Сферы размерностей 1,2, ... ,7

Г.Б.Шабат

Краткое изложение (с подробной библиографией) лекций в дубнинской школе "Современная математика-21 прочитанных 24 и 26 июля 2021

0. Общие соглашения

Начинаем со *стандартной сферы*

$$\mathbf{S}^n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \big| \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1\}$$

В курсе $n = 1, \ldots, 7$. Будут рассмотрены различные *структуры*[1], индуцированные вложением $\mathbf{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, а затем они же или их аналоги будут обсуждаться на абстрактных объектах, имеющих некоторые свойства стандартных сфер (*топологические/гомотопические/гомологические... сферы*).

Характерная проблема, которой завершается курс: описание множества <u>гладких</u> структур на <u>топологических</u> сферах.

1. $\mathbf{S}^1 \simeq \mathbf{P}_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}_1$ – окружность

1.0. Униформизация. Окружность – единственная *неодносвязная* сфера,

$$\mathbf{S}^1 \cong \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$$

[1] *Бурбакистский* термин, который не будет уточняться.

1.1. Групповая структура. Окружность – одна из лишь двух групп $\mathbf{S}^n$. Точнее: *лишь для* $n = 1, 3$ *на* $\mathbf{S}^n$ *имеется групповая структура, совместимая с топологической.*

Альтернативное обозначение следует принципу Арнольда

Любое (разумное) вещественное понятие имеет (не всегда очевидный) комлексный и кватернионный аналог.

Придерживаясь этого принципа, следовало бы начать с группы[2]

$$\mathbf{S}^0 = \{\pm 1\},$$

а для рассматриваемой сейчас группы естественно ввести обозначение

$$\mathbf{S}^1 = \mathbb{C}_1 := \{z \in \mathbb{C} \big| |z| = 1\}.$$

Вложение $\mathbf{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ полезно и в других вопросах. В частности, *группа изометрий* окружности может быть определена как *полупрямое произведение*

$$\mathrm{Isomet}(\mathbf{S}^1) \simeq \mathbb{C}_1 \lhd \mathsf{C}_2,$$

где 2-элементная группа C_2 определяется как группа преобразований комплексной плоскости

$$\mathsf{C}_2 = \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, z \mapsto \overline{z}\}.$$

1.2. Параллелизуемость. Для многообразия $\mathbf{M}$ нам придётся пользоваться понятием *касательного расслоения* $\mathrm{T}\mathbf{M}$. Многообразие называется *параллелизуемым*, если его касательное расслоение тривиально,

$$\mathrm{T}\mathbf{M} \simeq \mathbf{M} \times \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{M})}.$$

Очевидно, окружность параллелизуема.

Сферы $\mathbf{S}^n$ *параллелизуемы при значениях* $n = 1, 3, 7$ *и только при них.*

Значения $n = 1, 3, 7$ объясняются приведённым выше равенством $\mathbf{S}^1 = \mathbb{C}_1$ и его *кватернионным* и *октонионным* аналогами

[2] мы не включили $n = 0$ в утверждение про группы лишь при $n = 1, 3$, поскольку $n = 0$ – вне рассмотрения этих лекций.

(соответствующие числа будут введены ниже)

$$\mathbf{S}^3 = \mathbb{H}_1 \text{ и } \mathbf{S}^7 = \mathbb{O}_1.$$

Непараллелизуемость прочих сфер впервые установлена в **[BottMilnor1958]**.

1.3. Окружность как алгебраическая кривая. Коника

$$x^2 + y^2 = 1$$

– начало алгебраической и арифметической геометрии, а, возможно, и всей математики, см. **[ОстрикЦфасман2011]**.

Вместе с тем

$$\mathbf{S}^1 = \mathbf{P}_1(\mathbb{R}).$$

1.4. О вложениях абстрактной окружности в $\mathbb{R}^2$. Теперь $\mathbf{S}^1$ будет обозначать *топологическую* окружность. Непрерывные вложения

$$\mathbf{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$$

называются *жордановыми кривыми*; среди них встречаются достаточно экзотические объекты, а их "очевидные" свойства бывает нелегко доказать.

На наиболее очевидный вопрос отвечает

Теорема Жордана-Шёнфлиса. *Внутренняя и внешняя области, ограниченные Жордановой кривой в* $\mathbb{R}^2$ *гомеоморфны единичному кругу и его дополнению.*

Когда я был студентом-младшекурсником (в 60-е годы прошлого века), на Физтехе за полное доказательство этой теоремы ставили автомат по матанализу. С использованием средств алгебраической топологии она, однако, доказывается легко, см. **[Maehara1984]**. Элементарное доказательство можно найти в **[Cairns1951]**.

Экзотические[3] жордановы кривые – такие, что множества их негладких точек всюду плотны – естественно возникают по крайней мере в двух областях математики.

---

[3] возникает соблазн сказать *фрактальные*, но у этого популярного понятия, видимо, нет точного определения

Во-первых, *квазиокружности* возникают в теории *квазифуксовых групп.* Пусть $\Gamma \subset \mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$ – такая дискретная конечно-порождённая группа дробно-линейных преобразований *верхней полуплоскости*

$$\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0,$$

что фактор $\frac{\mathcal{H}}{\Gamma}$ – гладкая компактная поверхность. Можно распространить действие группы Γ на *проективную прямую* $\mathbf{P}_1(\mathbb{C})$. Тогда можно определить окружность $\mathbf{P}_1(\mathbb{R}) \subset \mathbf{P}_1(\mathbb{C})$ как *предельное множество* $\Lambda(\Gamma)$ *орбит* точек верхней полуплоскости под действием группы Γ. Если деформировать Γ в большей группе, взяв близкую к ней $\Gamma' \subset \mathsf{PSL}_2(\mathbb{C})$, то множество $\Lambda(\Gamma')$ – квазиокружность. См. [**Bowen1979**].

Во-вторых, *множества Жюлиа*, которые можно определить для любого непрерывного отображения $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ как замыкание $\mathcal{J}_f$ *множества периодических орбит* Per_f, где

$$\mathrm{Per}_f := \Big\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{множество } \Big\{ z, f(z), f\big(f(z)\big), \ldots \Big\} \text{ конечно} \Big\}.$$

Очевидно,

$$\mathrm{Per}_{z \mapsto z^2} = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \mathbb{Q}}$$

и мы встречаемся с очередным воплощением окружности

$$\mathcal{J}_{z \mapsto z^2} = \mathbb{C}_1.$$

Очередной феномен деформации: при достаточно малых[4] $c \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{J}_{z \mapsto z^2 + c} \text{ – квазиокружность.}$$

См. [**Milnor2006**].

Между упомянутыми классами экзотических окружностей существует несколько загадочная связь. Некоторые разъяснения можно найти, например, в работе [**Hubbard2012**] и содержащихся в ней ссылках.

2. $\mathbf{S}^2 \simeq \mathbf{P}_1(\mathbb{C})$ – настоящая сфера

2.0. Терминология. Просто *сферой*, без эпитетов, обычно называется именно $\mathbf{S}^2$.

2.1. Рогатая сфера Александера. Этот объект является двумерным аналогом упомянутых в предыдущем разделе *квазиокружностей.* Однако аналоги некоторых "очевидных", хоть

[4]Множество $\{c \in \mathbb{C} \mid \mathcal{J}_{z \mapsto z^2 + c} \text{ связно}\}$ – это знаменитое *множество Мандельброта.*

и труднодоказуемых, 1-мерных утверждений в размерности 2 оказываются правдоподобными, но неверными.

Точнее, часть теоремы Жордана-Шёнфлиса верна во всех размерностях.

Теорема Жордана-Брауэра о разделении. *Пусть* $n > 0$ *и* $\mathbf{X}$ *– топологическая сфера в* $\mathbb{R}^{n+1}$*, то есть образ непрерывного вложения* n*-сферы* $\mathbf{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$*. Тогда дополнение* $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbf{X}$ *состоит в точности из двух связных компонент. Одна из этих компонент ограничена (внутренность), а другая неограниченна (внешность). Множество* $\mathbf{X}$ *– их общая граница.* См. [**Alexander1922**]

Однако тот же Александер в [**Alexander1924**] построил контрпример к аналогу другой "очевидной" части теоремы Жордана-Шёнфлиса (*гомеоморфны ... его дополнению*). Его *рогатая сфера*

$$\mathsf{horned} : \mathbf{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3.$$

такова, что внутренность $\mathsf{horned}\,(\mathbf{S}^2)$ – топологический шар, а внешность $\mathsf{horned}(\mathbf{S}^2)$ неодносвязна.

