

# Плоские разбиения и формула Макмагона

Е. Ю. Смирнов

АННОТАЦИЯ. Записки лекций, прочитанных на XX Летней школе «Современная математика» имени Виталия Арнольда, Дубна, 25–29 июля 2021 г.

## 1. ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ. ФОРМУЛА МАКМАГОНА

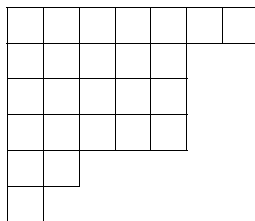
**1.1. Разбиения и диаграммы Юнга.** Разбиением натурального числа будем называть его представление в виде суммы натуральных слагаемых. При этом порядок слагаемых неважен: так, например,  $2 + 3$  и  $3 + 2$  — это одно и то же разбиение числа 5. Поэтому эти слагаемые можно считать нестрого убывающими. Вот формальное определение:

**Определение 1.1.** *Разбиением* натурального числа  $n$  называется набор натуральных чисел  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , для которого  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$  и  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$ .

Иногда удобно считать, что разбиение — это невозрастающая последовательность целых неотрицательных чисел  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots)$ , в которой все  $\lambda_i$  начиная с некоторого номера равны нулю. Другими словами, к конечному набору  $\lambda_i$  дописывается бесконечный «хвост» нулей.

Разбиение можно представлять графически при помощи *диаграмм Юнга*. Диаграммой Юнга разбиения  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  называется подмножество четвертого<sup>1</sup> квадранта плоскости, состоящее из единичных квадратиков. Квадратики размещаются в последовательных строках, выровненных по левому краю, причем количество квадратиков в  $i$ -той строке равно  $\lambda_i$  (таким образом, длина каждой следующей строки не превышает длины предыдущей).

**Пример 1.2.** На рисунке ниже изображена диаграмма Юнга, соответствующая разбиению  $(7, 5, 5, 5, 2, 1)$  числа 25.



---

*Date:* 10 августа 2021 г.

<sup>1</sup>это так называемый *англосаксонский способ* изображения диаграмм Юнга; альтернативой является *французский способ*, при котором диаграмма изображается в первом квадранте плоскости. Стоит также упомянуть и *русский способ*, при котором диаграмма поворачивается ещё на 45 градусов, оказываясь в четверти плоскости, ограниченной графиком функции  $y = |x|$ . При этом «внешняя граница» диаграммы Юнга становится графиком кусочно-линейной функции  $y = f(x)$ . Такое представление оказывается удобным, например, во многих асимптотических задачах, т.е. задачах, связанных с предельными формами диаграмм Юнга (подробнее об этом см., например, [3]).

**1.2. Плоские разбиения.** Сейчас мы рассмотрим обобщение этого понятия на следующую размерность — а именно, займемся изучением *плоских разбиений*, компоненты которых занумерованы не одним индексом, а двумя, и которым будут соответствовать *трехмерные диаграммы Юнга*.

**Определение 1.3.** Пусть  $n$  — целое неотрицательное число. *Плоское разбиение* — это набор целых неотрицательных чисел  $\lambda_{i,j}$ , где  $i, j \geq 1$ , в сумме дающих  $n$  (т.е.  $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} = n$ ) и удовлетворяющих неравенствам  $\lambda_{i,j} \geq \lambda_{i+1,j}$  и  $\lambda_{i,j} \geq \lambda_{i,j+1}$  при всех  $i, j$ .

Иначе говоря, плоское разбиение — это набор чисел, записанных в клетках бесконечной вправо и вниз таблицы, причем эти числа нестрого убывают по строкам и по столбцам, и лишь конечное их число отлично от нуля.

Каждому плоскому разбиению можно сопоставить *трехмерную диаграмму Юнга*. Для этого заменим каждое число на плоскости на столбец из кубиков, высота которого равна этому числу. Полученная трехмерная конструкция из кубиков и будет трехмерной диаграммой Юнга.

**Пример 1.4.** На рисунке 1.1 изображено одно из плоских разбиений числа 12 и отвечающая ему трехмерная диаграмма Юнга.

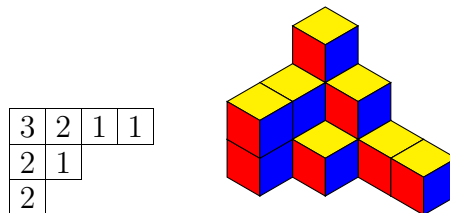
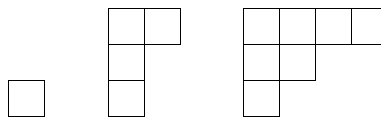


Рис. 1.1. Плоское разбиение и его трехмерная диаграмма Юнга

Плоское разбиение можно рассматривать как набор нескольких вложенных друг в друга диаграмм Юнга  $\mu_1 \subseteq \mu_2 \subseteq \dots \subseteq \mu_k$ . Пусть диаграмма  $\mu_m$  состоит из всех таких клеток  $(i, j)$ , что  $\lambda_{11} - \lambda_{i,j} \leq m - 1$ . Получается, что  $\mu_m$  будет составлять  $m$ -тый «этаж» соответствующей трехмерной диаграммы Юнга (если считать этажи сверху вниз).

**Пример 1.5.** Для плоского разбиения из предыдущего примера получаем последовательность диаграмм



Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы вычислить количество трехмерных диаграмм Юнга, лежащих внутри прямоугольного параллелепипеда  $B(a, b, c)$  (то есть длина, ширина и высота которых не превосходят  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно), а также производящую функцию для числа таких диаграмм. Перейдя к пределу при  $a, b, c \rightarrow \infty$ , мы получим аналог производящей функции Эйлера для числа всех трехмерных диаграмм Юнга (этот результат был получен в начале XX в. майором британской армии в отставке Перси Александром Макмагоном).

**1.3. Подсчет числа плоских диаграмм высоты 2.** Начнем с простого случая: посчитаем количество трехмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде размера  $B(a, b, 2)$ . Это эквивалентно подсчету числа пар  $(\mu_1, \mu_2)$  диаграмм Юнга, удовлетворяющих условию  $\mu_1 \subseteq \mu_2 \subseteq (a \times b)$ .

Диаграмму Юнга в прямоугольнике  $a \times b$  можно интерпретировать как путь на решетке, идущий из точки  $A_1 = (0, a)$  в точку  $B_1 = (b, 0)$  (условимся, что ось ординат на нашей решетке направлена вниз). Таким образом, пара вложенных диаграмм — это пара путей из  $A_1$  в  $B_1$ , один из которых проходит не выше другого.

Из этой пары путей можно изготовить два непересекающихся пути: сдвинем нижний путь на вектор  $(1, 1)$ . Мы получим новый путь из точки  $A_2 = (1, a + 1)$  в точку  $B_2 = (b + 1, 1)$ , который уже не будет пересекаться с верхним путем (см. рис. 1.2).

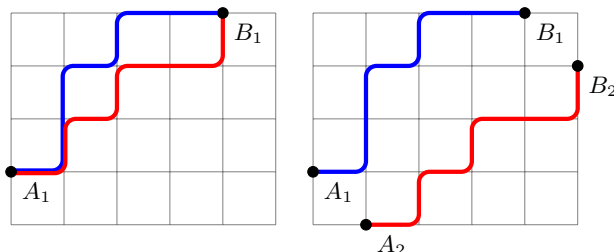


Рис. 1.2. Раздвигание путей

Итак, число трехмерных диаграмм Юнга высоты не более 2 равно числу пар непересекающихся путей, которое мы обозначим через  $P_{nc}(A_1 \rightarrow B_1, A_2 \rightarrow B_2)$ . (символы “nc” означают “non-crossing”, т.е. «непересекающиеся»).

Нетрудно найти число пар всевозможных путей, соединяющих  $A_1$  с  $B_1$ , а  $A_2$  с  $B_2$ : оно равняется  $P(A_1 \rightarrow B_1) \cdot P(A_2 \rightarrow B_2)$ , то есть  $\binom{a+b}{b}^2$ . Таким образом, наша задача эквивалентна задаче о нахождении числа пар *пересекающихся* путей из  $A_1$  в  $B_1$  и из  $A_2$  в  $B_2$ .

Итак, пусть  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — два пересекающихся пути на решетке, первый из которых соединяет  $A_1$  с  $B_1$ , а второй —  $A_2$  с  $B_2$ . Пусть  $C$  — первая из точек пересечения этих путей. Построим новую пару путей,  $\iota(\mu_1)$  и  $\iota(\mu_2)$ , по следующему правилу:  $\iota(\mu_1)$  будет совпадать с  $\mu_1$  на отрезке от  $A_1$  до  $C$  и с  $\mu_2$  на отрезке от  $C$  до  $B_2$ . Таким образом, он будет соединять  $A_1$  с  $B_2$ . Напротив,  $\iota(\mu_2)$  будет соединять  $A_2$  и  $B_1$ ; он будет совпадать с  $\mu_2$  от  $A_2$  до  $C$  и с  $\mu_1$  от  $C$  до  $B_1$  (см. рис. 1.3).

