

Бесконечная транзитивность

курс И.В.Аржанцева

летняя школа "Современная математика", Дубна, 24-28 июля 2021 года

ЗАДАЧИ К ЗАНЯТИЮ 2

Задача 1. Докажите, что группа G действует на множестве X m -транзитивно тогда и только тогда, когда это действие транзитивно и стабилизатор $\text{St}(x)$ некоторой точки $x \in X$ действует на дополнении $X \setminus \{x\}$ $(m-1)$ -транзитивно.

Задача 2. Пусть группа G действует на множестве X бесконечно транзитивно. Докажите, что для любого конечного набора точек в X пересечение стабилизаторов этих точек является бесконечной подгруппой группы G .

Задача 3. Докажите, что свободное действие группы не может быть 2-транзитивным.

Задача 4. Докажите, что группа $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$ действует на проективной прямой $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 3-транзитивно, но не 4-транзитивно.

Задача 5. Докажите, что при $n > 2$ группа $\text{PGL}_n(\mathbb{R})$ действует на проективном пространстве $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ 2-транзитивно, но не 3-транзитивно.

Задача 6. Докажите, что группа полиномиальных автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{A}^1)$ аффинной прямой \mathbb{A}^1 состоит из автоморфизмов вида $x \rightarrow ax + b$, $a \neq 0$.

Задача 7. Докажите, что группа полиномиальных автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{A}^1)$ аффинной прямой \mathbb{A}^1 действует на прямой 2-транзитивно, но не 3-транзитивно.

Задача 8. Приведите пример транзитивного действия группы $(\mathbb{Z}, +)$ на множестве натуральных чисел. Может ли такое действие быть 2-транзитивным?