Элементарное описание рогатой сферы см. в [**Фукс1990**], а многочисленные красочные видео легко найти в современном Интернете.

2.2. Риманова геометрия на стандартной сфере. Стандартная сфера вместе с римановой метрикой, индуцированной с $\mathbb{R}^3$, справедливо называется *круглой.* Она же может быть определена как единственное *риманово многообразие постоянной положительной кривизны.* Или, что приблизительно равносильно, как

$$\mathbf{S}^2 \simeq \frac{\mathsf{SO}_3(\mathbb{R})}{\mathsf{SO}_2(\mathbb{R})},$$

Сама этимология слова $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$ ($\approx$*Землемерие*) напоминает об особой роли изучения метрических свойств сферы $\mathbf{S}^2$ как поверхности, на которой мы живём. (Более традиционная и изучаемая во всех школах мира *евклидова* геометрия лучше отражает взгляды сторонников *теории плоской Земли*[5], см. [**Garwood2010**]).

[5]Для этих людей есть английское словосочетание *flat earthers.*

Современный рассказ о связи сферической геометрии с картографией можно найти в [**Papadopoulos2020**].

2.3. Другие римановы метрики на сфере. Мы, однако, живём на не совсем круглой сфере. Для истинной поверхности Земли есть специальное слово *геоид.* Мы ограничимся приближениями геоида *эллипсоидами*, то есть гладкими сферами

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\},$$

где *полуоси* $a, b, c \in \mathbb{R}$ удовлетворяют $a \geq b \geq c > 0$.

Описание *геодезических* на эллипсоидах с разными полуосями – неэлементарная задача[6]. Для *приплюснутого двухосного* эллипсоида (то есть удовлетворяющего $a > b = c$) она была решена в терминах *эллиптических интегралов* в работе [**Legendre1806**], а для *трёхосного* ($a > b > c$) – в терминах *абелевых интегралов* в работе [**Jacobi1839**].

2.4. Касательное расслоение. Как уже упоминалось,

$$\mathrm{T}\mathbf{S}^2 \not\simeq \left(\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}^2\right).$$

Видимо, это – простейший пример нетривиального векторного расслоения.

Ёжика нельзя причесать. Это – более сильное утверждение, чем непараллелизуемость двумерной сферы; речь идёт о том, что *любое сечение расслоения* $\mathrm{T}\mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^2$ *обращается в нуль.*

Важную роль в дальнейшем будет играть *единичное касательное расслоение* (*unit tangent bundle*)

$$\mathrm{UT}\mathbf{S}^2 \longrightarrow \mathbf{S}^2,$$

где для каждой $P \in \mathbf{S}^2$

$$\mathrm{T}\mathbf{S}^2 \supset \mathrm{UT}\mathbf{S}^2 := \left\{v \in \mathrm{T}_P\mathbf{S}^2 \middle| |v| = 1\right\}.$$

Непричёсываемость ёжика очевидно равносильна тому, что расслоение $\mathrm{UT}\mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^2$ *вообще не имеет сечений.*

2.5. $\mathbf{S}^2$ как чётномерное многообразие. На чётномерных

[6]имеющая очевидный практический смысл: подумаем об авиалиниях и траекториях трансконтинентальных кораблей.

многообразиях имеется иерархия (иногда пустых) множеств структур, связанных между собой естественными отображениями[7]. Стандартных обозначений для этих множеств нет, и мы введём свои:

$$\mathsf{Alg} \to \mathsf{Compl} \to \mathsf{AlmCompl} \to \mathsf{Smooth} \to \mathsf{Top}^+ \to \mathsf{Hot}. \qquad (\bigstar)$$

Будем расшифровывать их постепенно.

Для владеющих категорным языком: мы обозначили шесть категорий, связанных *забывающими* функторами. Все эти категории *essentially small* – классы их изоморфных объектов образуют <u>множества</u>. При анализе структур важны *сопровождающие отображения* именно этих множеств.

Категорные концепции не очень важны для нашего курса, поскольку бы интересуемся в основном лишь семью объектами вида $\mathbf{S}^n$ наших категорий.

Для объекта $\mathbf{X}$ каждой из категорий $(\bigstar)$ через $\mathsf{Alg}(\mathbf{X})$, $\mathsf{Compl}(\mathbf{X})$,... будет обозначаться множество соответствующих структур на соответствующем объекте. Мы будем рассматривать лишь $\mathbf{X} = \mathbf{S}^n$ при $n \in \{1, \ldots, 7\}$, но необходимо будет каждый раз указывать (если это не будет очевидно из контекста), в качестве объекта какой категории мы рассматриваем $\mathbf{S}^n$.

Если идти по цепочке $(\bigstar)$ справа налево, то возникают следующие вопросы:

• Реализуется ли данный гомотопический тип компактным топологическим ориентируемым многообразием? Если да, то как описать множество компактных топологических многообразий данного гомотопического типа?(*)
• Существует ли гладкая структура на данном топологическом многообразии? Если да, то как описать множество всех таких гладких структур?
• Существует ли почти комплексная структура на данном гладком многообразии? Если да, то как описать множество всех таких почти комплексных структур?
• Интегрируема ли данная почти комплексная структура?

[7]Разумеется, существуют многочисленные варианты предлагаемого списка.

• Является ли данное комплексно-аналитическое многообразие алгебраическим?

(*) Если множество реализаций гомотопического типа топологического многообразия состоит из единственного элементна, то многообразие называется *топологически жёстким.*

Размерность $n = 2$ уникальна в том, что все шесть множеств

$$\mathsf{Alg}(\mathbf{S}^2), \mathsf{Compl}(\mathbf{S}^2), \ldots, \mathsf{Hot}(\mathbf{S}^2)$$

непусты и, более того, одноэлементны. Расшифруем это.

Структура алгебраического многообразия на $\mathbf{S}^2$, единственной из сфер, существует благодаря интерпретации $\mathbf{S}^2 \simeq \mathbf{P}_1(\mathbb{C})$. Кроме того, $\#\mathsf{Alg}(\mathbf{S}^2) = 1$, то есть алгебраическая структура на $\mathbf{S}^2$ единственна и *недеформируема* – это выделяет двумерную сферу из поверхностей *большего рода.*

Комплексная структура на $\mathbf{S}^2$ существует и единственна по той же причине. Недеформируемость основана на изучении *уравнения Бельтрами,* см. [**Альфорс1966**]. Возможно, комплексная структура ещё существует только на $\mathbf{S}^6$ – см. ниже.

Почти комплексная структура на $\mathbf{S}^2$ существует и единственна как линейное приближение комплексной. Она ещё существует только на $\mathbf{S}^6$ – см. ниже.

Комплексная структура, как всегда, определяет гладкую. Иначе говоря, $\#\mathsf{Smooth}(\mathbf{S}^2) = 1$ – не существует *экзотических* 2-мерных сфер. Это следует, например, снова из *конформной* классификации поверхностей. Первое доказательство, видимо, было опубликовано в [**Rado1925**]

Наконец, сфера $\mathbf{S}^2$ топологически жестка, то есть $\#\mathsf{Top}^+(\mathbf{S}^2) = 1$. *Поверхность, гомотопически эквивалентная сфере, гомеоморфна ей.* Это следует из топологической классификации поверхностей, см. [**Смирнов2003**]. *Гипотеза Пуанкаре* в размерности 2 считается тривиальной.

3. $\mathbf{S}^3 \simeq \mathbb{H}_1$

3.0. Где мы живём? Мы уже обсуждали двумерную сферу как поверхность, <u>на</u> которой живём. Перейдя к трёхмерию, <u>не</u> будем уподобляться основоположникам *единственного верного* учения[8], согласно которым *...бесконечность в пространстве, – как это ясно с первого же взгляда и соответствует прямому смыслу этих слов,– состоят в том, что тут нет конца ни в какую сторону,– ни вперёд, ни назад, ни вверх, ни вниз, ни вправо, ни влево* (см. [**Энгельс1878**]). Иначе говоря, классики диалектического материализма, видимо, верили, что мы живём в $\mathbb{R}^3$. Эта вера является трёхмерным аналогом упомянутых выше взглядов *flat-earthers* – с тем, правда, отличием, что сведениями о глобальной топологии Вселенной мы пока, в начале 3-го тысячелетия, не располагаем.

"С первого же взгляда" ясно лишь то, что мы живём в трёхмерном *многообразии*. Из разных соображений естественно предположить его, вопреки Энгельсу, *компактным*. Простейшая гипотеза заключается в том, что *мы живём в* $\mathbf{S}^3$.