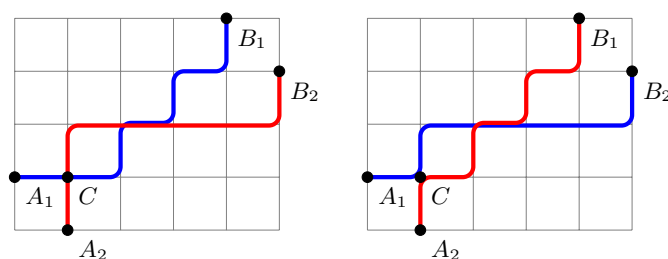


Рис. 1.3. Отображение  $\iota$  на пересекающихся путях

Легко увидеть, что всякая пара путей, соединяющих  $A_1$  с  $B_2$ , а  $A_2$  с  $B_1$ , пересекается; в частности, она получается как результат описанной выше операции, примененной к какой-то паре *пересекающихся* путей  $\mu_1: A_1 \rightarrow B_1$  и  $\mu_2: A_2 \rightarrow B_2$ . Поэтому число пар пересекающихся путей из  $A_1$  в  $B_1$  и из  $A_2$  в  $B_2$  равно числу пар *всевозможных* путей, соединяющих начальные и конечные точки в «неправильном» порядке. А оно равняется  $P(A_1 \rightarrow B_2) \cdot P(A_2 \rightarrow B_1) = \binom{a+b}{b+1} \cdot \binom{a+b}{b-1}$ .

Вычтя число пар пересекающихся путей из общего числа пар путей, получаем следующее предложение.

**Предложение 1.6.**

$$P_{nc}(A_1 \rightarrow B_1, A_2 \rightarrow B_2) = P(A_1 \rightarrow B_1)P(A_2 \rightarrow B_2) - \\ - P(A_1 \rightarrow B_2)P(A_2 \rightarrow B_1) = \begin{vmatrix} P(A_1 \rightarrow B_1) & P(A_1 \rightarrow B_2) \\ P(A_2 \rightarrow B_1) & P(A_2 \rightarrow B_2) \end{vmatrix}.$$

**Следствие 1.7.** Число трехмерных диаграмм Юнга, вписанных в параллелепипед  $B(a, b, 2)$ , равно  $\binom{a+b}{b}^2 - \binom{a+b}{b-1}\binom{a+b}{b+1}$ .

Мы видим, что искомое число пар непересекающихся путей оказалось представлено в виде определителя  $2 \times 2$ . Оказывается, для наборов из  $n$  непересекающихся путей дело обстоит аналогичным образом.

**1.4. Детерминантная формула Линдстрема–Гесселя–Вьенно.** Теперь решим исходную задачу: найдем число трехмерных диаграмм Юнга в прямоугольном параллелепипеде  $B(a, b, c)$ . Каждую такую трехмерную диаграмму можно рассматривать как последовательность из  $c$  вложенных друг в друга обычных диаграмм Юнга. Эти диаграммы, в свою очередь, соответствуют путям на решетке из точки  $A = (0, a)$  в точку  $B = (b, 0)$ . Каждый следующий из этих путей лежит нестрого ниже предыдущего. Как и в предыдущем случае, сделаем их непересекающимися: для этого сдвинем  $k$ -й путь на вектор  $(k-1, k-1)$ . При этом  $k$ -й путь будет соединять точки  $A_k = (k-1, a+k-1)$  и  $B_k = (b+k-1, k-1)$ .

Пусть  $w \in S_n$  — произвольная перестановка. Будем говорить, что набор из  $c$  путей (возможно, пересекающихся) с началами в точках  $(A_1, \dots, A_c)$  и концами в точках  $(B_1, \dots, B_c)$  отвечает перестановке  $w$ , если путь, начинающийся в точке  $A_k$ , заканчивается в точке  $B_{w(k)}$ . Ясно, что всякий набор непересекающихся путей может отвечать лишь тождественной перестановке.

Легко посчитать число всевозможных наборов путей, отвечающих перестановке  $w$ . Оно будет равно произведению биномиальных коэффициентов:

$$\prod_{k=1}^c P(A_k \rightarrow B_{\sigma(k)}) = \prod_{k=1}^c P((k-1, a+k-1) \rightarrow (b+w(k)-1, w(k)-1)) = \\ = \prod_{k=1}^c \binom{a+b}{b+w(k)-k}.$$

Теперь обобщим приём, уже применённый для случая двух путей: рассмотрим на наборах непересекающихся путей, отвечающих всевозможным перестановкам, инволюцию  $\iota$ , определенную следующим образом. Рассмотрим в наборе из пересекающихся путей  $\mu$  путь  $\mu_i$  с наименьшим номером  $i$ , пересекающийся с каким-то другим путем. Возьмём первую точку пересечения этого пути с другими путями. Из путей, пересекающих  $\mu_i$  в этой точке, возьмём путь с наименьшим номером; обозначим его через  $\mu_j$ . Заменяем участок пути  $\mu_i$ , следующий за точкой пересечения, на участок пути  $\mu_j$ , и наоборот. Получим новый набор пересекающихся путей  $\iota(\mu)$ . Он уже отвечает другой перестановке; какая именно перестановка получится, нам сейчас неважно, однако важно, что перестановки, отвечающие  $\mu$  и  $\iota(\mu)$ , имеют различную чётность. Кроме того, ясно, что это отображение инволютивно: если применить его к набору путей два раза, получится исходный набор путей.

Мы получили биекцию на множестве наборов пересекающихся путей. Она сопоставляет набору путей, отвечающих чётной перестановке, набор путей, отвечающих нечётной перестановке.

**Пример 1.8.** На рисунке 1.4 показан набор путей, к которому применяется инволюция  $\iota$  согласно указанному правилу: в точке  $(2, 2)$  — первой точке пересечения первого (синего) пути с каким-либо еще путем (в данном случае с третьим, т.е. красным) — последующие фрагменты этих путей заменяются друг на друга. Первый набор соответствует нечетной перестановке  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ , а второй — четной перестановке  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

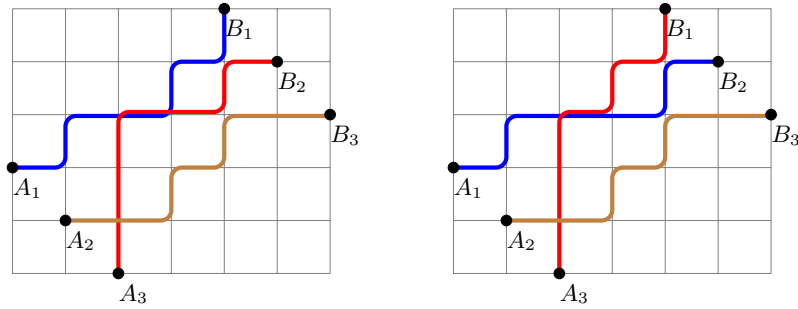


РИС. 1.4. Инволюция на множестве путей

Теперь просуммируем количество всевозможных путей, отвечающих всевозможным перестановкам  $w$ , со знаком:

$$\sum_{w \in S_n} P((A_1, \dots, A_c) \rightarrow (B_{w(1)}, \dots, B_{w(c)})) = \sum_{w \in S_n} (\text{sgn } w) \prod_{k=1}^c P(A_k \rightarrow B_{w(k)}).$$

Все слагаемые в этой сумме, отвечающие пересекающимся путям, разобьются на пары, причем в каждой паре будет одно положительное и одно отрицательное слагаемое. Поэтому суммарный вклад, который пересекающиеся пути внесут в эту сумму, будет равен нулю. Значит, эта сумма и будет равна искомому числу *непересекающихся* путей  $P_{nc}((A_1, \dots, A_c) \rightarrow (B_1, \dots, B_c))$ .

С другой стороны, в предыдущем выражении нетрудно увидеть формулу для определителя матрицы, в  $i$ -той строке и  $j$ -том столбце которой стоит число путей из точки  $A_i$  в точку  $B_j$ . Мы получили следующее равенство:

$$P_{nc}((A_1, \dots, A_c) \rightarrow (B_1, \dots, B_c)) = \det (P(A_i \rightarrow B_j))_{i,j=1}^c.$$

Подставляя в это равенство числовые значения для  $P(A_i \rightarrow B_j)$ , получаем такое предложение:

**Теорема 1.9.** Число плоских диаграмм  $\mathcal{B}(a, b, c)$  в параллелепипеде  $B(a, b, c)$  равняется определителю матрицы из биномиальных коэффициентов

$$\mathcal{B}(a, b, c) = \det \left( \binom{a+b}{b+j-i} \right)_{i,j=1}^c = \begin{vmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b}{b+1} & \cdots & \binom{a+b}{b+c-1} \\ \binom{a+b}{b-1} & \binom{a+b}{b} & \cdots & \binom{a+b}{b+c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{a+b}{b-c+1} & \binom{a+b}{b-c+2} & \cdots & \binom{a+b}{b} \end{vmatrix}.$$

Прием, использованный нами для подсчета числа непересекающихся путей на решетке, получил широкую известность благодаря работам Б. Линдстрема [9] и в особенности И. Гесселя и Кс. Вьенно [6], которые применили его к решению некоторых важных задач исчислительной комбинаторики (в частности, о плоских разбиениях). Впервые же он, по-видимому, появился в конце 1950-х в работах С. Карлина и

Дж. Макгрегора по теории вероятностей [7], [8]. Этот метод допускает массу различных обобщений. Подробный рассказ о методе отражений и его возникновении в разных задачах читатель может найти в работе [1].

Наша следующая задача — вычислить определитель, полученный в предыдущем предложении. Этому будет посвящен раздел 1.6. Для удобства вычисления мы сначала перепишем этот определитель в несколько другом виде.

