

Бесконечная транзитивность

курс И.В.Аржанцева

летняя школа "Современная математика", Дубна, 24-28 июля 2021 года

ЗАДАЧИ К ЗАНЯТИЮ 3

Задача 1. Приведите пример группы G и двух таких ее подгрупп $H_1 \subseteq H_2 \subseteq G$, что подгруппа H_1 нормальна в H_2 , подгруппа H_2 нормальна в G , но подгруппа H_1 не нормальна в G .

Задача 2. Пусть G – группа, все элементы которой имеют порядок не больше двух. Докажите, что G коммутативна. Более того, G изоморфна группе $(V, +)$, где V – некоторое векторное пространство над полем \mathbb{Z}_2 .

Задача 3. Приведите пример группы, все элементы которой имеют конечный порядок и которая действует на множестве натуральных чисел бесконечно транзитивно.

Задача 4. Пусть G – группа и H – подгруппа в G . Известно, что действие G на множестве левых смежных классов G/H левыми сдвигами 2-транзитивно. Докажите, что подгруппа H совпадает со своим нормализатором в G .

Задача 5. Пусть $G = \text{GL}_3(\mathbb{R})$ и H – подгруппа верхнетреугольных матриц в G . Докажите, что H совпадает со своим нормализатором в G , но действие G на G/H не является 2-транзитивным.

Задача 6. Пусть $V = \mathbb{Z}_2^n$ – это n -мерное векторное пространство над полем \mathbb{Z}_2 и $n \geq 2$. Пусть $G = \text{Aff}(V)$ – группа аффинных преобразований пространства V и $N \subseteq G$ – нормальная подгруппа параллельных переносов. Докажите, что группа G действует на V 3-транзитивно, но не 4-транзитивно, а N действует на V транзитивно, но не 2-транзитивно. (Этот пример показывает, что при переходе к нормальной подгруппе степень транзитивности может падать больше чем на единицу.)

Задача 7. Пусть группа G эффективно и 2-транзитивно действует на бесконечном множестве X . Докажите, что в группе G нет нетривиальных нормальных конечных подгрупп.

Задача 8. Докажите, что группа $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ не может эффективно и 2-транзитивно действовать на каком-либо множестве. При этом факторгруппа $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ этой группы допускает 2- и даже 3-транзитивное действие.

Задача 9. Приведите примеры нетривиальных нормальных подгрупп в группах полиномиальных автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{A}^1)$ и $\text{Aut}(\mathbb{A}^n)$ при $n \geq 2$.