3.1. Как представить себе $\mathbf{S}^3$? Мы вышли за пределы школьной стереометрии: стандартная трёхмерная сфера расположена в $\mathbb{R}^4$. Чтобы не отключать геометрической интуиции, полезно представить себя <u>летающим **в** $\mathbf{S}^3$</u>, с постоянной аналогией о представлении себя <u>ходящим **по** $\mathbf{S}^2$</u>.

Укажем два способа "внутренней визуализации" сферы $\mathbf{S}^3$.

3.1a. Одноточечная компактификация $\mathbb{R}^3$. Аналогичное определение сферы $\mathbf{S}^2$ как *сферы Римана* связано с представлением

$$\mathbf{S}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \coprod \{\infty\}$$

на основе *стереографической проекции* (являющейся *конформной эквивалентностью*)

$$\mathbf{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto \frac{(x,y)}{1-z}.$$

При работе на сфере Римана $\mathbf{S}^2 \simeq \mathbf{P}_1(\mathbb{C})$ (например, при изучении её *дробно-линейных преобразований*) полезно представление $\mathbf{P}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}\coprod\{\infty\}$, позволяющее рисовать всё на $\mathbb{C}$, придавая

[8]то есть *марксизма-ленинизма*; наукообразные сентенции классиков этого учения советским студентам нескольких поколений, включая моё, приходилось учить наизусть.

очевидный и точный смысл знакосочетанию $(x+y\mathrm{i})\to\infty$.

Читателю предлагается продумать аналогичные понятия и конструкции для представления

$$\mathbf{S}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \coprod \{\infty\}$$

3.1b. Объединение Южной и Северной половин. Речь о склеивании двух трёхмерных шаров

$$\mathbf{B}^3 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

по "экватору" $\mathbf{S}^2$. Продумать детали и географические аналогии предоставляется читателю.

Через раздел будет предложен ещё один, менее, очевидный, способ визуализации трёхмерной сферы.

3.2. $\mathbf{S}^3$ как группа. Как уже было сказано, $\mathbf{S}^3$ – последняя среди сфер $\mathbf{S}^{1,2,3,\dots,7,\dots}$ группа.

Определим *тело кватернионов* как

$$\mathbb{H} := \mathbb{C}+\mathbb{C}\mathbf{j}$$

с умножением

$$(z_1+w_1\mathbf{j})(z_2+w_2\mathbf{j}) := z_1z_2 - w_1\overline{w_2} + (z_1w_2+w_1\overline{z_2})\mathbf{j}$$

(мнемоника: комплексное числоб меняясь местами с $\mathbf{j}$, сопрягается).

Определяем

$$|z+w\mathbf{j}| := \sqrt{z\overline{z}+w\overline{w}}.$$

Легко проверяется, что для $q_1,q_2\in\mathbb{H}$

$$|q_1q_2| = |q_1||q_2|,$$

откуда следует, что

$$\mathbb{H}_1 := \{q\in\mathbb{H}\Big||q|=1\}$$

– группа. Вместе с тем очевидно

$$\mathbb{H}_1 \simeq \mathbf{S}^3.$$

3.3. Группы $\mathbb{H}_1$ и $\mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$. Если исходить из вещественного представления кватернионов, введенного их первооткрывателем (см.

[**Hamilton1843**])
$$\mathbb{H} := \mathbb{R} + \mathbb{R}\mathrm{i} + \mathbb{R}\mathrm{j} + \mathbb{R}\mathrm{k}$$
с умножением, определённым соотношениями
$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1,$$
то можно для кватерниона[9]
$$q = T + X\mathrm{i} + Y\mathrm{j} + Z\mathrm{k}$$
определить *сопряжённый*
$$\overline{q} := T - X\mathrm{i} - Y\mathrm{j} - Z\mathrm{k}$$
и ввести трёхмерное пространство *мнимых* кватернионов
$$\mathrm{Im}\mathbb{H} := \{q \in \mathbb{H} \mid \overline{q} = -q\}.$$
На этом пространстве группа $\mathbb{H}_1$ действует *изометриями* по формуле[10]
$$\mathbb{H}_1 \to \mathrm{Isomet}\big(\mathrm{Im}\mathbb{H}\big) : q \mapsto \big(r \mapsto qrq^{-1}\big),$$
и нетрудно проверить, что *ядро* этого действия – двухэлементная нормальная подгруппа $\{\pm 1\} \triangleleft \mathbb{H}_1$.

Обычная группа изометрий "нашего" трёхмерного пространства называется *специальной ортогональной группой* и обозначается $\mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$. Введённые группы можно связать *короткой точной последовательностью*
$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathbb{H}_1 \to \mathsf{SO}_3(\mathbb{R}) \to 1.$$
Обещанная в разделе 3.1 третья визуализация сферы $\mathbf{S}^3 \simeq \mathbb{H}_1$ извлекается из этой последовательности как (единственное) *двулистное накрытие группы вращений евклидова пространства* $\mathbb{R}^3$.

Эта двулистность связана с физическим понятием *спина*. Многочисленные красивые демонстрации в современном Интернете иллюстрируют изоморфизм $\pi_1\big(\mathsf{SO}_3(\mathbb{R})\big) \cong \{\pm 1\}$.

3.4. Расслоение Хопфа $\mathbb{H}_1 \to \mathbf{P}_1(\mathbb{C})$, или $\mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^2$. Алгебраические конструкции предыдущего раздела определяют

[9]стандартные обозначения $x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ для *мнимых* кватернионов конфликтуют с (тоже стандартными) введёнными обозначениями для комплексного представления – буква z двусмысленна. Поэтому приходится пользоваться заглавными буквами.

[10]здесь следовало бы снова сказать *сопряжениями*, но двусмысленность этого термина может запутать начинающего.

очевидное вложение групп (фундаментальное в смысле *принципа Арнольда!*)

$$\mathbb{C}_1 \hookrightarrow \mathbb{H}_1.$$

Образ этого вложения не нормален, но разложение по смежным классам очевидно определяет расслоение

$$\mathbb{H}_1 \longrightarrow \frac{\mathbb{H}_1}{\mathbb{C}_1} \simeq \mathbf{P}_1(\mathbb{C}),$$

которое и называется *расслоением Хопфа.* Его же можно определить как *сферическое расслоение*

$$\mathbf{S}^3 \longrightarrow \mathbf{S}^2$$

со слоем $\mathbf{S}^1$. Это отображение объясняет нетривиальность *гомотопической группы*

$$\pi_3(\mathbf{S}^2) \simeq \mathbb{Z}.$$

Нетривиальность расслоения Хопфа нам известна, поскольку мы уже встречались с этим расслоением под видом *расслоения единичных векторов*

$$\mathrm{UT}\mathbf{S}^2 \longrightarrow \mathbf{S}^2.$$

Интересно в расслоении Хопфа и то, что оно представляет трёхмерную сферу в виде *объединения непересекающихся окружностей, параметризованных двумерной сферой.*

Визуализация этой конструкции с использованием *одноточечной компактификации* (см. 3.1a) приводит к следующему. Если выбросить из семейства окружностей ту единственную, которая проходит через бесконечную точку, то пространство

$$\mathbf{R}^3 \setminus \text{прямая}$$

окажется представленным в виде объединения непересекающихся окружностей, параметризованных проколотой сферой $\mathbf{S}^2 \setminus \{\infty\} \simeq \mathbb{R}^2$. Бросающееся в глаза представление такого рода, когда окружности представляют собой орбиты вращения пространства вокруг выброшенной кривой, не подходят, поскольку такие окружности окажутся *незацепленными* , тогда как *слои расслоения Хопфа попарно зацеплены*, в чём можно убедиться, рассмотрев какую-нибудь явно параметризованную окружность на трёхмерной сфере, не проходящую через бесконечность и изучив её взаимоотношения с выделенной прямой.

Всю конструкцию трудно представить себе геометрически, однако всё можно задать сравнительно простыми формулами, которые читатель, возможно, найдёт интересным выписать. "Увидеть" расслоение Хопфа можно в серии фильмов Этьена Жиса (Etienne Ghys) *Dimensions*, доступном в Интернете.

3.5. Гладкие структуры на $\mathbf{S}^3$. Во введённых выше обозначениях $\#\mathsf{Smooth}(\mathbf{S}^3) = 1$. Это значит, что *на топологической трёхмерной сфере гладкая структура существует и единственна.* Иначе говоря, *экзотических трёхмерных сфер нет, а все гладкие трёхмерные сферы диффеоморфны.*

См. [**Moise1977**].