**Следствие 1.10.** Число трехмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде  $\mathcal{B}(a, b, c)$  равняется

$$\mathcal{B}(a, b, c) = \det \left( \binom{a+b+i-1}{b+j-1} \right)_{i,j=1}^c = \begin{vmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b}{b+1} & \cdots & \binom{a+b}{b+c-1} \\ \binom{a+b+1}{b} & \binom{a+b+1}{b+1} & \cdots & \binom{a+b+1}{b+c-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{a+b+c-1}{b} & \binom{a+b+c-1}{b+1} & \cdots & \binom{a+b+c-1}{b+c-1} \end{vmatrix}.$$

*Доказательство.* Приведём комбинаторное доказательство этого факта.  $\mathcal{B}(a, b, c)$  равно количеству наборов непересекающихся путей между точками  $A_k = (k-1, a+k-1)$  и  $B_k = (b+k-1, k-1)$ , где  $1 \leq k \leq c$ . Давайте удлиним все пути, кроме последнего, так, чтобы их новые концы  $B'_k$  лежали на одной вертикальной прямой — а именно,  $B'_k = (b+c-1, k-1)$  (см. рис. 1.5). Ясно, что непересекающиеся наборы удлинённых путей биективно соответствуют наборам исходных непересекающихся путей. Поэтому

$$\mathcal{B}(a, b, c) = \det(P(A_i \rightarrow B'_j))_{i,j=1}^c.$$

Но  $P(A_i \rightarrow B'_j) = \binom{a+b+c-i}{b+c-j}$ . Подставив эти значения в определитель и транспонировав матрицу относительно побочной диагонали, получаем требуемое.  $\square$

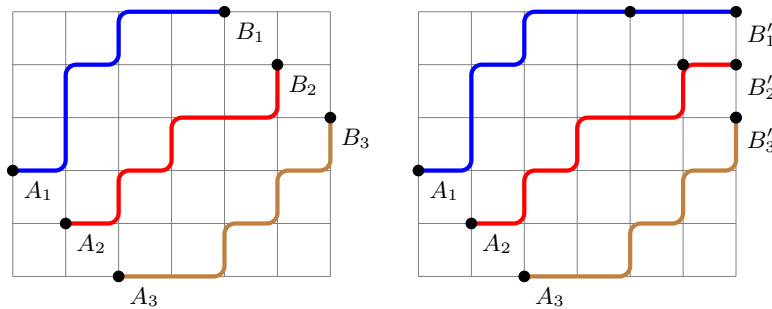


РИС. 1.5. Удлинение наборов путей

**Упражнение 1.11.** Докажите равенство определителей из теоремы 1.9 и следствия 1.10 алгебраически, сведя один определитель к другому элементарными преобразованиями строк и столбцов.

Этот определитель мы вычислим в разделе 1.6. Для этого нам потребуются некоторые сведения об определителях Вандермонда, которым будет посвящен следующий раздел.

**1.5. Определитель Вандермонда.** Напомним следующий результат из стандартного курса алгебры.

**Предложение 1.12** (определитель Вандермонда).

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

*Набросок доказательства.* У этого утверждения есть два различных доказательства, предложенных независимо и почти одновременно. Первое доказательство, принадлежащее Вандермонду, использует индукцию по  $n$ . Произведем над матрицей элементарные преобразования столбцов: вычтем из каждого столбца, начиная со второго, предыдущий, умноженный на  $x_1$ . Получим, что в первой строке все элементы, кроме первого, окажутся равными нулю. Вычтя эту строку из всех остальных, сделаем в каждой строке, начиная со второй, первый элемент нулевым. Остается вынести из каждой ( $k$ -й) строки общий множитель  $x_k - x_1$ , и дело будет сведено к вычислению определителя Вандермонда на единицу меньшего порядка.

Второе доказательство, полученное Коши, более концептуально. Оно состоит в следующем. Заметим, что определитель в левой части равенства меняет знак при перестановке любых двух переменных  $x_i$  и  $x_j$ . Это значит, что он делится на  $x_i - x_j$ . Поэтому он пропорционален и произведению всевозможных двучленов вида  $x_i - x_j$  (т.к. они все попарно взаимно просты). Однако и левая, и правая часть имеют степень  $n(n-1)/2$ , поэтому коэффициент пропорциональности является константой. Вычислив коэффициент при каком-нибудь мономе (например, при  $x_2 x_3^2 \dots x_n^{n-1}$ ) в левой и правой частях, получаем, что эта константа равняется единице.  $\square$

Нам потребуется некоторая модификация определителя Вандермонда, использующая *убывающие степени*.

**Определение 1.13.** Пусть  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Будем называть  $n$ -той *убывающей степенью*  $x$  число

$$x^{\downarrow n} = x(x-1)\dots(x-n+1).$$

(в произведении участвует  $n$  слагаемых; как и для обычных степеней, считаем, что  $x^{\downarrow 0} = 1$ ).

Ясно, что  $n^{\downarrow n} = n!$ , а  $x^{\downarrow(n+m)} = x^{\downarrow n}(x-n)^{\downarrow m}$ . Кроме того, биномиальные коэффициенты суть отношения убывающих степеней:  $\binom{n}{k} = n^{\downarrow k}/k^{\downarrow k} = n^{\downarrow k}/k!$ .

Оказывается, что определитель Вандермонда для убывающих степеней считается по той же формуле, что и обычный определитель Вандермонда:

**Предложение 1.14.**

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^{\downarrow 2} & \dots & x_1^{\downarrow n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^{\downarrow 2} & \dots & x_2^{\downarrow n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{\downarrow 2} & \dots & x_n^{\downarrow n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

**Упражнение 1.15.** Докажите это.

*Указание.* Определитель Вандермонда для убывающих степеней сводится к обычному определителю Вандермонда элементарными преобразованиями столбцов.

**1.6. Вычисление числа плоских разбиений в параллелепипеде.** В разделе 1.4 было показано, что число плоских разбиений в параллелепипеде  $\mathcal{B}(a, b, c)$  задается детерминантной формулой

$$\mathcal{B}(a, b, c) = \begin{vmatrix} \binom{a+b}{b} & \binom{a+b}{b+1} & \cdots & \binom{a+b}{b+c-1} \\ \binom{a+b+1}{b} & \binom{a+b+1}{b+1} & \cdots & \binom{a+b+1}{b+c-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{a+b+c-1}{b} & \binom{a+b+c-1}{b+1} & \cdots & \binom{a+b+c-1}{b+c-1} \end{vmatrix} = \det \left( \binom{a+b+i-1}{b+j-1} \right)_{i,j=1}^c.$$

Запишем каждый биномиальный коэффициент как отношение двух убывающих степеней. После этого из каждого ( $j$ -го) столбца матрицы можно будет вынести общий множитель  $1/(b+j-1)!$ . Получим, что

$$\mathcal{B}(a, b, c) = \left( \prod_{i=1}^c \frac{1}{(b+j-1)!} \right) \cdot \det \left( (a+b+i-1)^{\downarrow b+j-1} \right)_{i,j=1}^c.$$

Воспользуемся теперь свойством убывающей степени:  $(a+b+i-1)^{\downarrow b+j-1} = (a+b+i-1)^{\downarrow b} \cdot (a+i-1)^{\downarrow j-1}$ , и вынесем из каждой ( $i$ -й) строки определителя множитель  $(a+b+i-1)^{\downarrow b}$ :

$$\mathcal{B}(a, b, c) = \left( \prod_{j=1}^c \frac{(a+b+j-1)^{\downarrow b}}{(b+j-1)!} \right) \cdot \det \left( (a+i-1)^{\downarrow j-1} \right)_{i,j=1}^c.$$

Последний сомножитель есть в точности определитель Вандермонда для убывающих степеней; он равен  $1! \cdot 2! \cdots (c-1)!$ . Подставим его значение в предыдущую формулу:

$$\mathcal{B}(a, b, c) = \prod_{j=1}^c (a+b+j-1)^{\downarrow b} \prod_{j=1}^c \frac{(j-1)!}{(b+j-1)!} = \prod_{j=1}^c \frac{(a+b+j-1)^{\downarrow b}}{(b+j-1)^{\downarrow b}}.$$

Заменим убывающую степень знаком произведения:

$$\mathcal{B}(a, b, c) = \prod_{i=1}^b \prod_{j=1}^c \frac{a+i+j-1}{i+j-1}.$$

Мы получили формулу для числа плоских разбиений в параллелепипеде. У нее есть один недостаток: она несимметрична по  $a, b$  и  $c$  (хотя  $b$  и  $c$  входят в нее симметрично). Исправим это следующим образом: заметим, что

$$\frac{a+i+j-1}{i+j-1} = \frac{a+i+j-1}{a+i+j-2} \cdot \frac{a+i+j-2}{a+i+j-3} \cdots \frac{i+j}{i+j-1}.$$

Заменив каждую из дробей под знаком двойного произведения на произведение  $a$  дробей, получим симметричную по  $a, b$  и  $c$  запись той же формулы уже в виде тройного произведения. Это и есть основной результат этого раздела, который называется *формулой Макмагона*.

**Теорема 1.16** (формула Макмагона). *Число трехмерных диаграмм Юнга внутри прямоугольного параллелепипеда  $\mathcal{B}(a, b, c)$  равняется*

$$\mathcal{B}(a, b, c) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

Это утверждение можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим клетку  $\eta$  (элемент трехмерной диаграммы Юнга) с координатами  $(i, j, k)$ . Назовём её *высотой* число  $\text{ht } \eta = i + j + k - 2$ . Так, угловая клетка имеет высоту один, три



примыкающие к ней (по грани) клетки имеют высоту 2, и так далее. Тогда формула Макмагона приобретает следующий красивый и легко запоминающийся вид:

**Следствие 1.17** (формула Макмагона). *Число трехмерных диаграмм Юнга внутри прямоугольного параллелепипеда  $B(a, b, c)$  равняется*

$$\mathcal{B}(a, b, c) = \prod_{\eta \in B(a, b, c)} \frac{\text{ht } \eta + 1}{\text{ht } \eta},$$

где произведение берется по всем клеткам  $\eta$ , принадлежащим параллелепипеду  $B(a, b, c)$ .

