Задача 1. *Проверьте что*

$$I(x,y) = xy + (a+a^{-1})(x+y) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{x} + \frac{1}{xy}$$

является инвариантом отображения QRT

$$\eta = \varphi^2, \qquad \text{где} \quad \varphi = \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{(x-a)(x-a^{-1})}{y(x+a)}, \\ \overline{y} = x; \end{cases}$$

понятно что достаточно проверить это для отображения φ.

Задача 2. ***The Lyness Map***. *Отображения Линесса строится по следующему пучку биквадратичных кривых:*

$$(xy)(x+y) + a(x+y)^2 + (a^2+b)(x+y) + ab + kxy = 0,$$

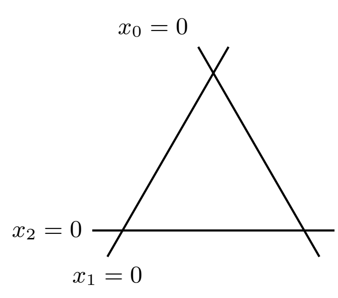
где a *и* b *– параметры отображения, и* k *- параметер пучка. Постройте явно уравнения QRT динамики (*φ *и* $\eta = \varphi^2$*) по этому пучку. Выпишите явно матрицы* A *и* B *задающие базисные кривые пучка. Найдите базисные точки геометрически, и из уравненоий динамики. Наидите инвариант этого отображения. Опишите поверхность QRT* $\mathcal{X}$ *этого отображения и посчитайте индуцированное отображение на решетке Пикара* $\operatorname{Pic}(\mathcal{X})$.

Задача 3. ***The Somos-4 Map***. *Покажите что отображение*

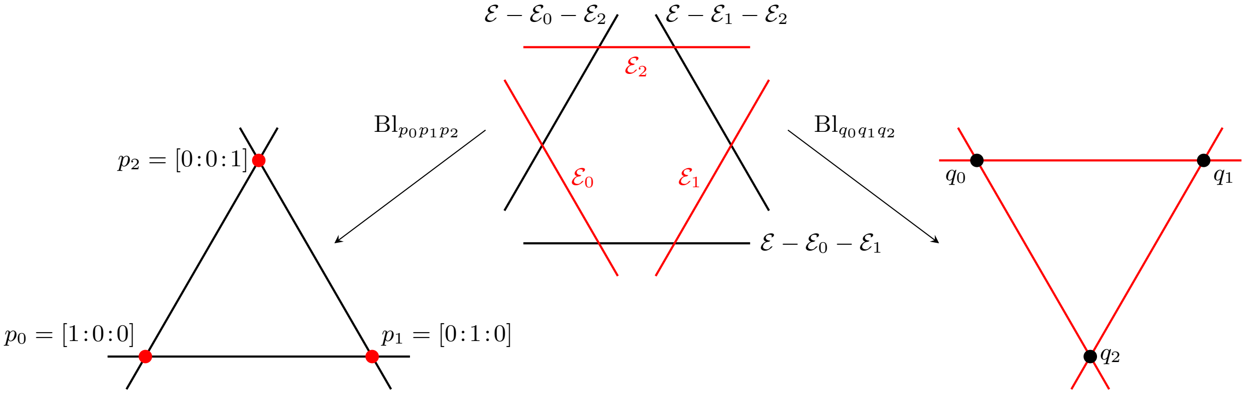
$$\varphi = \begin{cases} \overline{x} = y, \\ \overline{y} = \dfrac{ay+b}{xy^2} \end{cases}$$

принадлежит к классу отображений типа QRT. Используйте это для того, чтобы найти инвариант этого отображения. Опишите поверхность QRT $\mathcal{X}$ *и посчитайте индуцированное отображение на решетке Пикара* $\operatorname{Pic}(\mathcal{X})$.

Задача 4. *В однородных координатах* $[x_0 : x_1 : x_2]$ *комплексную плоскость* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *обычно представляют как координатный треугольник*



Заметим что индекс самопересечения прямых $x_i = 0$ *равен* 1*, они все проективно эквивалентны и принадлежат к классу прямой* $\mathcal{E} = [L]$*;* $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) = \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}\{\mathcal{E}\}$*,* $\mathcal{E} \bullet \mathcal{E} = 1$.
Рассмотрим следующее бирациональное преобразование $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *в себя. Сначала раздуем* 3 *точки пересечения координатных прямых. Тогда индекс самопересечения собственных прообразов координатных прямых* $\mathcal{E} - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j$ *станет равен* -1 *и эти прямые можно сдуть. В результате мы опять получим комплексную плоскость* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$*:*

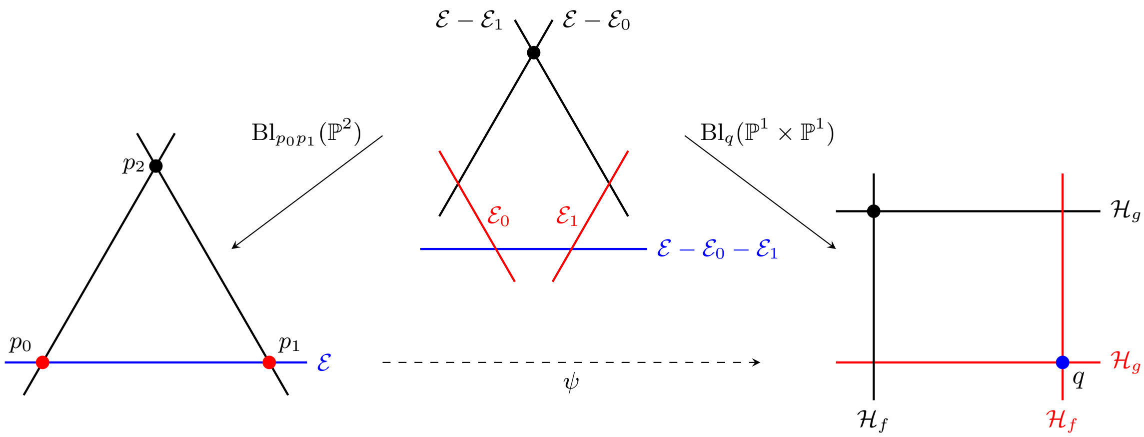


Запишите это преобразование в координатах. Можете ли вы найти индуцированное преобразование (замену базиса) на решетке Пикара $\mathrm{Pic}(\mathcal{X})$*, где* $\mathcal{X}=\mathrm{Bl}_{p_0,p_1,p_2}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})=\mathrm{Bl}_{q_0,q_1,q_2}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$*?*

Задача 5. *Существуют две стандартные компактификации пространства* $\mathbb{C}^2=\mathbb{C}^1\times\mathbb{C}^1$*: комплексная проективная плоскость* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *с однородными координатами* $[x_0:x_1:x_2]$ *и прямое произведение комплексных проективных прямых* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\times\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ *с однородными координатами* $([f_0:f_1],[g_0:g_1])$*. Эти компактификации не изоморфны; например,*

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})=\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\mathcal{E}\},\quad \mathcal{E}\bullet\mathcal{E}=1;\qquad \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\times\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})=\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\mathcal{H}_f,\mathcal{H}_g\},\quad \mathcal{H}_f\bullet\mathcal{H}_f=\mathcal{H}_g\bullet\mathcal{H}_g=0,\mathcal{H}_f\bullet\mathcal{H}_g=1.$$

Однако они бирационально эквивалентны, *как видно из следующих картинок:*



Найдите координатное представление бирационального отображения $\psi:\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\dashrightarrow\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\times\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ *и обратного отображения* ψ^{-1}*.*