3.6. Метрики на $\mathbf{S}^3$. Рассмотрение <u>всех</u> **метрик** на <u>всех</u> трёхмерных многообразиях[11] привело к полной **топологической** классификации этих многообразий. Результаты, относящиеся к $\mathbf{S}^3$, хотя и являются особенно престижными (отвечают на вопрос, который стоял почти сто лет и решают проблему, пока единственную из семи, сформулированными современными математиками на ближайшую тысячу лет), являются весьма специальными следствиями этой классификации. Обо всём этом удастся рассказать лишь очень поверхностно и приблизительно, отсылая к специальной литературе.

Упомянутая классификация появилась в [**Thurston1982**] под названием *гипотезы геометризации.* Она состоит в следующем:

Любое компактное трёхмерное многообразие разбивается, причём по существу единственным образом, попарно непересекающимися двумерными несжимаемыми[12] *сферами и торами на части, обладающие одной из восьми <u>геометрических структур</u>[13].*

Гипотеза была в основном доказана в препринтах [**Perelman2002**], [**Perelman2003**], [**Perelman2003a**]. В доказательстве использовался *поток Риччи*, введённый в [**Hamilton1982**].

Для знающих основы римановой геометрии: поток Риччи – это

[11]как обычно, мы говорим о *компактных связных ориентируемых* многообразиях, не повторяя этого каждый раз

[12]для сфер это значит, что они не ограничивают трёхмерного шара, а образ вложения тора $\iota : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \hookrightarrow \mathbf{M}$ называется *несжимаемым*, если индуцированный морфизм фундаментальных групп $\iota_* : \pi_1(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1) \to \pi_1(\mathbf{M})$ инъективен.

[13]Для открытого трёхмерного многообразия иметь *геометрическую структуру* значит допускать *локально однородную* риманову метрику, то есть иметь вид $\frac{\mathbf{H}}{\Gamma}$, где $\mathbf{H}$ – однородное пространство (в данном случае одно из 8-элементного списка), а Γ – дискретная группа его преобразований.

"обыкновенное" дифференциальное уравнение

$$\dot{g} = -2\mathrm{Ric}(g).$$

Оно имеет смысл для произвольного гладкого многообразия, а его решения – вещественные кривые в пространстве римановых метрик

$$g : t \mapsto \mathrm{Riem}(\mathbf{M}),$$

где $t \in [t_0, t_1) \subset \mathbb{R}$, используется обычное обозначение $\dot{g} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$ и в правой части стоит *тензор Риччи* метрики $g(t)$.

Поток Риччи уподобляют *уравнению теплопроводности*. Тепло со временем $t \to \infty$ равномерно распространяется, например, по металлическому стержню; аналогичным образом метрика, эволюционирую в соответствии с потоком Риччи, приближается к метрике *постоянной кривизны*. В интересующем нас случае метрик на трёхмерной сфере метрика *положительной кривизны* стремится стать "всё круглее". Проблема, с которой лишь частично справился Р. Гамильтон, заключается в том, что метрика, увлекаемая потоком Риччи, время от времени вырождается. Это преодолевается *перестройками*, в которых Перельман проявил особую виртуозность.

3.7. Гипотеза Пуанкаре. Наконец, как охарактеризовать трёхмерную сферу среди прочих топологических многообразий? В наших обозначениях речь идёт о множестве $\mathsf{Top}^+(\mathbf{S}^3)$, где на этот раз $\mathbf{S}^3$ – *гомотопический тип* трёхмерной сферы.

Традиционная идея на рубеже 19-го и 20-го веков – попытаться охарактеризовать топологическое многообразие (гомотопическими) инвариантами.

Многообразие называется *гомологической сферой*, если у него такие же гомологии, как у $\mathbf{S}^3$, и *гомотопической сферой*, если оно гомотопически эквивалентно $\mathbf{S}^3$. Последнее условие обычно заменяется на *односвязность*.

Работа [**Poincare1900**] содержала неверное утверждение о том, что *гомологическая 3-сфера гомеоморфна сфере.* Оно было опровергнуто в [**Poincare1904**]: *гомологическая сфера Пуанкаре* – это додекаэдр с отождествлёнными противоположными гранями. В этой же работе был сформулирован вопрос: *Всякое ли односвязное трёхмерное многообразие гомеоморфно сфере?*

Предположение об утвердительном ответе, хотя Пуанкаре его явно и не формулировал, и стало называться *гипотезой Пуанкаре*. Она была открыта около ста лет. Как уже говорилось, она легко вытекает из гипотезы геометризации Терстона, которая была доказана в препринтах [**Perelman2002**], [**Perelman2003**], [**Perelman2003a**]. Доказательство Перельмана так и не было опубликовано, но было многократно изложено другими авторами, см, например, [**MorganTian2007**].

3.8. Линзовые пространства. Решение проблемы Пуанкаре, как мы знаем, можно сформулировать и так: *трёхмерная сфера топологически жёстка.* С ней, однако, тесно связаны топологически нежёсткие пространства.

Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ – взаимно простые натуральные числа. Построим фактор трёхмерной сферы по циклической группе

$$\mathbf{L}_{p,q} := \frac{\mathbf{S}^3}{\left\langle (z,w) \mapsto \left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{q}} z, \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}p}{q}} w\right) \right\rangle};$$

такие пространства и называются *линзовыми.*

Оказывается,

$$\mathbf{L}_{p,q_1} \text{ гомотопически эквивалентно } \mathbf{L}_{p,q_1} \iff \exists n \big[q_1 q_2 \equiv \pm n^2 \mod p\big],$$

$$\mathbf{L}_{p,q_1} \text{ гомеоморфно } \mathbf{L}_{p,q_1} \iff \big[q_1 \equiv \pm q_2^{\pm 1} \mod p\big].$$

В частности, пространства $\mathbf{L}_{7,1}$ и $\mathbf{L}_{7,2}$ гомотопически эквивалентны, но не гомеоморфны. См. [**Хатчер2011**].

4. $\mathbf{S}^4 \simeq \mathbf{P}_1(\mathbb{H})$

4.0. Кватернионная проективная прямая. По причине некоммутативности кватернионного умножения приходится рассматривать *левую* и *правую* кватернионные проективные прямые,

$$\mathbf{P}_1(\mathbb{H})_{\mathsf{left}} := \frac{(\mathbb{H} \times \mathbb{H}) \setminus \{(0,0)\}}{(q_0, q_1) \approx (\lambda q_0, \lambda q_1) \text{ при } \lambda \in \mathbb{H}^\times}$$

и

$$\mathbf{P}_1(\mathbb{H})_{\mathsf{right}} := \frac{(\mathbb{H} \times \mathbb{H}) \setminus \{(0,0)\}}{(q_0, q_1) \approx (q_0 \lambda, q_1 \lambda) \text{ при } \lambda \in \mathbb{H}^\times}.$$

Соответствующие классы эквивалентности, то есть точки проективных прямых естественно обозначить $(q_0 : q_1)_{\mathsf{left}}$ и $(q_0 : q_1)_{\mathsf{right}}$.

Левая и *правая* кватернионные проективные прямые (ориентируемо) диффеоморфны,

$$\mathbf{P}_1(\mathbb{H})_{\mathsf{left}} \xrightarrow{\cong} \mathbf{P}_1(\mathbb{H})_{\mathsf{right}} : (q_0 : q_1)_{\mathsf{left}} \mapsto (\overline{q_0} : \overline{q_1})_{\mathsf{right}}.$$

Нет разумных оснований предпочесть какой-нибудь из двух вариантов. Выберем наугад

$$\mathbf{P}_1(\mathbb{H}) := \mathbf{P}_1(\mathbb{H})_{\mathsf{left}}.$$

4.1. Комплексные числа, кватернионы и октонионы. Поскольку в наши 4-мерные рассмотрения уже вторглась *плоскость* $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, введём соответствующие "числа". Не боясь повториться, предъявим три похожие конструкции. Со сложениями всё очевидно; определим умножения и *сопряжения*.

<u>Комплексные числа</u> $\mathbb{C} :\simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Для $x, y; z, w \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(x, y)(z, w) := (xz - yw, xw + yz)} \qquad (\cdot)_{\mathbb{C}}$$

Определяем $\overline{(x, y)} := (x, -y)$.