*Замечание 1.18.* Заметим, что хорошо известное выражение для числа обычных (двумерных) диаграмм Юнга тоже может быть переписано в аналогичном виде: число поддиаграмм в прямоугольнике размера  $a \times b$  равняется

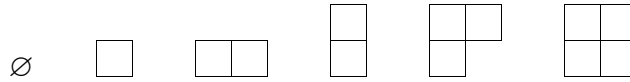
$$\binom{a+b}{a} = \frac{(b+1)(b+2)\dots(a+b)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot b} = \prod_{j=1}^b \frac{a+j}{j} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{i+j}{i+j-1},$$

то есть находится по буквально той же формуле, если положить высоту клетки  $(i, j)$  равной  $i + j - 1$ . Однако если определить диаграммы Юнга в размерности четыре и выше, то аналогичная формула для числа поддиаграмм в параллелепипеде уже оказывается неверна. Как в этом случае вычислить количество поддиаграмм, автору неизвестно (и, по-видимому, человечеству тоже).

## 2. ВТОРАЯ ЛЕКЦИЯ. $q$ -БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

**2.1. Диаграммы Юнга и биномиальные коэффициенты.** Простейший частный случай задачи о подсчете плоских разбиений (при  $c = 1$ ), которую мы решали в прошлой лекции, звучит так: сколько существует диаграмм Юнга из не более чем  $m$  строк, если длина каждой из них не превосходит  $n$ ? Иначе говоря, сколько диаграмм Юнга можно вписать в прямоугольник размера  $m \times n$ ?

Например, для квадрата  $2 \times 2$  таких диаграмм шесть. Они приведены на рисунке.



Каждая диаграмма Юнга в прямоугольнике ограничивается снизу ломаной, соединяющей левый нижний угол квадрата с правым верхним. Такая ломаная состоит из  $m + n$  звеньев, из которых ровно  $m$  идут вверх, а  $n$  вправо. Итого количество таких ломаных равно количеству способов выбрать  $m$  вертикальных звеньев из  $m + n$  (или, что то же самое, числу способов выбрать  $n$  горизонтальных звеньев), то есть биномиальному коэффициенту  $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$ .

**2.2. Определение  $q$ -биномиальных коэффициентов.** Назовем весом  $|\lambda|$  диаграммы Юнга  $\lambda$  количество входящих в нее клеток. Будем решать ту же задачу — подсчета диаграмм Юнга внутри данного прямоугольника — но уже с учетом весов. Составим производящую функцию, которую будем обозначать через  $\left[ \begin{smallmatrix} m+n \\ m \end{smallmatrix} \right]_q$ :

$$\left[ \begin{smallmatrix} m+n \\ m \end{smallmatrix} \right]_q = \sum_{\lambda \subset m \times n} q^{|\lambda|}.$$

Это многочлен с положительными коэффициентами, причем коэффициент при  $q^k$  равняется числу диаграмм Юнга веса  $k$ , вписанных в прямоугольник размера  $m \times n$ . Иногда, когда ясно, о каком  $q$  идет речь, мы будем опускать индекс  $q$  и писать просто  $\left[ \begin{smallmatrix} m+n \\ m \end{smallmatrix} \right]$ .

Этот многочлен будем называть  *$q$ -биномиальным коэффициентом*. Действительно, далее мы увидим, что эти многочлены ведут себя очень похоже на обычные числа сочетаний: для многих утверждений о биномиальных коэффициентах удастся получить их « $q$ -аналоги», т.е. аналогичные утверждения о  $q$ -биномиальных коэффициентах.

**Пример 2.1.** Пусть  $m = 1$ . Тогда  $\left[ \begin{smallmatrix} n+1 \\ n \end{smallmatrix} \right]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .

**Пример 2.2.** Пусть  $m = n = 2$ . Тогда  $\left[ \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$  (это легко увидеть, посмотрев на предыдущий рисунок — на нем изображено по одной диаграмме весов 0, 1, 3 и 4 и две диаграммы веса 2). Этот многочлен можно разложить на множители, причем каждый множитель будет геометрической прогрессией:  $1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4 = (1 + q + q^2)(1 + q^2)$ .

Сформулируем несколько свойств  $q$ -биномиальных коэффициентов.

**Предложение 2.3.** Значение  $\left[ \begin{smallmatrix} m+n \\ m \end{smallmatrix} \right]_q$  в единице равно  $\binom{m+n}{m}$ .

Это очевидно: если подставить в производящую функцию  $q = 1$ , каждая диаграмма Юнга вне зависимости от ее веса будет считаться с весом 1, то есть значение многочлена будет давать общее количество диаграмм.

**Предложение 2.4.**  $\left[ \begin{smallmatrix} m+n \\ m \end{smallmatrix} \right] = \left[ \begin{smallmatrix} m+n \\ n \end{smallmatrix} \right]$ .



$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix} &= \frac{[m+n-1]!}{[m-1]![n]!} + q^m \frac{[m+n-1]!}{[m]![n-1]!} = \\ &= \frac{[m+n-1]!}{[m]![n]!} ([m] + q^m [n]) = \frac{[m+n]!}{[m]! \cdot [n]!}, \end{aligned}$$

что и требовалось. В последнем равенстве мы воспользовались соотношением  $[m+n] = [m] + q^m [n]$ .  $\square$

Это утверждение можно переписать в следующем виде, заменив каждое из чисел  $[k]$  на  $\frac{1-q^k}{1-q}$ :

**Предложение 2.9.**

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{m+n})(1-q^{m+n-1}) \dots (1-q^{n+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1}) \dots (1-q)}.$$

Рассмотрев несколько примеров  $q$ -биномиальных коэффициентов, можно заметить, что эти многочлены являются *возвратными*: набор их коэффициентов есть палиндром. Иначе говоря, коэффициент в многочлене  $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$  при  $q^k$  равняется коэффициенту при  $q^{mn-k}$ . Это следует напрямую из определения  $q$ -биномиальных коэффициентов как производящих функций для числа диаграмм Юнга: каждой диаграмме Юнга из  $k$  клеток можно сопоставить её дополнение до прямоугольника  $m \times n$ , которое будет состоять из  $mn - k$  клеток.

Отметим ещё одно интересное свойство  $q$ -биномиальных коэффициентов: они являются *унимодальными* (или *веретенообразными*) многочленами. Это значит, что последовательность их коэффициентов  $(a_0, \dots, a_{mn})$  имеет единственный локальный максимум: первая половина этой последовательности является нестрого возрастающей, т.е.  $a_i \leq a_j$  при  $0 \leq i < j \leq \frac{mn}{2}$ . В силу симметрии, вторая половина последовательности коэффициентов является нестрого убывающей. Комбинаторное доказательство этого факта оказывается на удивление непростым. Оно было получено Кэтлин О'Харой в работе [10]; см. также обзорную работу Д. Зельбергера [12] и работу И. Пака и Г. Пановой [11].

**2.3. Производящая функция Эйлера как следствие формулы для  $q$ -биномиальных коэффициентов.** Как мы выяснили только что, предыдущая формула задает производящую функцию для диаграмм Юнга ширины не более  $n$  и высоты не более  $m$ . Устремим  $n$  к бесконечности; получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q^m)(1-q^{m-1}) \dots (1-q)}.$$

(отметим, что знаменатель в выражении для  $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$ , приведенном в предложении 2.9, от  $n$  не зависит!). Мы получили следующее утверждение.

**Предложение 2.10.** *Производящая функция  $P_m(q)$  для количества разбиений числа  $n$  в сумму слагаемых, не превосходящих  $m$ , равняется*

$$P_m(q) = \sum p_m(n)q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^m)} = \prod_{k=1}^m \frac{1}{1-q^k}.$$

Кроме того, в этом же предложении можно было устремить и  $m$  к бесконечности — в итоге получится производящая функция для числа всех разбиений. Это знаменитая теорема Эйлера.

**Теорема 2.11** (Л. Эйлер). *Производящая функция  $P(q)$  для количества разбиений числа  $n$  задается следующим бесконечным произведением:*

$$P(q) = \sum p(n)q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}.$$

*Замечание 2.12.* Знак бесконечного произведения может напугать читателя, который ранее не имел дела с этим объектом. Однако бояться его следует не больше, чем бесконечных рядов. Действительно, на первый взгляд кажется, что для того, чтобы представить бесконечное произведение как ряд, нужно «перемножить бесконечное число скобок». Однако чтобы вычислить очередной (скажем,  $k$ -й) член этого ряда, нужно взять только *конечное* число (в данном случае  $k$ ) первых сомножителей — остальные не окажут на коэффициент при  $q^k$  никакого влияния.

Наша ближайшая цель — доказать формулу (также принадлежащую Макмагону) для *производящей функции* числа плоских разбиений в параллелепипеде  $B(a, b, c)$ . Удивительным образом, она получается из теоремы 1.16 просто заменой всех целых чисел на их  $q$ -аналоги.

