Задачи по конечным топологиям

Листок 3

Определение. Пусть X и Y — конечные топологические пространства. *Компактно-открытой топологией* на Y^X называется топология, все открытые множества получены пересечениями и объединениями множеств вида

$$A(C,U) = \{f \in Y^X \mid f(C) \subseteq U\},$$

где $C \subset X$ — произвольное подмножество, а $U \subseteq Y$ — произвольное открытое.

Замечание. В общем определении C должно быть компактным, а пересечения только конечные, в связи с чем и название. Любое конечное пространство компактно, поэтому определение в нашем случае упрощается.

Задача 1. Докажите, что компактно-открытая топология на Y^X соответствует предпорядку поточечного сравнения на Y^X.

Задача 2. Пусть C_k обозначает чум граней границы k-угольника (окружности, разбитой на k дужек). Найдите число компонент связности функционального пространства $(C_k)^{C_n}$ для произвольных $k, n \geqslant 2$.

Задача 3. Докажите, что если точки $x, y \in X$ связаны непрерывным путем в конечной топологии X, то существует зигзаг

$$x \leqslant z_1 \geqslant z_2 \leqslant z_3 \geqslant \dots \leqslant y.$$

Задача 4. Постройте явно деформационную ретракцию $X \to X/\sim$, где X конечный предчум, а $X/\sim$ — чум, полученный отождествлением пар x, y с $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$.

Задача 5.* Докажите аналог предыдущего упражнения, где вместо конечных топологий используются порядковые комплексы на соответствующих (пред)чумах. Это предполагает, что нужно еще правильно определить, что такое порядковый комплекс предчума.

Задача 6. Постройте явно деформационную ретракцию $X \to X \backslash \{x\}$, где X конечный чум, а x — upbeat или downbeat.

Задача 7. Докажите аналог предыдущего упражнения, где вместо конечных топологий используются порядковые комплексы на соответствующих чумах.

Задача 8. Пусть C — конечное ядро, и $f\colon C \to C$ отображение гомотопное тождественному отображению id_C. Докажите, что $f = \mathrm{id}_C$. Указание (эквивалентная формулировка): в чуме C^C элемент id_C не связан с другими элементами. Допустим, что существует $f \geqslant \mathrm{id}_C$. Докажите, что $f(x) = x$, индукцией, двигаясь с самых больших элементов $x \in C$, и пользуясь отсутствием downbeat'ов. И аналогично, если $f \leqslant \mathrm{id}_C$, то $f = \mathrm{id}_C$.

Задача 9. Пользуясь предыдущим упражнением, докажите теорему Стонга: $X \simeq Y \Leftrightarrow \operatorname{core} X \cong \operatorname{core} Y$.

Определение. Пусть X и Y — чумы. Пара монотонных функций $f\colon X \rightleftarrows Y : g$ называется (сохраняющим порядок) *соответствием Галуа*, если для любой пары элементов $x \in X$, $y \in Y$ условие $f(x) \leqslant y$ в Y эквивалентно $x \leqslant g(y)$ в X.

Задача 10. Докажите, что соответствие Галуа можно эквивалентно определить условием

$$\forall x \in X:\ x \leqslant g(f(x)) \text{ и } \forall y \in Y:\ f(g(y)) \leqslant y.$$

Задача 11. Докажите, что если между двумя конечными чумами X, Y есть соответствие Галуа, то $X \simeq Y$.

Задача 12.* Докажите следующую теорему Квиллена. Напомним, что p-группой называется группа мощности p^k, где p — простое число, $k \geqslant 1$. Пусть G — конечная группа, а p — фиксированное простое число. Рассмотрим чум $S_p(G)$ всех p-подгрупп в G, упорядоченных по включению, и чум $A_p(G)$ всех абелевых p-подгрупп в G. Докажите, что $S_p(G) \simeq A_p(G)$ и $\operatorname{ord} S_p(G) \simeq \operatorname{ord} A_p(G)$.