<u>Кватернионы</u> $\mathbb{H} :\simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Воспользуемся введённым выше представлением $\mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C}\mathrm{j}$ с умножением

$$(x + y\mathrm{j})(z + w\mathrm{j}) := xz - y\overline{w} + (xw + y\overline{z})\mathrm{j},$$

(которое было подсказано мнемоническим правилом $\mathrm{j}t = \bar{t}\mathrm{j}$ при $t \in \mathbb{C}$), или для $x, y; z, w \in \mathbb{C}$

$$\boxed{(x, y)(z, w) := (xz - y\overline{w}, xw + y\overline{z})} \qquad (\cdot)_{\mathbb{H}}$$

Определяем для $t, x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\overline{t + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k})} := t - x\mathrm{i} - y\mathrm{j} - z\mathrm{k}.$$

<u>Октонионы</u>[14] $\mathbb{O} :\simeq \mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Формулу для умножения я умею только подсмотреть в источниках: для $x, y; z, w \in \mathbb{H}$

$$\boxed{(x, y)(z, w) := (xz - \overline{w}y, wx + y\overline{z})} \qquad (\cdot)_{\mathbb{O}}$$

Определяем в очевидных обозначениях для $x_0, x_1, \ldots, x_7 \in \mathbb{R}$

$$\overline{x_0 + x_1\mathrm{e}_1 + \cdots + x_7\mathrm{e}_7} := x_0 - x_1\mathrm{e}_1 - \cdots - x_7\mathrm{e}_7.$$

[14]Изобретены/открыты в 1843 Грейвсом (John T. Graves), другом Гамильтона. См.

На этом "числа" кончаются: согласно [**Frobenius1878**], вещественные ассоциативные алгебры исчерпываются списком $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, а если вместо ассоциативности потребовать лишь обратимости "умножения" и наличия достаточно хорошей *нормы*, совместимой с умножением, то, согласно [**Hurwitz1923**], добавится лишь $\mathbb{O}$.

***

Имеем вложения, определяемые обращением в 0 последних вещественных координат:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}.$$

Поэтому определённая на $\mathbb{O}$ норма

$$\mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : o \mapsto \big(|o| := \sqrt{o\overline{o}}\big)$$

задаёт норму на всех наших алгебрах.

Это даёт возможность единообразно определить сферы

$$\mathbf{S}^1 := \mathbb{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} \Big| |z| = 1\},$$

$$\mathbf{S}^3 := \mathbb{H}_1 = \{q \in \mathbb{H} \Big| |q| = 1\},$$

$$\mathbf{S}^7 := \mathbb{O}_1 = \{o \in \mathbb{C} \Big| |o| = 1\},$$

то есть все рассматриваемые нами нечётномерные, кроме $\mathbf{S}^5$.

В этот список, конечно, просится и

$$\mathbf{S}^0 := \mathbb{R}_1 = \{x \in \mathbb{C} \Big| |x| = 1\},$$

но мы не включили эту интересную размерность вида $2^k - 1$ в наш курс.

4.2. Кватернионное расслоение Хопфа. Тут мы снова, как и в предыдущем разделе, забегаем в семимерное будущее.

Мы определяли четырёхмерную сферу как проективную кватернионную прямую, то есть как образ проекции

$$\big(\mathbb{H} \times \mathbb{H}\big) \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \frac{\big(\mathbb{H} \times \mathbb{H}\big) \setminus \{(0,0)\}}{\mathbb{H}^\times} \simeq \mathbf{S}^4.$$

Опираясь на рассмотрения предыдущего раздела, мы можем определить ту же структуру экономнее:

$$\mathbb{O} \setminus \{0\} \longrightarrow \frac{\mathbb{O} \setminus \{0\}}{\mathbb{H}^\times} \simeq \mathbf{S}^4$$

и ограничить её на сферу $\mathbb{O}_1$, получив компактную версию предыдущего расслоения

$$\mathbb{O}_1 \longrightarrow \frac{\mathbb{O}_1}{\mathbb{H}_1} \simeq \mathbf{S}^4$$

Это и есть *кватернионное расслоение Хопфа*. Его, как и его комплексный аналог, можно представить представить в "чисто сферическом" виде

$$\mathbf{S}^7 \longrightarrow \frac{\mathbf{S}^7}{\mathbf{S}^3} \simeq \mathbf{S}^4.$$

Оказалось, что *семимерную сферу можно представить в виде объединения непересекающихся трёхмерных сфер, параметризованных четырёхмерной сферой.*

Читателям, освоившим геометрию обычного расслоения Хопфа $\mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^2$, может оказаться полезным продумать аналогичные свойства расслоения $\mathbf{S}^7 \to \mathbf{S}^4$. Например, научиться работать с *basic instanton* – см. [**Atiyah1984**].

В этом разделе не было ни трудных определений, ни глубоких теорем – мы просто учились с разных сторон смотреть на интересные объекты, связанные со сферами. Тем не менее, аналогично случаю расслоения $\mathbf{S}^3 \to \mathbf{S}^2$, наличие расслоения $\mathbf{S}^7 \to \mathbf{S}^4$ помогает понять нетривиальное равенство

$$\pi_7(\mathbf{S}^4) \simeq \mathbb{Z}.$$

4.3. Почти комплексная структура. Её на четырёхмерной сфере <u>нет</u>; в наших обозначениях это записывается в виде

$$\mathsf{AlmCompl}\big(\mathbf{S}^4\big) = \varnothing.$$

Можно переформулировать это следующим образом: *Структурная группа* $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ *касательного расслоения* $\mathrm{T}\mathbf{S}^4 \to \mathbf{S}^4$ *не редуцируема к* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Такого рода факты устанавливаются с помощь *характеристических классов* расслоений, которые можно освоить либо по классическому учебнику [**МилнорСташеф1979**], либо по многочисленным более свежим источникам, в том числе доступным в Интернете.

В данном случае из наличия почти комплексной структуры на $\mathbf{S}^4$ следовало бы равенство

$$-\mathrm{p}_1(\mathrm{T}\mathbf{S}^4) = 2\mathrm{e}(\mathrm{T}\mathbf{S}^4),$$

где p_1 – первый класс Понтрягина, а e – эйлеров класс. Однако все классы Понтрягина сфер тривиальны, а эйлерова характеристика чётномерных сфер равна 2.

4.4. Комплексная и алгебраическая структуры. Их на четырёхмерной сфере тоже <u>нет</u> – это очевидным образом следует из предыдущего раздела. В наших обозначениях это записывается в виде

$$\mathsf{Compl}\big(\mathbf{S}^4\big) = \mathsf{Alg}\big(\mathbf{S}^4\big) = \varnothing.$$

У начинающего может создаться впечатление, что, в отличие от своих чётномерных соседок –уже обсуждённой $\mathbf{S}^2$ и предстоящей вскоре $\mathbf{S}^6$ –, сфера $\mathbf{S}^4$ никак не связана с комплексным анализом. Это впечатление глубоко ошибочно, см. следующий раздел.

4.5. Немного о твисторах. Они были введены в математику в [**Penrose1967**] из глубоких физических соображений, которые мы не будем пытаться воспроизвести. Вместо этого кратко опишем конструкцию Пенроуза, связывающую 4-мерную риманову геометрию с 3-мерными комплексно-аналитическими объектами.

Пусть $\mathbf{M}$ – 4-мерное риманово многообразие. Тогда для любой точки $P \in \mathbf{M}$ касательное пространство $\mathrm{T}_P\mathbf{M}$ снабжено нормой $|| \ || : \mathrm{T}_P\mathbf{M} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, и можно рассмотреть множество комплексных структур на $\mathrm{T}_P\mathbf{M}$, совместимых с этой нормой:

$$\mathrm{CS}_P := \{J \in \mathrm{End}\big(\mathrm{T}_P\mathbf{M}\big) \mid$$
$$\forall \partial \in \mathrm{T}_P\mathbf{M}, ||J(\partial)|| = ||\partial|| \text{ и } J^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{T}_P\mathbf{M}}\}.$$

Тогда можно проверить, что имеет место изоморфизм однородных $\mathsf{SO}_4(\mathbb{R})$-пространств

$$\mathrm{CS}_P \simeq \mathbf{P}_1(\mathbb{C})$$

и что в объединении двумерных сфер, называемом *пространством твисторов* риманова многообразия $\mathbf{M}$

$$\mathrm{Twist}(\mathbf{M}) := \coprod_{P \in \mathbf{M}} \mathrm{CS}_P$$

имеется не только естественная топология, но и *тавтологическая* почти комплексная структура. Проекция

$$\mathsf{pen} : \mathrm{Twist}(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathbf{M},$$

называемая *преобразованием Пенроуза*, связывает четырёхмерные римановы многообразия с шестимерными почти комплексными.