**Теорема 2.13** (формула Макмагона). *Производящая функция для числа трехмерных диаграмм Юнга внутри прямоугольного параллелепипеда  $B(a, b, c)$  равняется*

$$\mathcal{B}_q(a, b, c) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{[i+j+k-1]}{[i+j+k-2]} = \prod_{\eta \in B(a,b,c)} \frac{[\text{ht } \eta + 1]}{[\text{ht } \eta]}.$$

Далее, в этой теореме можно устремить  $a, b, c$  к бесконечности и получить формулу, похожую на утверждение теоремы Эйлера.

**Теорема 2.14** (формула Макмагона). *Производящая функция для числа трехмерных диаграмм Юнга равна*

$$\mathcal{B}_q = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^k)^k}.$$

### 3. ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ. МНОГОЧЛЕНЫ ШУРА

Для вычисления производящей функции для плоских разбиений можно воспользоваться тем же приёмом, который использовался для нахождения их числа — методом непересекающихся путей. Однако эти пути при этом нужно считать с определенными весами; в результате получится определитель из  $q$ -биномиальных коэффициентов, который также можно вычислить. Этот подход желающие могут прочесть в брошюре [5].

Мы будем действовать иначе: разовьем общую теорию симметрических многочленов и с её помощью уже получим требуемый результат. Этому будут посвящены третья и четвертая лекции.

**3.1. Симметрические многочлены.** Рассмотрим кольцо многочленов  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$  от  $n$  переменных. На нём естественным образом действует группа перестановок  $S_n$ : перестановка  $\sigma \in S_n$  переставляет переменные, переводя  $x_i$  в  $x_{\sigma(i)}$ . Инварианты этого действия называются симметрическими многочленами.

**Определение 3.1.** Многочлен  $p(x_1, \dots, x_n)$  называется *симметрическим*, если  $p(x_1, \dots, x_n) = p(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$  для любой перестановки  $\sigma \in S_n$ .

Симметрические многочлены образуют подкольцо, которое мы обозначим  $\Lambda_n \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ .

Приведем несколько важных примеров симметрических многочленов.

**Пример 3.2.** Пусть  $1 \leq k \leq n$ . *Элементарным симметрическим многочленом* степени  $k$  называется многочлен

$$e_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}.$$

Также положим формально  $e_0 = 1$ .

Элементарные симметрические многочлены возникают в *теореме Виета*: коэффициенты многочлена с корнями  $x_1, \dots, x_n$  с точностью до знака равны элементарным симметрическим многочленам от этих корней. Более точно,

$$(t-x_1) \dots (t-x_n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k e_k(x_1, \dots, x_n) t^{n-k} = t^n - (x_1 + \dots + x_n) t^{n-1} + \dots + (-1)^n x_1 \dots x_n.$$

Можно сказать, что  $e_k$  получается следующим образом: возьмем вертикальный столбец из  $k$  квадратиков и заполним его числами от 1 до  $n$  так, чтобы они *строго возрастали* бы сверху вниз. Далее для заполнения набором  $(i_1, \dots, i_k)$  рассмотрим моном  $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ . Сумма таких мономов по всем заполнениям и даст нам многочлен  $e_k$ .

**Пример 3.3.** *Полные симметрические многочлены*  $h_k$ , где  $k \geq 0$ . Они определяются похожим образом:

$$h_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq n} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}.$$

Аналогично мы полагаем  $h_0 = 1$ . Обратите внимание, что эти многочлены определены уже при всех натуральных  $k$ , тогда как  $e_k$  — лишь при  $k \leq n$  (иногда удобно считать, что при  $k > n$  многочлены  $e_k$  равны нулю).

Разница здесь состоит в том, что  $h_k$  — это сумма всевозможных мономов степени  $k$  от  $n$  переменных, тогда как  $e_k$  — сумма всех мономов, *свободных от квадратов*.

Теперь рассмотрим строку из  $k$  клеток и заполним её числами (возможно, повторяющимися) в пределах от 1 до  $n$  так, чтобы они *нестрого* возрастали бы при движении слева направо. Если сопоставить строке из чисел  $(j_1, \dots, j_k)$  моном  $x_{j_1} \dots x_{j_k}$  и просуммировать такие мономы по всевозможным заполнениям, мы получим в точности многочлен  $h_k$ .

**Упражнение 3.4.** Покажите, что

$$e_k(q^n, \dots, q) = q^{k(k+1)/2} \binom{n}{k}, \quad h_k(q^n, \dots, q) = q^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Как эти тождества связаны с производящими функциями для диаграмм Юнга?

**3.2. Таблицы Юнга и многочлены Шура.** Рассмотрим теперь произвольную диаграмму Юнга  $\lambda$ .

**Определение 3.5.** Пусть  $\lambda$  — произвольная диаграмма Юнга. *Полустандартной таблицей Юнга  $T$*  называется заполнение клеточек диаграммы  $\lambda$  числами  $t_{ij}$ , где  $1 \leq t_{ij} \leq n$ , удовлетворяющее следующим условиям:  $t_{ij} < t_{i+1,j}$  и  $t_{ij} \leq t_{i,j+1}$ . Иначе говоря, значения в клеточках строго возрастают по столбцам сверху вниз и нестрого возрастают по строкам слева направо. При этом диаграмма  $\lambda$  называется *формой* (*shape*) таблицы  $T$ ; обозначение:  $\lambda = \text{sh } T$ .

**Пример 3.6.** Пусть  $n = 3$ ,  $\lambda = (2, 1)$ . Существуют восемь таблиц формы  $\lambda$ . Перечислим их все:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Сопоставим каждой таблице Юнга  $T$  формы  $\lambda$  моном от  $n$  переменных степени  $|\lambda|$  следующим образом: перемножим переменные  $x_{t_{ij}}$  по всем клеткам  $(i, j)$  диаграммы  $\lambda$ . Будем обозначать этот моном через  $x^T$ ; он называется *весом* таблицы  $T$ .

**Определение 3.7.** Пусть  $\lambda$  — произвольная диаграмма Юнга. *Многочленом Шура  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$*  называется многочлен

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\text{sh } T = \lambda} x^T,$$

где сумма берется по всевозможным полустандартным таблицам, заполненным числами от 1 до  $n$ .

**Пример 3.8.** Если  $\lambda$  — диаграмма из одной строки (соотв. одного столбца) длины  $k$ , то соответствующий многочлен Шура  $s_\lambda$  равен  $h_k$  (соотв.  $e_k$ ).

**Пример 3.9.** Вычислим с помощью примера 3.6 многочлен Шура  $s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3)$ . Просуммировав мономы по всем таблицам Юнга, найдём, что он равен

$$s_{(2,1)} = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2.$$

Полученный многочлен, как и многочлены из предыдущего примера, оказывается симметрическим. Удивительным образом, симметрическими будут все многочлены Шура. Из определения это *a priori* никак не следует: числа  $1, \dots, n$ , участвующие в таблице Юнга, «неравноправны». Однако это будет следовать из формулы, выражающей  $s_\lambda$  через многочлены  $h_k$ , которую мы докажем в следующем параграфе. При желании читатель может доказать это и непосредственно; оставим это в качестве (не самой простой) задачи.

**Упражнение 3.10.** Для любого  $i$ , где  $1 \leq i < n$ , придумайте биекцию на таблицах Юнга, переводящую таблицу  $T$  веса  $x^T = x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$  в таблицу  $T'$  той же формы и веса  $x^{T'} = x_1 \dots x_i^{d_i+1} x_{i+1}^{d_i} \dots x_n$ . Выведите отсюда, что многочлены  $s_\lambda$  будут симметрическими.

Отсюда нетрудно вывести следующий фундаментальный результат о многочленах Шура.

**Упражнение 3.11.** Используя симметричность многочленов Шура, докажите, что они образуют *базис* пространства  $\Lambda_n$  как векторного пространства над  $\mathbb{Q}$ .

В следующей лекции мы приведем другое доказательство того, что  $s_\lambda$  образуют базис пространства  $\Lambda_n$ .

**3.3. Формула Якоби–Труди.** Замечательное свойство элементарных симметрических многочленов состоит в том, что любой симметрический многочлен выражается через них, причем единственным образом. Это утверждает основная теорема о симметрических многочленах.

**Теорема 3.12.** Для любого симметрического многочлена  $p(x_1, \dots, x_n)$  существует единственный многочлен  $q(y_1, \dots, y_n)$ , для которого  $q(e_1, \dots, e_n) = p(x_1, \dots, x_n)$ .

Иначе говоря, многочлены  $e_1, \dots, e_n$  являются алгебраически независимыми порождающими кольца  $\Lambda_n$ . Более формально можно сказать, что кольцо  $\Lambda_n$  изоморфно как градуированное кольцо кольцу многочленов  $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n]$ , где  $\deg y_k = k$ , и изоморфизм задаётся отображением  $y_k \mapsto e_k$ .

Мы не будем доказывать здесь эту теорему; её доказательство можно найти в любом учебнике алгебры, например, в [4, §3.8].

**Задача 3.1.** Докажите, что в качестве системы алгебраически независимых порождающих кольца  $\Lambda_n$  можно взять не только  $e_1, \dots, e_n$ , но также и следующие наборы многочленов:

- а) полные симметрические многочлены  $h_1, \dots, h_n$ ;
- б) ньютоновские степенные суммы  $p_k = x_1^k + \dots + x_n^k$ , где  $1 \leq k \leq n$ .

