Задачи по конечным топологиям

Листок 1

Задача 1.* Пусть X — конечный CW-комплекс, $\mathrm{Cells}(X)$ — чум его клеток, а $\operatorname{ord}\mathrm{Cells}(X)$ — порядковый комплекс этого чума. Подумайте, при каких условиях на X имеется гомеоморфизм $X \cong \operatorname{ord}\mathrm{Cells}(X)$.

Задача 2. Рассмотрим стандартную топологию на $\mathbb{R}$, в которой $A \subseteq \mathbb{R}$ объявляется открытым, если $\forall x \in A$ существует $\varepsilon > 0$ такое что все точки y на расстоянии $< \varepsilon$ от x также лежат в A. Докажите, что эта топология хаусдорфова, но не нётерова, и не александрова.

Задача 3. Рассмотрим топологию Зарисского на $\mathbb{R}$, в которой замкнутыми объявляются множества нулей всевозможных многочленов (а открытыми — их дополнения). Докажите, что эта топология нётерова, но не хаусдорфова, и не александрова.

Задача 4. Придумайте топологию, которая александрова, но не хаусдорфова, и не нётерова.

Задача 5. Докажите, что хаусдорфова топология на конечном множестве бывает только одна — это топология, в которой все множества открыты (она называется *дискретной топологией*).

Задача 6. Пусть на X введена топология Александрова, и $U_x = \bigcap_{A \ni x, A \in T} A$ — минимальная открытая окрестность точки x. Докажите, что отношение

$$x \leqslant y \Leftrightarrow U_x \supseteq U_y$$

является предпорядком на X.

Задача 7. Пусть на X задан предпорядок. Скажем, что $A \subseteq X$ является верхним порядковым идеалом, если

$$x \in A, y \geqslant x \Rightarrow y \in A.$$

Докажите, что совокупность всех верхних порядковых идеалов задает топологию Александрова на X.

Задача 8. Докажите, что конструкции из предыдущих двух задач обратны друг к другу.

Задача 9. Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_0, если для любой пары точек $x \neq y$ в X существует открытое множество, которое содержит одну точку, и не содержит другую. Докажите T_0-пространства Александрова однозначно соответствуют частично упорядоченным множествам.

Замечание 1. В общей топологии имеется целая иерархия аксиом отделимости: чем больше индекс, тем сильнее условие:

- T_0 : в любой паре точек одна точка отделяется.
- T_1 : в любой паре любая точка отделяется.

- T_2 : в любой паре можно одновременно отделить обе точки.
- $T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_4$: нам не потребуются.

Задача 10. Докажите, что в топологии Александрова минимальная окрестность U_x точки x — это в точности множество $\{y \in X \mid y \geqslant x\}$ (“верхний порядковый идеал, порожденный элементом x”).