Некоторые свойства метрик формулируются в почти комплексных терминах. Так, интересующая физиков *автодуальность*, связанная с уравнениями *Общей Теории Относительности* Эйнштейна, равносильна *интегрируемости* соответствующей почти комплексной структуры.

Круглая метрика на $\mathbf{S}^4$ автодуальна, и соответствующая диаграмма мировых констант нами уже по существу освоена:

$$\begin{tikzcd} & \big(\mathbb{T} \simeq \mathbb{C}^4 \simeq \mathbb{H}^2\big) \setminus \{\vec{0}\} \arrow[dl, "/\mathbb{C}^\times"'] \arrow[dr, "/\mathbb{H}^\times"] & \\ \mathbf{P}_3(\mathbb{C}) \arrow[rr, "\mathsf{pen}"] & & \mathbf{S}^4 \end{tikzcd}$$

4.6. Гладкие структуры на $\mathbf{S}^4$. Наличие стандартной сферы гарантирует

$$\mathsf{Smooth}(\mathbf{S}^4) \neq \varnothing.$$

Другие структуры назывались бы *экзотическими*. Их наличие – ОТКРЫТЫЙ ВОПРОС (август 2021),

$$\boxed{\#\mathsf{Smooth}(\mathbf{S}^4) \overset{?}{>} 1}$$

При его продумывании полезно учесть наличие *континуума экзотических гладких структур на* $\mathbb{R}^4$, обнаруженных в [**Taubes1987**]. Размерность $n = 4$ – единственная, при которой на $\mathbb{R}^n$ имеется <u>хотя бы одна</u> экзотическая гладкая структура. Разумеется, всё это имеет отношение к нашим сюжетам только при интерпретации $\mathbf{S}^n \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{\infty\}$.

Экзотические $\mathbb{R}^4$ подразделяются на *малые*, гладко вкладываемые в обычное $\mathbb{R}^4$, и *большие*, все остальные. Среди больших есть <u>наибольшая</u>, содержащая все большие, см. [**FreedmanTaylor1986**].

4.7. Гипотеза Пуанкаре для $\mathbf{S}^4$. Так называется четырёхмерный аналог исходной гипотезы Пуанкаре.

В наших обозначениях речь идёт о множестве $\mathsf{Top}^+\big(\mathbf{S}^3\big)$, где, как и в 3.7, под $\mathbf{S}^4$ подразумевается *гомотопический тип* четырёхмерной сферы.

Эта гипотеза превратилась в теорему ([**Freedman1982**]) <u>через</u> 21 год <u>после</u> того, как была установлена для $\mathbf{S}^{\geq 5}$ ([**Smale1961**], об этом ниже) и, как мы знаем, <u>за</u> 30 лет <u>до</u> того, как Перельман доказал её для $\mathbf{S}^3$.

Поупражняемся в переформулировках:

$$\#\big(\mathsf{Top}^+(\mathbf{S}^4)\big) = 1,$$

сфера $\mathbf{S}^4$ *топологически жестка.*

5. Что бы рассказать про $\mathbf{S}^5$?

В отличие от своих соседей в ряду $\mathbf{S}^{1,2,\dots 5=,7}$, пятимерная сфера не обладает бросающимися в глаза свойствами. Тем не менее, упомянем некоторые моменты.

5.0. $\mathbf{S}^5$ и физика. В современной физике есть небольшое

количество фундаментальных теорий, каждая из которых с замечательной точностью описывает класс явлений, которому она посвящена. Совокупность этих явлений покрывает всё, что человечество умеет наблюдать; проблема, однако, заключается в том, что эти теории не хотят складываться в одну общую.

Число

$$5 = 1 + 4$$

является суммой размерностей, характерных для двух из упомянутых фундаментальных теорий: 1 – для *электромагнетизма*, 4 – для *Общей Теории Относительности.* Попытки соединить их в одну предпринимались начиная с [**Kaluza1921**] и [**Klein1926**]; современный обзор см., например, в [**Patricio2013**].

Для математиков, не занимающихся физикой, тексты такого рода – это что-то вроде *теорем существования* математических теорий, имеющих физический смысл. Что-то в этих гипотетических теориях происходит на пятимерной сфере; так, судя по фрагменту аннотации наугад выбранной работы [**KQZ2013**]

...the partition function of a twisted supersymmetric Yang-Mills theory with matter on the $\mathbf{S}^5$

материя лежит именно на ней.

Если понять, что в этой теории происходит, то несомненно обнаружатся её связи с интересной математикой; так, в её *лагранжиан* (полностью осознать который математик без общирных специальных знаний вряд ли сможет) входит *интегральная логарифмическая функция* $\mathrm{Li}_{2,3}(x)$ и замечательная константа, *сумма обратных кубов* $\zeta(3)$.

5.1. Алгоритмическая (не)распознаваемость сферы $\mathbf{S}^5$. Для постановки проблемы алгоритмического распознавания гомеоморфности двух пространств

$$\mathbf{X} \overset{?}{\simeq} \mathbf{Y}$$

эти пространства должны быть определены каким-либо финитным способом, например, *триангуляцией*, то есть *кусочно-линейной*, или PL-структурой. До сих пор мы к этим структурам не обращались, поскольку в размерностях ≤ 4 согласно [**Cairns1961**] различия между гладкими и PL-структурами нет.

Сейчас, не вдаваясь в детали, мы ограничимся PL-структурами, поскольку для них проблемы алгоритмической распознаваемости и, в частности, проблему

$$\mathbf{X} \overset{?}{\simeq} \mathbf{S}^5$$

легко сформулировать точно.

Имеет место следующий результат – см. [**JoLoLuTs2019**].

Для данного d-мерного конечного симплициального комплекса проблема его гомеоморфности сфере $\mathbf{S}^d$ алгоритмически неразрешима при $d \geq 5$.

Авторы ссылаются на неопубликованные работы С.П. Новикова 1960-х годов.

5.2. Проблема Пуанкаре. Ограничимся повторением сформулированного выше результата ([**Smale1961**])

Сферы $\mathbf{S}^d$ *при* $d \geq 5$ *топологически жестки.*

Повторим также основные события решения человечеством проблемы Пуанкаре. Хронология своеобразна: решение заняло примерно век, разбитый примерно на полвека и примерно на двадцать и тридцать лет.

1904: Пуанкаре уточняет свою проблему для $\mathbf{S}^3$.
1904–1961: Проблема Пуанкаре ставится для произвольных размерностей. При попытках её решения тестируются разнообразные методы гомотопической, алгебраической и дифференциальной геометрий, бурно развившихся за этот период.
1961: Смейл решает проблему Пуанкаре для $\mathbf{S}^d$ для $d \geq 5$.
1982: Фридман решает проблему Пуанкаре для $\mathbf{S}^4$.
2003: Перельман решает проблему Пуанкаре для $\mathbf{S}^3$.

Как это часто случается в математике, при формальном перечислении престижных результатов в стороне остаются глубокие идеи, на которых основаны доказательства; в данном случае это – *перестройки Уитни, геометризация Терстона, потоки Риччи-Гамильтона* и проч.

6. $\mathbf{S}^6$ и проблема Хопфа

6.0. Почему $\mathbf{S}^6$ – не алгебраическое многообразие. Есть довольно много причин того, что комплексное трёхмерное алгебраическое многообразие не может иметь топологическую структуру шестимерной сферы. Укажем одну из них, близкую к тому, что вскоре будем обсуждать.

Вопрос об алгебраичности может быть поставлен только в случае, если на сфере $\mathbf{S}^6$ обнаружится *комплексно-аналитическая* структура; как мы скоро увидим, несмотря на некоторое количество публикаций, этот вопрос ОТКРЫТ.

Если, однако, такая структура всё-таки обнаружится, то обозначим вслед за авторами [**LehnRollenskeSchinko2019**] соответствующее компактное комплексное многообразие $\mathbb{S}^6$; возникает поле $\mathrm{Mer}(\mathbb{S}^6)$ *мероморфных функций* на нём. Важным инвариантом (компактного) комплексного многообразия является *степень трансцендентности* над $\mathbb{C}$ поля мероморфных функций на нём, в обсуждаемом (гипотетическом!) случае

$$\mathfrak{a}\big(\mathbb{S}^6\big) := \operatorname{degtr}_{\mathbb{C}}\Big(\operatorname{Mer}\big(\mathbb{S}^6\big)\Big).$$

Если бы многообразие $\mathbb{S}^6$ существовало и было бы алгебраично, то имело бы место[15] равенство $\mathfrak{a}\big(\mathbb{S}^6\big) = 3$. Но в работе [**LehnRollenskeSchinko2019**], однако, показано, что $\mathfrak{a}\big(\mathbb{S}^6\big) = 0$.