Следующая теорема позволяет выписать явные выражения для многочленов Шура через полные симметрические многочлены (впрочем, не обязательно первые  $n$  из них; возможно, будут задействованы и многочлены  $h_k$  при  $k > n$ ).

**Теорема 3.13** (формула Якоби–Труди). Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  — разбиение на  $k$  частей, где  $k \leq n$ . Тогда имеет место равенство

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \dots & h_{\lambda_1+k-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \dots & h_{\lambda_2+k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_n-k+1} & h_{\lambda_n-k+2} & \dots & h_{\lambda_n} \end{vmatrix} = \det(h_{\lambda_i+j-i})_{i,j=1}^k$$

Из формулы Якоби–Труди вытекает заявленное выше следствие:

**Следствие 3.14.** Многочлены Шура являются симметрическими.

Действительно, они представляются как определители, т.е. полиномиальные выражения, от симметрических многочленов  $h_k$ .

*Доказательство формулы Якоби–Труди.* В этом доказательстве опять-таки будет использован трюк Линдстрема–Гесселя–Вьенно, который мы уже видели в первой лекции.



Рассмотрим полосу высоты  $n - 1$  на клетчатой бумаге, т.е. часть плоскости между прямыми  $y = 0$  и  $y = n - 1$ , и отметим на верхней её стороне точки  $A_1, \dots, A_k$ ,  $A_i = (k - i, n - 1)$ , а на нижней стороне — точки  $B_1, \dots, B_k$ , где  $B_j = (\lambda_j + k - j, 0)$ . Тем самым и абсциссы точек  $A_1, \dots, A_k$ , и абсциссы точек  $B_1, \dots, B_k$  будут строго убывать.

Сопоставим каждому пути на решётке, идущему из  $A_i$  в  $B_j$ , его вес следующим образом. Каждому горизонтальному участку пути, проходящему по прямой  $y = d$ , сопоставим вес  $x_{n-d}$ . Вес пути — это произведение весов всех входящих в него горизонтальных отрезков. Далее, каждому набору путей, соединяющему (в каком-то порядке) точки  $A_i$  и  $B_j$ , можно сопоставить его вес как произведение весов всех путей, входящих в набор.

Далее, каждой полустандартной таблице Юнга формы  $\lambda$  мы сопоставим набор *непересекающихся* путей, соединяющих точки  $A_i$  с соответствующими им  $B_j$ . Сделаем это следующим образом. Строке таблицы с номером  $i$ , заполненной числами  $t_{i1}, \dots, t_{i\lambda_i}$  сопоставим путь, горизонтальные звенья которого лежат на прямых  $n - t_{i1}, n - t_{i2}$  и так далее — вплоть до  $n - t_{i\lambda_i}$ . Получится набор путей из  $A_i$  в  $B_j$ . Утверждается, что эти пути не будут пересекаться тогда и только тогда, когда числа в столбцах диаграммы строго возрастают. Действительно, возрастание по столбцам равносильно тому, что каждое ( $j$ -е) звено пути с большим номером лежит строго ниже  $j$ -го звена пути с меньшим номером, а это и значит, что пути не пересекаются. При этом по построению вес такого набора путей будет равен в точности  $x^\lambda$ .

Рассмотрим пример. На рис. 3.1 изображена таблица Юнга формы  $(3, 3, 2)$  и соответствующий ей при  $n = 5$  набор путей.

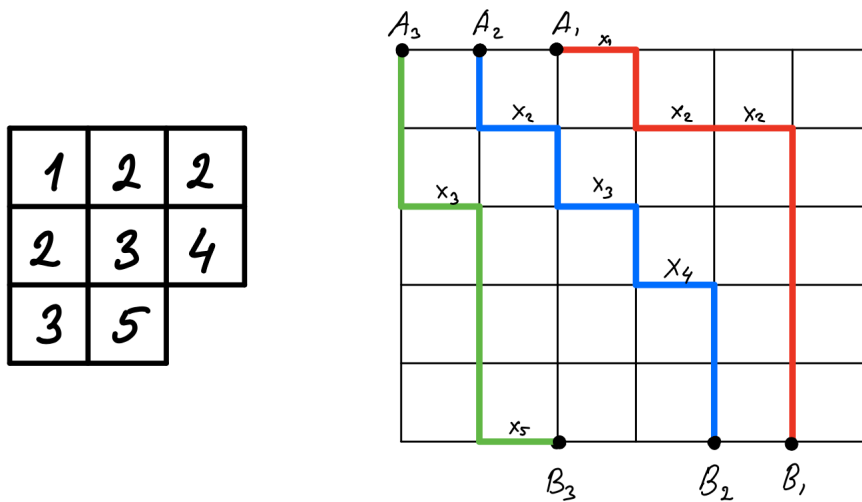


Рис. 3.1. Диаграмма и отвечающий ей набор непересекающихся путей.

Мы утверждаем, что сумма весов всех наборов непересекающихся путей из  $A_i$  в  $B_j$  равна определителю матрицы,  $(i, j)$ -й элемент которой есть сумма весов всевозможных путей из  $A_i$  в  $B_j$ . Доказательство этого факта буквально повторяет доказательство трюка Линдстрёма–Гесселя–Вьенно (см. доказательство следствия 1.10): нужно построить биекцию на множестве всевозможных наборов путей, меняющую чётность перестановки и *сохраняющую вес набора* (в этом состоит единственное отличие от предыдущего случая).

Легко видеть, что сумма весов всех путей из  $A_i$  в  $B_j$  есть не что иное, как  $h_{\lambda_i+j-i}$ . Действительно, все такие пути соединяют левую верхнюю и правую нижнюю вершины прямоугольника с  $n-1$  строкой и  $\lambda_i+j-i$  столбцами; вес каждого такого пути будет мономом от  $x_1, \dots, x_n$  степени  $\lambda_i+j-i$ , причём все такие мономы будут встречаться ровно по одному разу. Тем самым многочлен Шура, равный по определению сумме весов всех полустандартных таблиц данной формы, представляется как сумма весов всевозможных наборов непересекающихся путей из  $A_i$  в  $B_i$  — а эта сумма уже, в свою очередь, представляется как определитель  $\det(h_{\lambda_i+j-i})$ . Формула Якоби–Труди доказана.  $\square$

**3.4. Главные специализации многочленов Шура и плоские разбиения.** Многочлены Шура оказываются полезными для описания производящих функций плоских разбиений с заданным основанием. Например, если заменить в таблице Юнга на рис. 3.1 все числа соответствующими переменными, мы получим следующую таблицу:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_5 & \end{array}$$

Каждая из этих переменных может отвечать столбцу кубиков определенной высоты. Например, мы можем положить  $x_1 = q^5$ ,  $x_2 = q^4$ , и так далее, вплоть до  $x_5 = q$ . Мы получим плоское разбиение, представленное на рис. 3.2.

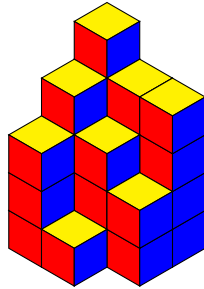


Рис. 3.2. Плоское разбиение, строгое по столбцам

Полученное таким образом плоское разбиение будет *строгим по столбцам*: высоты столбцов в нём будут строго убывать (это соответствует строгому возрастанию элементов в столбцах таблицы Юнга). Отсюда следует, что  $s_{(3,3,2)}(q^5, q^4, q^3, q^2, q)$  есть производящая функция для числа плоских разбиений, строгих по столбцам, в которых высоты столбцов не превосходят 5, а длины строк задаются частями разбиения  $(3, 3, 2)$ . Вычисление многочлена Шура в степенях  $q$  называется его *главной специализацией*.

Нас интересует доказательство формулы Макмагона, которая вычисляет производящую функцию для плоских разбиений в прямоугольной коробке размера  $a \times b \times c$ . Посмотрим, что будет, если в качестве разбиения  $\lambda$  взять прямоугольник  $a \times b$ , т.е.  $a$ -компонентное разбиение  $\lambda = (b, b, \dots, b) = b^a$ . Рассмотрим соответствующий многочлен многочлен Шура от  $n$  переменных и возьмем его главную специализацию  $s_\lambda(q^n, \dots, q)$ . Это производящая функция для числа строгих по столбцам плоских разбиений, в основании которых лежит прямоугольник  $a \times b$ , а высота столбца не превосходит  $n$ .

Из такого разбиения нетрудно сделать интересующее нас плоское разбиение — а именно, находящееся внутри параллелепипеда размера  $a \times b \times c$  и уже без условия строгости по столбцам. Действительно, удалим по одному кубику в каждой башне

в последней ( $a$ -й) строке, по два кубика в  $(a - 1)$ -й, и так далее, вплоть до первой строки, из каждой башни в которой мы удалим  $a$  кубиков. При этом всего мы удалим «террасу», в которой будет  $(1 + 2 + \dots + a)b = \frac{a(a+1)b}{2}$  кубиков. Получится плоское разбиение, уже не обязательно строгое, высота башен в котором не превосходит  $n - a$ . Положив  $n - a = c$ , мы получаем выражение для  $\mathcal{B}_q(a, b, c)$ , использующее главную специализацию многочлена Шура.

**Предложение 3.15.** Пусть  $\lambda = b^a$ . Производящая функция для плоских разбиений в параллелепипеде размера  $a \times b \times c$  удовлетворяет равенству

$$\mathcal{B}_q(a, b, c) = q^{-\frac{a(a+1)b}{2}} s_\lambda(q^{a+c}, q^{a+c-1}, \dots, q^2, q).$$

В следующей лекции мы получим ещё одно представление для многочленов Шура и с его помощью вычислим правую часть этой формулы.

