Задачи

Некоторые факты из проективной геометрии

1. На прямой взяты различные точки A, B, C, D и E. Докажите, что
$$[x_1, x_2, x_3, x_4][x_1, x_4, x_3, x_5][x_1, x_5, x_3, x_2] = 1.$$
Найдите объяснение этого факта через геометрию сферы.

2. Рассмотрим четыре различные точки $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{P}^1$ с двойным отношением λ. Докажите, что двойное отношение этих же точек в любом другом порядке равно одному из шести чисел
$$\lambda,\ 1-\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1},\ 1-\frac{1}{\lambda}.$$
Постройте соответствующий гомоморфизм $\mathbb{S}_4$ в $\mathbb{S}_3$ и найдите его ядро.

3. Рассмотрим четыре различные прямые l_1, l_2, l_3, l_4 в $\mathbb{R}^2$, проходящие через точку O.
   (a) Рассмотрим еще одну прямую l, не проходящую через O. Докажите, что двойное отношение $[l \cap l_1, l \cap l_2, l \cap l_3, l \cap l_4]$ не зависит от прямой l. Выведите отсюда, что двойное отношение точек на прямой не меняется при центральных проекциях.
   (b) Множество прямых на плоскости, проходящих через точку O, образует проективную прямую. Докажите, что двойное отношение из пункта (a) равно двойному отношению соответствующих четырех точек на этой прямой.
   (c)

4. **Теорема фон Штаудта.** Докажите, что двойное отношение точек пересечения плоскостей граней тетраэдра с некоторой прямой l равно двойному отношению четырех плоскостей, проходящих через прямую l и вершины тетраэдра. Было бы здорово найти обобщение этого факта на старшие размерности.

5. Докажите, что проективное преобразование прямой, меняющее местами некоторые две различные точки, инволютивно (то есть его квадрат есть тождественное отображение).

6. Прямые a, b, c, d являются полярами относительно коники четырех точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой. Докажите, что прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке и
$$[a, b, c, d] = [A, B, C, D].$$

7. Докажите, что любая прямая в $\mathbb{CP}^2$ пересекает $\mathbb{RP}^2$.

8. Рассмотрим две прямые l_1, l_2 на плоскости, пересекающиеся в точке O под углом α. Вложим $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{CP}^2$ стандартным образом и рассмотрим точки $I_1 = [1, i, 0], I_2 = [1, -i, 0]$. Выразите угол α через двойное отношение прямых $[l_1, l_2, (OI_1), (OI_2)]$.

Сферическая тригонометрия и пентаграмма Гаусса

1. Рассмотрим треугольник на сфере с длинами сторон a, b, c и углами α, β, γ. Пусть $S-$площадь, а $p-$ полупериметр. Докажите следующие факты сферической геометрии:

   (a) $S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$,

   (b) **Теорема косинусов.**
   $$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha),$$

   (c) **Теорема синусов.**
   $$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)},$$

   (d) **Теорема тангенсов.**
   $$\tan^2\left(\frac{S}{4}\right) = \tan\left(\frac{p}{2}\right)\tan\left(\frac{p-a}{2}\right)\tan\left(\frac{p-b}{2}\right)\tan\left(\frac{p-c}{2}\right).$$

2. Рассмотрим проекцию внутреннего пятиугольника пентаграммы Гаусса из центра сферы на некоторую плоскость, касающуюся сферы. Докажите, что у получившегося пятиугольника высоты пересекаются в одной точке.

3. Рассмотрим пятиугольник P на проективной плоскости. Пусть $P'-$ это новый многоугольник, стороны которого - это диагонали исходного. Докажите, что P и P' проективно эквивалентны.

4. Найдите элементарное доказательство теоремы Понселе о зигзаге для случая пятиугольника. Как теорема Понселе связана с пентаграммой Гаусса?

5. Рассмотрим сферический треугольник с длинами сторон a, b, c и углами α, β. Обозначим
   $$\alpha_1 = a,\ \alpha_2 = c,\ \alpha_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha,\ \alpha_4 = \frac{\pi}{2} - b,\ \alpha_5 = \frac{\pi}{2} - \gamma.$$
   Пусть $a_i = \cot^2(\alpha_i)$. Докажите *Schöne Gleichung* Гаусса:
   $$a_1a_2a_3a_4a_5 = 3 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \sqrt{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)(1+a_5)}.$$

6. Придумайте какие-нибудь новые интересные факты про пентаграмму Гаусса и сообщите мне!

Формула Шлефли в $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим семейство многогранников P_t с постоянной комбинаторикой. Пусть E - это множество ребер многогранника, l_e- длина ребра e, а α_e- угол при ребре e. Цель задачи - доказать формула Шлефли:
$$\sum_{e\in E} l_e \frac{d\alpha_e}{dt} = 0.$$

1. Докажите, что достаточно проверить формулу Шлефли для тетраэдра.

2. Пусть S_i-площадь $i-$ой грани тетраэдра, $l_{ij}-$ длина ребра между i-ой и $j-$ой гранями тетраэдра, а $\alpha_{ij}-$ соответствующий двугранный угол. Докажите, что для любых $1 \leq i < j \leq 4$:
$$V = \frac{2}{3}\frac{S_i S_j \sin(\alpha_{ij})}{l_{ij}}.$$

3. Выведите отсюда трехмерную теорему синусов:
$$\frac{\sin(\alpha_{12})\sin(\alpha_{34})}{l_{12}l_{34}} = \frac{\sin(\alpha_{13})\sin(\alpha_{24})}{l_{13}l_{24}} = \frac{\sin(\alpha_{14})\sin(\alpha_{23})}{l_{14}l_{23}}.$$

4. Пусть $\vec{n}_i-$ единичные нормали к граням тетраэдра. Докажите, что
$$S_1\vec{n}_1 + S_2\vec{n}_2 + S_3\vec{n}_3 + S_4\vec{n}_4 = 0.$$

5. Закончите доказательство формулы Шлефли в $\mathbb{R}^3$.

6. Придумайте какое-нибудь другое доказательство формулы Шлефли.