Таким образом,

$$\mathsf{Alg}\big(\mathbb{S}^6\big) = \varnothing$$

6.1. Почти комплексная структура на $\mathbf{S}^6$. Введем пространство *мнимых октонионов*

$$\operatorname{Im}(\mathbb{O}) := \{o \in \mathbb{O} \mid \overline{o} = o\}$$

и рассмотрим шестимерную сферу как множество мнимых октонионов единичной нормы

$$\mathbf{S}^6 := \{o \in \operatorname{Im}(\mathbb{O}) \Big| |o| = 1\}.$$

Тогда, как и в школьной стереометрии, касательное пространство к точке сферы $o \in \mathbf{S}^6$ можно определить как

$$\mathrm{T}_o\mathbf{S}^6 := \{\partial \in \operatorname{Im}(\mathbb{O}) \mid \partial \perp o\}.$$

Можно проверить, что эндоморфизм

$$\mathbf{J} : \mathrm{T}_o\mathbf{S}^6 \longrightarrow \mathrm{T}_o\mathbf{S}^6 : \partial \mapsto o \cdot \partial$$

задаёт почти комплексную структуру на $\mathbf{S}^6$, называемую *стандартной.*

Есть и другие; в работе [**GraFerMil2021**] описано семейство почти комплексных структур на $\mathbf{S}^6$, параметризованное $\mathbf{P}_7(\mathbb{R})$.

Итак,

$$\mathsf{AlmCompl}\big(\mathbf{S}^6\big) \text{ бесконечно.}$$

Современные сведения об этом множестве заведомо неполны, поскольку неизвестно, существуют ли с нём *интегрируемые* элементы (см. следующий раздел).

---

[15]На алгебраическом многообразии $\mathbf{X}$ *все мероморфные функции рациональны*, то есть имеет место равенство $\operatorname{Mer}(\mathbf{X}) = \mathbb{C}(\mathbf{X})$, так что по определению $\mathfrak{a}(\mathbf{X}) = \dim(\mathbf{X})$. Существуют, однако, и <u>не</u>алгебраические компактные комплексные многообразия, так называемые *пространства Мойшезона*, для которых $\mathfrak{a}(\mathbf{X}) = \dim(\mathbf{X})$.

Неинтегрируемость стандартной почти комлексной структуры на $\mathbf{S}^6$ была установлена в [**EhresmannLibermann1951**].

6.2. Комплексная структура на $\mathbf{S}^6$. Проблема её существования, в наших обозначениях

$$\boxed{\mathsf{Compl}(\mathbf{S}^6) \overset{?}{\simeq} \varnothing}$$

называется *проблемой Хопфа.* Ей интересовались многие крупные математики второй половины 20-века.

Статус этой проблемы довольно своеобразен. В последние годы появились две работы одного и того же автора, венгерского математика Габора Этези, в которых по видимости предъявляется обсуждаемая структура.

Работа [**Etesi2015**] существенно использует физические понятия и трудна для понимания "чистыми" математиками. Наоборот, в работе [**Etesi2017**] комплексная структура предъявляется в явном виде с помощью вложения

$$\mathbf{S}^6 \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{O}) =: \mathsf{G}_2$$

в 14-мерную <u>компактную</u> группу Ли[16]. Это вложение не является принципиально новым: изоморфизм $\pi_6(\mathsf{G}_2) \simeq \mathsf{C}_3$ был хорошо известен, и Этези предложил его реализацию. На группе G_2, как на всякой компактной чётномерной, имеется <u>комплексная</u> структура; Этези рассмотрел её ограничение на образ шестимерной сферы.

Проверка того, что индуцированная структура на $\mathbf{S}^6$ является комплексной – сомнительное место[17] в работе [**Etesi2017**]. В ней указывается чрезвычайная громоздкость вычислений (их предлагается вести в вещественных координатах), и детали не приводятся, а предлагается лишь *алгоритм* проверки.

Сомнения в утверждениях Этези усугубляются тем, что два великих математика в возрасте около 90 лет опубликовали препринты [**Chern2003**] и [**Atiyah2016**], в которых утверждается

---

[16] *исключительную* и имеющую наименьшую размерность среди исключительных.

[17] Я благодарен В. Клепцыну, сообщившему мне о скепсисе сообщества по поводу утверждений Этези и о специальных мероприятиях, посвящённых критическому анализу его работ.

невозможность обсуждаемой структуры.

Сложившуюся ситуацию следует признать скандальной: в течение довольно многих лет среди математиков нет согласия по поводу совершенно конкретного вопроса. Смею надеяться. что следующее поколение внесёт ясность.

6.3. Гладкая структура на $\mathbf{S}^6$. Только стандартная, см. [**KervaireMilnor1963**]. В наших обозначениях

$$\#\Big(\mathsf{Smooth}\big(\mathbf{S}^6\big)\Big) = 1.$$

6.4. Проблема Пуанкаре для $\mathbf{S}^6$. Как уже говорилось, была решена ещё до размерностей 4 и 3, см. [**Smale1961**]. В наших обозначениях

$$\#\Big(\mathsf{Top}^+\big(\mathbf{S}^6\big)\Big) = 1,$$

сфера $\mathbf{S}^6$ топологически жестка.

7. $\mathbf{S}^7$ и сферы Милнора

Работа [**Milnor1956**] была посвящена близким родственникам многообразий, о которых мы немного поговорили, – обобщённым *кватернионным многообразиям Хопфа*. Милнор рассмотрел расслоения над $\mathbf{S}^4$ со слоем $\mathbf{S}^3$, среди которых[18] встречается и стандартная семимерная сфера, и её экзотические сёстры. Диффеоморфность многообразий сферам устанавливается с помощью *теории Морса*: на них строятся гладкие вещественнозначные функции всего с двумя критическими значениями.

Более современное изложение теории читатель может найти, например, в [**CrowleyEscher2003**].

Завершим эти лекции парой слов об *алгебро-геометрическом* методе построения экзотических нечётно-мерных вещественных многообразий. Пусть $F \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ – такой ненулевой многочлен

[18]Для имеющих представление о *главных расслоения,* в данном случае со *структурной группой* $\mathsf{SO}_4(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_1$ действующей на слоях кватернионным умножением слева и справа, то есть по формуле $(q_1, q_2) \cdot x := q_1 x q_2$. Расслоения, рассматриваемые Милнором, классифицируются элементами гомотопической группы $\pi_4\big(\mathsf{SO}_4(\mathbb{R})\big) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

с комплексными коэффициентами, что аффинное многообразие, заданное уравнением $F = 0$, имеет *изолированную особенность* в точке $z_1 = \cdots = z_n = 0$ (для этого достаточно, чтобы свободный член и линейные члены многочлена равнялись нулю). Тогда при достаточно малом вещественном $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ вещественное $(2n-1)$-мерное многообразие гладко и не зависит от ε. Среди таких многообразий встречаются и экзотические сферы Милнора, см. [**Hirzebruch1966**].

Заключение

Структуры на сферах, о которых мы говорили, собраны в таблицу[19] Советую молодым математикам обратить особое внимание на вопросительные знаки!

	Alg	Compl	AlmCompl	Smooth	Top$^+$	Hot
$\mathbf{S}^1$				$\exists!$	$\exists!$	$\exists!$
$\mathbf{S}^2$	$\exists!$	$\exists!$	$\exists!$	$\exists!$	$\exists!$	$\exists!$
$\mathbf{S}^3$				$\exists!$	$\exists!$	$\exists!!$
$\mathbf{S}^4$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\exists???$	$\exists!$	$\exists!$
$\mathbf{S}^5$				$\exists!$	$\exists!$	$\exists!$
$\mathbf{S}^6$	$\nexists$	???	$\exists?$	$\exists!$	$\exists!$	$\exists!$
$\mathbf{S}^7$				$\exists 28$	$\exists!$	$\exists!!$

Список литературы

[**Alexander1922**] J. W. Alexander, *A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem.* Trans. AMS, vol. 23 (1922), pp. 333-349.

[**Alexander1924**] J. W. Alexander, *An Example of a Simply Connected Surface Bounding a Region which is not Simply Connected.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, National Academy of Sciences, 10 (1): 8–10.