## 4. ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ. ТЕОРЕМА ЛИТТЛВУДА

**4.1. Кососимметрические многочлены.** Вместо симметрических многочленов можно рассматривать кососимметрические. Посмотрим, что можно сказать о них.

**Определение 4.1.** Многочлен  $p(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$  называется *кососимметрическим*, если

$$p(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n) = -p(x_1, \dots, x_n).$$

для любого  $1 \leq i < n$ .

Поскольку каждую перестановку можно представить в виде произведения простых транспозиций (т.е. транспозиций, которые меняют два соседних элемента), это условие равносильно такому: для любой перестановки  $\sigma \in S_n$  имеет место равенство

$$p(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma p(x_1, \dots, x_n),$$

где через  $(-1)^\sigma$  обозначен знак перестановки  $\sigma$ .

Обозначим пространство всех кососимметрических многочленов от  $n$  переменных (как обычно, с рациональными коэффициентами) через  $\text{Skew}(n)$ . Ясно, что оно является векторным подпространством, т.е. замкнуто относительно сложения — а вот подкольцом оно уже не будет, т.к. произведение двух кососимметрических многочленов уже будет симметрическим. Напротив, оно является *модулем* над  $\Lambda_n$ : если кососимметрический многочлен умножить на симметрический, снова получится кососимметрический.

Самый простой способ изготовить кососимметрический многочлен из произвольного — это операция *кососимметризации*, или *альтернирования*. Она определяется почти так же, как симметризация:

$$\text{Alt}(p) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \sigma p,$$

где через  $\sigma p$  определено действие группы перестановок на многочленах при помощи перестановки переменных.

**Упражнение 4.2.** Проверьте, что:

- (1) если многочлен  $p$  симметричен по какой-нибудь паре переменных, то  $\text{Alt } p = 0$ ;
- (2) если два многочлена получаются друг из друга перестановкой переменных:  $p_1 = \tau p_2$ , то  $\text{Alt } p_1 = (-1)^\tau \text{Alt } p_2$ ;
- (3) оператор  $\text{Alt}$  сюръективен и пропорционален проектору на  $\text{Skew}(n)$ . Чему равен коэффициент пропорциональности?

Это упражнение подсказывает способ выписать базис в  $\text{Skew}(n)$ : для этого следует взять всевозможные мономы  $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  и рассмотреть результат их альтернирования, который мы обозначим через  $a_\alpha$ . В силу упражнения, достаточно ограничиться наборами, в которых  $\alpha_i$  как-то упорядочены — например, убывают — т.к. различные упорядочения дают один и тот же результат. Далее, если два показателя степени равны между собой, то альтернирование такого монома равно нулю. Мы получаем следующее предложение.

**Предложение 4.3.** Многочлены  $a_\alpha = \text{Alt}(x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})$ , где  $\alpha_1 > \dots > \alpha_n$ , образуют базис в  $\text{Skew}(n)$ .

Далее, из определения альтернирования и формулы для определителя как суммы по перестановкам следует, что  $a_\alpha$  можно представить в виде определителя:

$$a_\alpha = \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & x_2^{\alpha_1} & \dots & x_n^{\alpha_1} \\ x_1^{\alpha_2} & x_2^{\alpha_2} & \dots & x_n^{\alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{\alpha_n} & x_2^{\alpha_n} & \dots & x_n^{\alpha_n} \end{vmatrix} = \det(x_j^{\alpha_i}).$$

Рассмотрим «наименьший» набор убывающих индексов:  $\delta = (n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0)$ . Соответствующий кососимметрический многочлен — это хорошо известный *определитель Вандермонда*. Он замечателен, в частности, тем, что для него есть явное представление в виде произведения.

**Предложение 4.4.** *Имеет место равенство  $a_\delta = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим многочлен  $a_\delta$ . Он кососимметричен, то есть для любой пары  $i < j$  на гиперплоскости  $x_i = x_j$  он обращается в нуль. А значит,  $a_\delta$  делится на  $x_i - x_j$  в кольце многочленов  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ . Но все эти многочлены взаимно просты, стало быть,  $a_\delta$  делится и на их произведение, т.е. на правую часть равенства. Далее сравним степени: и левая, и правая часть имеют степень  $n(n-1)/2$ . Значит, частное от деления левой части на правую — константа. Для того, чтобы доказать, что эта константа равна единице, достаточно вычислить коэффициенты при каком-нибудь одном и том же мономе; проще всего взять в качестве такого монома  $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}$ . Легко видеть, что там и там этот коэффициент равен единице.  $\square$

Первая часть этого рассуждения дословно проходит для *любого* кососимметрического многочлена, не обязательно для определителя Вандермонда: всякий кососимметрический многочлен делится на  $a_\delta$ . Ясно, что результат будет симметрическим многочленом. Если коэффициенты исходного многочлена целые, то и полученный симметрический многочлен будет иметь целые коэффициенты. Мы получили следующий результат.

**Предложение 4.5.** *Имеет место изоморфизм свободных абелевых групп*

$$\text{Skew}(n) \rightarrow \Lambda_n, \quad p \mapsto p/a_\delta.$$

Тем самым базис  $\text{Skew}(n)$  из многочленов  $a_\alpha$  при этом изоморфизме перейдёт в базис пространства  $\Lambda_n$ . Удивительным образом окажется, что элементы этого базиса — это в точности *многочлены Шура*, которые мы определили в прошлой лекции.

**4.2. Многочлены Шура.** Пусть нам дана *строго убывающая* последовательность  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , где  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$ . Вычтем из её членов элементы последовательности  $\delta$ . Результат назовём  $\lambda$ . Тем самым  $\lambda_i = \alpha_i - n + i$ . Эта последовательность уже будет *нестрого убывать*:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Будем сокращённо записывать это как  $\alpha = \lambda + \delta$ .

**Определение 4.6** (временное). Пусть  $\lambda$  — разбиение на не более чем  $n$  частей. Определим многочлен  $\hat{s}_\lambda$  как отношение

$$\hat{s}_\lambda = a_{\lambda+\delta}/a_\delta.$$

Из обсуждения в предыдущем параграфе сразу получается следующий результат.

**Теорема 4.7.** *Многочлены  $\hat{s}_\lambda$  являются симметрическими. Они образуют базис  $\Lambda_n$  как векторного пространства над  $\mathbb{Q}$ .*

Далее в теореме 4.11 мы докажем, что  $s_\lambda = \widehat{s}_\lambda$ . Тем самым определение 4.6 будет эквивалентным определением многочленов Шура: «алгебраическим», в отличие от «комбинаторного» определения 3.7.

**Пример 4.8.** Пусть  $n = 2$ . Рассмотрим разбиение  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ . Вычислим соответствующий многочлен  $\widehat{s}_\lambda$ .

Во-первых,  $a_\delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2$ . Далее,

$$a_{\lambda+\delta} = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+1} & x_2^{\lambda_1+1} \\ x_1^{\lambda_2} & x_2^{\lambda_2} \end{vmatrix} = (x_1 x_2)^{\lambda_2} (x_1^{\lambda_1-\lambda_2+1} - x_2^{\lambda_1-\lambda_2+1}).$$

Воспользовавшись формулой для разности  $n$ -х степеней, получаем, что

$$\widehat{s}_\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} + x_1^{\lambda_1-1} x_2^{\lambda_2+1} + \dots + x_1^{\lambda_2} x_2^{\lambda_1}.$$

**Пример 4.9.** Пусть  $n = 3$ ,  $\lambda = (2, 1, 1)$ . Тогда

$$\widehat{s}_\lambda = \frac{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2.$$

(Проверьте это самостоятельно!)

**Упражнение 4.10.** Покажите, что  $\widehat{s}_\delta = \prod_{i < j} (x_i + x_j)$ .

**4.3. Теорема Литтлвуда.** Стратегия доказательства равенства  $s_\lambda = \widehat{s}_\lambda$  будет следующей: мы покажем, что и для многочленов  $\widehat{s}_\lambda$  выполнено тождество Якоби–Труди (а для многочленов  $s_\lambda$  оно выполнено в силу теоремы 3.13). Отсюда будет следовать, что эти два семейства многочленов совпадают.

**Теорема 4.11.** Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Имеет место равенство

$$\widehat{s}_\lambda = \det(h_{\lambda_i-i+j})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

*Доказательство.* Пусть  $\alpha$  — произвольный строго убывающий набор целых неотрицательных чисел. Введем следующие матрицы:

$$A_\alpha = (x_j^{\alpha_i})_{1 \leq i, j \leq n}; \quad H_\alpha = (h_{\alpha_i-n+j})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Наконец, обозначим через  $e_i^{(k)}$  элементарный симметрический многочлен степени  $i$ , в который подставлено значение  $x_k = 0$ . Тем самым  $e_i^{(k)}$  есть элементарный симметрический многочлен степени  $i$  от переменных  $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ . Обозначим через  $M$  матрицу

$$M = ((-1)^{n-i} e_{n-i}^{(k)})_{1 \leq i, k \leq n}.$$

**Лемма 4.12.** Имеет место равенство

$$(1) \quad H_\alpha M = A_\alpha.$$

*Доказательство.* Рассмотрим производящую функцию для  $e_i^{(k)}$ :

$$E^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i^{(k)} t^i = \prod_{i \neq k} (1 + tx_k).$$

Тогда

$$H(t)E^{(k)}(-t) = \frac{1}{1 - x_k t} = 1 + x_k t + x_k^2 t^2 + \dots$$

Сравнив коэффициенты при  $t^{\alpha_i}$  в обеих частях равенства, получим, что

$$\sum_{j=1}^n h_{\alpha_i - n + j} (-1)^{n-j} e_{n-j}^{(k)} = x_k^{\alpha_k}.$$

Выражение в левой части есть произведение  $i$ -й строки матрицы  $H_\alpha$  на  $k$ -й столбец матрицы  $M$ , а в правой —  $(i, k)$ -й элемент матрицы  $A_\alpha$ . Лемма доказана.  $\square$

Возьмем теперь определители от обеих частей равенства (1). Мы получим, что при любом  $\alpha$

$$a_\alpha = \det H_\alpha \det M.$$

Подставим в это равенство  $\alpha = \delta$ . Матрица  $H_\delta$  будет верхнетреугольной с единицами на главной диагонали, то есть  $\det H_\delta = 1$ . Поэтому  $\det M = a_\delta$  — это просто определитель Вандермонда.

