Бесконечная транзитивность

курс И.В.Аржанцева

летняя школа "Современная математика", Дубна, 24-28 июля 2021 года

Задачи к занятию 1

Задача 1. Найдите центр группы S_n и центр группы A_n.

Задача 2. Верно ли, что центр факторгруппы $G/Z(G)$ всегда тривиален?

Задача 3. Найдите нормализаторы подгруппы диагональных матриц T_n и подгруппы верхнетреугольных матриц B_n в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Задача 4. Найдите на множестве $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ все орбиты и все стабилизаторы для действия циклической подгруппы $\langle\sigma\rangle \subset S_{10}$, где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Для действия группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ на себе сопряжениями найдите стабилизатор матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Пусть коммутативная группа G действует на множестве X. Докажите, что стабилизаторы любых двух точек из одной орбиты совпадают.

Задача 7. Классифицируйте с точностью до изоморфизма все действия группы порядка 5 на множестве из 9 элементов.

Задача 8. Приведите пример нетождественного действия группы S_4 на множестве из 3 элементов.

Задача 9. Докажите, что центр группы — это объединение её одноэлементных классов сопряжённости.

Задача 10. Постройте явно биекцию $G \to G$, определяющую изоморфизм действий группы G на себе левыми и правыми сдвигами.

Задача 11. (*Формула Бернсайда*) Пусть конечная группа G действует на конечном множестве X. Докажите, что число орбит этого действия равно

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|, \quad \text{где} \quad X^g := \{x \in X \mid gx = x\}.$$