[**Atiyah1984**] M. F. Atiyah, *Instantons in two and four dimensions.* Comm. Math. Phys. 93(4): 437-451 (1984).

[**Atiyah2016**] M. F. Atiyah, *The Non-Existent Complex 6-Sphere.* 2016. https://arxiv.org/abs/1610. 09366.

[**BottMilnor1958**] R. Bott, J. Milnor, *On the parallelizability of the spheres.* Bull. Amer. Math. Soc. 64(3.P1): 87-89 (May 1958).

[**Bowen1979**] R. Bowen, *Hausdorff dimension of quasi-circles.* Publications Mathématiques de l'IHÉS, Tome 50 (1979) , pp. 11-25.

[19] Хоть в ней и используются не вполне стандартные знаки и обозначения, о большинстве читатель догадается. Сочетание $\exists 28$ означает, что есть ровно 28 сфер Милнора – это один из многих фактов, мимо которых мы прошли.

[Cairns1951] Cairns, Stewart S, *An Elementary Proof of the Jordan-Schoenflies Theorem.* Proceedings of the American Mathematical Society, 2 (6): 860–867.

[Cairns1961] Cairns, Stewart S, *A simple triangulation method for smooth manifolds.* Bull. Am. Math. Soc. 67, 389-390 (1961).

[Chern2003] S.-S. Chern, *On the non-existence of a complex structure on the six-sphere.* Preprint (multiple versions privately circulated; quoted with permission), 2003.

[CrowleyEscher2003] Diarmuid Crowley, Christine Escher, *A classification of* $\mathbf{S^3}$*-bundles over* $\mathbf{S^4}$. Differential Geometry and its Applications, Volume 18, Issue 3, May 2003, Pages 363-380.

[EhresmannLibermann1951] Charles Ehresmann and Paulette Libermann, *Sur les structures presque hermitiennes isotropes.* C. R. Acad. Sci. Paris, 232:1281–1283, 1951.

[Etesi2015] Gábor Etesi, *Complex structure on the six dimensional sphere from a spontaneous symmetry breaking.* Journ.Math. Phys. 56, 043508-1-043508-22 (2015), Erratum: Journ.Math. Phys. 56, 099901- 1 (2015).

[Etesi2017] Gábor Etesi, *Explicit construction of the complex structure on the six dimensional sphere.* arXiv:1509.02300v3

[Freedman1982] Michael H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds.* Journal of Differential Geometry. 17 (3): 357–453.

[FreedmanTaylor1986] Michael H. Freedman, Laurence R. Taylor, *A universal smoothing of four-space.* Journal of Differential Geometry, 1986, 24 (1): 69–78.

[Frobenius1878] Ferdinand Georg Frobenius, *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 84(1878):1–63.

[Garwood2010] Christine Garwood, *Flat Earth: The History of an Infamous Idea.* Pan Macmillan, 2010.

[GraFerMil2021] Gustavo Granja, Bora Ferlengez and Aleksandar Milivojevic, *On the topology of the space of almost complex structures on the six sphere* $\mathbf{S}^6$. To appear in New York Journal of Mathematics.

[Graves1845] John T. Graves, *On a Connection between the General Theory of Normal Couples and the Theory of Complete Quadratic Functions of Two Variables.* Phil. Mag., 26 (1845): 315–32.

[Hamilton1843] William Rowan Hamilton, *On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra.* Letter to John T. Graves. 17 October 1843.

[Hamilton1982] Richard Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature.* J. Diff. Geo., 17:255–306, 1982.

[Hirzebruch1966] F. Hirzebruch, *Singularities and exotic spheres.* Seminaire Bourbaki, 1966/67, No. 314.

[Hubbard2012] John Hubbard, *Matings and the other side of the dictionary.* Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques, Série 6, Tome 21 (2012) no. S5, pp. 1139-1147.

[Hurwitz1923] Adolf Hurwitz, *Über die Komposition der quadratischen Formen.* Math. Ann. 1923, 88 (1–2): 1–25.

[Jacobi1839] C.G.J. Jacobi, *Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen*

Substitution". Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1839 (19): 309–313.

[JoLoLuTs2019] Michael Joswig, Davide Lofano, Frank H. Lutz, Mimi Tsuruga, *Frontiers of sphere recognition in practice*. arXiv:1405.3848v3 [math.GT].

[Kaluza1921] T. Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik,* Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. K1 (1921) 966.

[KervaireMilnor1963] Michel A. Kervaire; John W. Milnor, *Groups of Homotopy Spheres: I.* The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 77, No. 3. (May, 1963), pp. 504-537.

[Klein1926] O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie,* Zeits. Phys. 37 (1926) 895.

[KQZ2013] Johan Källéna, Jian Qiub and Maxim Zabzinea, *The perturbative partition function of supersymmetric 5D Yang-Mills theory with matter on the five-sphere*. arXiv2013.

[Legendre1806] Adrien-Marie Legendre, *Analyse des triangles tracées sur la surface d'un sphéroide*. Mémoires de l'Institut National de France (1st semester): 130–161.

[LehnRollenskeSchinko2019] Christian Lehn, Sönke Rollenske, Caren Schinko, *The complex geometry of a hypothetical complex structure on* $\mathbf{S}^6$. arXiv:1912.09719v1(2019).

[Maehara1984] Ryuji Maehara, *The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem*. Volume 91, 1984, pp. 641-643.

[Milnor1956] J.W. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*. Annals of Mathematics, 64 (2): 399–405.

[Milnor2006] J.W. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*. of Mathematics Studies. 160 (Third ed.). Princeton University Press; first appeared in as a "Stony Brook IMS Preprint available as "arXiV:math.DS/9201272".

[Moise1977] Edwin E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. New York : Springer-Verlag, 1977.

[MorganTian2007] Morgan, John W.; Tian, Gang, *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture*. Clay Mathematics Monographs. 3. Providence, RI: American Mathematical Society, 2007.

[Papadopoulos2020] Athanase Papadopoulos, *Map drawing and foliations of the sphere*. arXiv:2009.01348v1.

[Patricio2013] André Morgado Patricio, *5D Kaluza-Klein theories – a brief review.* Preprint 2013.

[Penrose1967] R. Penrose, *Twistor Algebra*. Journal of Mathematical Physics. 8 (2): 345–366.

[Perelman2002] Grisha Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. arXiv:math.DG/0211159 v1, 11 November 2002.

[Perelman2003] Grisha Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds.* arXiv:math.DG/0303109 v1, 10 March 2003.

[Perelman2003a] Grisha Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds.* arXiv:math.DG/0307245, 17 July 2003.

[Poincare1900] Henri Poincaré, *Second complément à l'analysis situs.* Proc. London Math. Soc. 32 (1900), 277–308.

[Poincare1904] Henri Poincaré, *Cinquième complément àl'analysis situs.* Rend. Circ. Mat. Palermo 18 (1904), 45–110.

[Rado1925] T. Rado, *Über den Begriff der Riemannschen Fläche.* Acta Litt. Scient. Univ. Szegd 2, pp. 101-121.

[Samelson1953] H. Samelson, *A class of complex-analytic manifolds.* Portugalie Math. 12, 129-132 (1953).

[Smale1961] Stephen Smale, *Generalized Poincare's Conjecture in Dimensions Greater Than Four.* Annals of Mathematics Second Series, Vol. 74, No. 2 (Sep., 1961), pp. 391-406

[Taubes1987] C. H. Taubes, *Gauge theory of asymptotically periodic 4-manifolds.* J. Diff. Geom. —1987.—V. 25.—P. 363—430.

[Thurston1982] W. P. Thurston, *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 6 (1982), 357–381.

[Альфорс1966] Ларс Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям.* М., "Мир", 1969.

[МилнорСташеф1979] Дж. Милнор, Дж. Сташеф, *Характеристические классы.* М., "Мир", 1979.

[ОстрикЦфасман2011] В. В. Острик, М. А. Цфасман, *Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые.* Издательство МЦНМО, 2011.

[Смирнов2003] С. Г. Смирнов, *Прогулки по замкнутым поверхностям.* М., Издательство МЦНМО, 2003.

[Фукс1990] Д.Б. Фукс, *Рогатая сфера Александера.* Квант. — 1990. — № 6. — С. 2—7.

[Хатчер2011] Хатчер, *Алгебраическая топология.* МЦНМО ,2011.

[Энгельс1878] Ф. Энгельс, *Анти-Дюринг.* Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения. Т. 14. — М. — Л.: Соцэкгиз, 1931.