Далее подставим  $\alpha = \lambda + \delta$ . При этом  $H_\alpha = (h_{\lambda_i + j - i})$  будет в точности матрицей, определитель которой фигурирует в формулировке теоремы, а равенство определителей левой и правой части равенства 1 будет выглядеть так:

$$a_{\lambda + \delta} = \det(h_{\lambda_i + j - i}) a_\delta,$$

а это и значит, что  $\det(h_{\lambda_i + j - i}) = s_\lambda$ . Формула Якоби–Труди доказана.  $\square$

В качестве следствия этой формулы мы немедленно получаем следующую теорему: два определения многочленов Шура, комбинаторное (с помощью таблиц Юнга) и алгебраическое (с использованием определителей) эквивалентны.

**Теорема 4.13** (Литтлвуд). *Комбинаторное и алгебраическое определения многочленов Шура эквивалентны:*

$$\widehat{s}_\lambda(x_1, \dots, x_n) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n).$$

**4.4. Подсчёт главной специализации многочлена Шура для прямоугольника.** В этом разделе через  $\lambda$  будет обозначаться разбиение, отвечающее прямоугольнику из  $a$  строк и  $b$  столбцов.

Предложение 3.15 утверждает, что главная специализация соответствующего многочлена Шура  $s_\lambda$  от  $a + c$  переменных равна  $\mathcal{B}_q(a, b, c)$ , умноженному на некоторую степень  $q$ . Более точно:

$$s_\lambda(q^{a+c}, q^{a+c-1}, \dots, q^2, q) = q^{a(a+1)b/2} \mathcal{B}_q(a, b, c).$$

Попробуем явно вычислить левую часть, воспользовавшись алгебраическим определением многочленов Шура. Обозначим через  $X$  и  $Y$  главные специализации многочленов  $a_\lambda + \delta$  и  $a_\delta$  соответственно:

$$s_\lambda(q^{a+c}, q^{a+c-1}, \dots, q^2, q) = X/Y,$$

где

$$X = \det \left( (q^{a+c-j+1})^{a+c-i+\lambda_i} \right)_{i,j=1}^{a+c}, \quad Y = \prod_{1 \leq i < j \leq a+c} (q^{a+c-i+1} - q^{a+c-j+1}).$$

Для начала упростим  $X$ . Для каждого  $i$  вынесем из  $i$ -й строки общий множитель  $q^{a+c-i+\lambda_i}$ . Получим равенство

$$X = q^{ab+(a+c)(a+c-1)/2} \det(q^{(a+c-j)(a+c-i+\lambda_i)}).$$

Обратите внимание, что в правой части снова стоит определитель Вандермонда — только на этот раз от переменных  $x_i = q^{a+c-i+\lambda_i}$ . Поэтому мы можем его вычислить: он равен

$$X = q^{ab+(a+c)(a+c-1)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq a+c} (q^{a+c-i+\lambda_i} - q^{a+c-j+\lambda_j}).$$

Аналогично преобразуем  $Y$ , вынеся из каждого сомножителя  $q$ ; в итоге получится

$$Y = q^{(a+c)(a+c-1)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq a+c} (q^{a+c-i} - q^{a+c-j}).$$

Тем самым отношение  $X/Y$  равно

$$X/Y = q^{ab} \prod_{1 \leq i < j \leq a+c} \frac{q^{a+c-i+\lambda_i} - q^{a+c-j+\lambda_j}}{q^{a+c-i} - q^{a+c-j}}.$$

Теперь посмотрим, какие значения могут принимать  $i$  и  $j$ . Если  $i < j \leq a$ , то  $\lambda_i = \lambda_j = b$ , и отношение числителя и знаменателя равно  $q^b$ . Таких пар будет  $a(a+1)/2$ . Далее, для пар, в которых  $a < i < j$ , имеем  $\lambda_i = \lambda_j = 0$ , так что числитель равен знаменателю. Осталось рассмотреть те сомножители, для которых  $i \leq a < j$ . Мы получим, что

$$X/Y = q^{ab+a(a+1)b/2} \prod_{i=1}^a \prod_{j=a+1}^{a+c} \frac{q^{a+b+c-i} - q^{a+c-j}}{q^{a+c-i} - q^{a+c-j}}.$$

Обратите внимание, что степень перед  $q$  — в точности та, на которую нужно поделить, чтобы получить из  $s_\lambda = X/Y$  выражение для  $\mathcal{B}_q(a, b, c)$ . Стало быть,

$$\mathcal{B}_q(a, b, c) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=a+1}^{a+c} \frac{q^{a+b+c-i} - q^{a+c-j}}{q^{a+c-i} - q^{a+c-j}} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=a+1}^{a+c} \frac{q^{b+j-i} - 1}{q^{j-i} - 1} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=a+1}^{a+c} \frac{[b+j-i]}{[j-i]}.$$

Далее сделаем замену  $j = a+k$  и заменим  $i$  на  $a-i+1$ . Тем самым выражение будет приведено к виду

$$(2) \quad \mathcal{B}_q(a, b, c) = \prod_{i=1}^a \prod_{k=1}^c \frac{[i+k+b-1]}{[i+k-1]}.$$

Как и в случае обычных чисел, последнюю дробь можно записать в виде произведения  $b$  дробей и привести ответ к симметричной форме:

$$(3) \quad \mathcal{B}_q(a, b, c) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{[i+j+k-1]}{[i+j+k-2]} = \prod_{\eta \in B(a,b,c)} \frac{[\text{ht } \eta + 1]}{[\text{ht } \eta]}.$$

Формула Макмагона (теорема 2.13) доказана.

**4.5. Предельный вид формулы Макмагона.** Зная теорему 2.13, легко получить из неё предельный вид: теорему 2.14. Например, устремив  $a, b, c \rightarrow \infty$  в формуле (2), мы получим равенство

$$\mathcal{B}_q = \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{i+k-1}}.$$



Сделав замену  $\ell = i+k-1$  и заметив, что каждый сомножитель вида  $\frac{1}{1-q^\ell}$  встречается ровно  $\ell$  раз, мы получим требуемое:

$$\mathcal{B}_q = \prod_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^\ell)^\ell}.$$

Можно рассуждать и иначе, стартовав с формулы (3). Заметим, что количество клеток  $\eta$ , для которых  $\text{ht } \eta = k$ , равняется  $k(k+1)/2$ . Поэтому

$$\mathcal{B}_q = \prod_{\eta \in (\mathbb{Z}_{>0})^3} \frac{1 - q^{\text{ht } \eta + 1}}{1 - q^{\text{ht } \eta}} = \prod_{\ell=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{\ell+1})^{\ell(\ell+1)/2}}{(1 - q^\ell)^{\ell(\ell+1)/2}} = \prod_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^\ell)^\ell},$$

что и требовалось.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Берштейн, Г. А. Мерзон. Диаграммы Юнга, пути на решетке и метод отражений. Матем. просв., сер. 3, вып. 18, с. 112–141
- [2] Д. М. Брессу. Доказательства и подтверждения. Как была доказана гипотеза о знакопередающихся матрицах. М.: МЦНМО, 2019
- [3] А. И. Буфетов, М. В. Житлухин, Н. Е. Козин. Диаграммы Юнга и их предельная форма. М.: МЦНМО, 2013
- [4] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. М.: Факториал, 1999 (или любое другое издание)
- [5] Е. Ю. Смирнов. Знакопередающиеся матрицы и плоские разбиения. М.: МЦНМО, 2014.
- [6] I. Gessel, X. Viennot, Binomial determinants, paths, and hook length formulae, Adv. Math. 58 (1985), 300–321
- [7] S. Karlin, J. G. McGregor. The differential equations of birth-and-death processes and the Stieltjes moment problem. Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 489-546
- [8] S. Karlin, J. G. McGregor. Coincidence probabilities. Pacific J. Math. 9 (1959), 1141-1164
- [9] B. Lindström, On the vector representations of induced matroids, Bull. Lond. Math. Soc. 5 (1973), 85–90
- [10] K. M. O’Hara, Unimodality of Gaussian coefficients: a constructive proof, J. Combin. Theory, Ser. A 53 (1990), 29–52.
- [11] I. Pak, G. Panova, Strict unimodality of q-binomial coefficients, J. Combin. Theory, Ser. A., vol. 147 (2017), 1–17.
- [12] D. Zeilberger, Kathy O’Hara’s constructive proof of the unimodality of the Gaussian polynomials, Amer. Math. Monthly 96 (1989), 590–602.

*Email address:* `esmirnov@hse.ru`