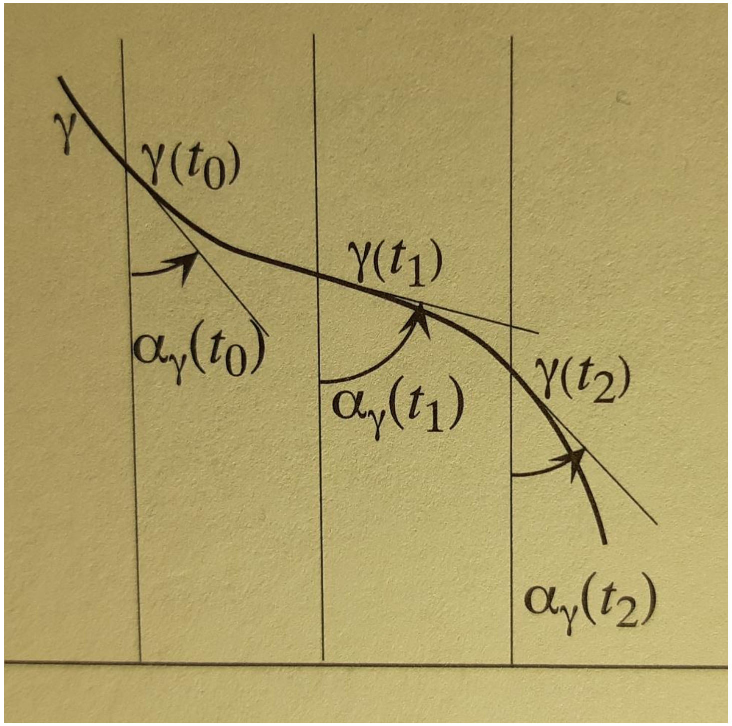
Площадь фигуры вычисляется по формуле

$$A = \sigma L.$$

Верхняя полуплоскость $\mathbb{H}$ ограничена прямой, т.н. *абсолютом*. *Геодезические* в $\mathbb{H}$ – дуги окружностей, перпендикулярных к абсолюту.



$\mathbb{H}$ – модель *гиперболической геометрии* (*геометрии Лобачевского*). Прямые – это геодезические. Углы вычисляются так же, как в евклидовой плоскости. Расстояния вычисляются по-другому (например, расстояние до абсолюта бесконечно). Длина вектора dz, отложенного от точки z, равна $|dz|/\mathrm{Im}(z)$.



Теорема. *Рассмотрим кривую γ на гиперболической плоскости и обозначим через $\alpha_\gamma(t)$ угол между направлением вниз и направлением касательного вектора $\dot{\gamma}(t)$. Если t – натуральный (геодезический) параметр на γ, а $k_\gamma(t)$ – геодезическая кривизна кривой γ в точке $\gamma(t)$, то*

$$k_\gamma(t) = \sin \alpha_\gamma(t) + \alpha'_\gamma(t).$$

Теорема. *Предположим, что средняя геодезическая кривизна каждой дуги кривой γ длины A не превышает*

$$\frac{\pi}{2} \frac{1 - e^{-2A/\pi}}{2 - e^{-2A/\pi}}.$$

Тогда γ находится на ограниченном расстоянии от некоторой геодезической.