Множество Мандельброта

Владлен Тиморин

HSE University

Динамические системы

- Системы, меняющиеся со временем по одному и тому же закону.

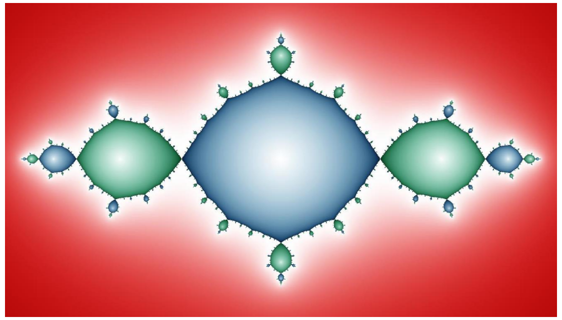
Динамические системы

- Системы, меняющиеся со временем по одному и тому же закону.
- Если время дискретно (скажем, может принимать только целые значения), то динамическая система описывается уравнением

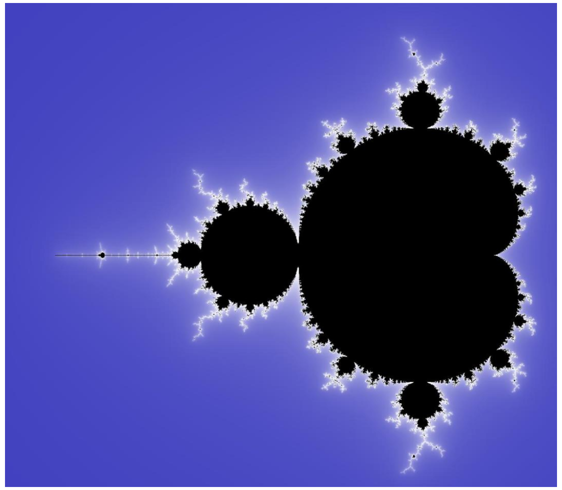
$$x_{n+1} = f(x_n),$$

где x_n – состояние системы в момент времени n.

Полиномиальная динамика на $\mathbb{C}$

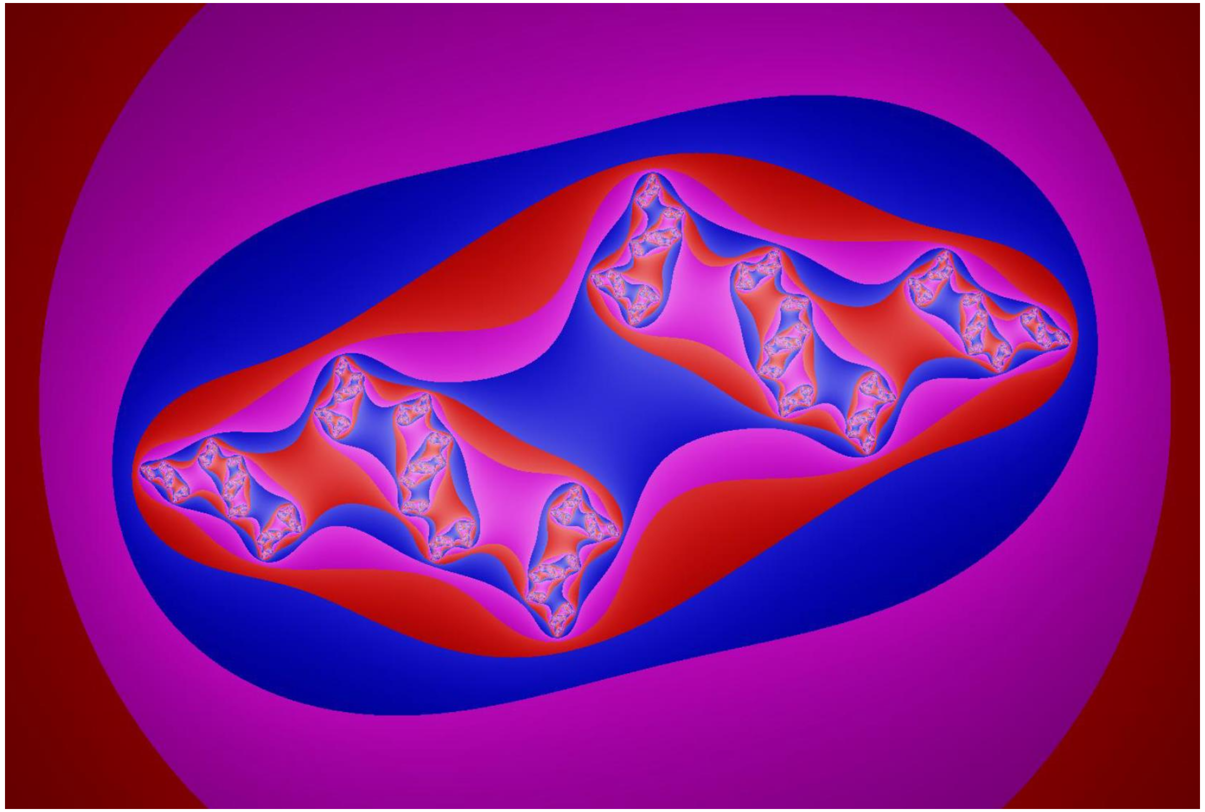


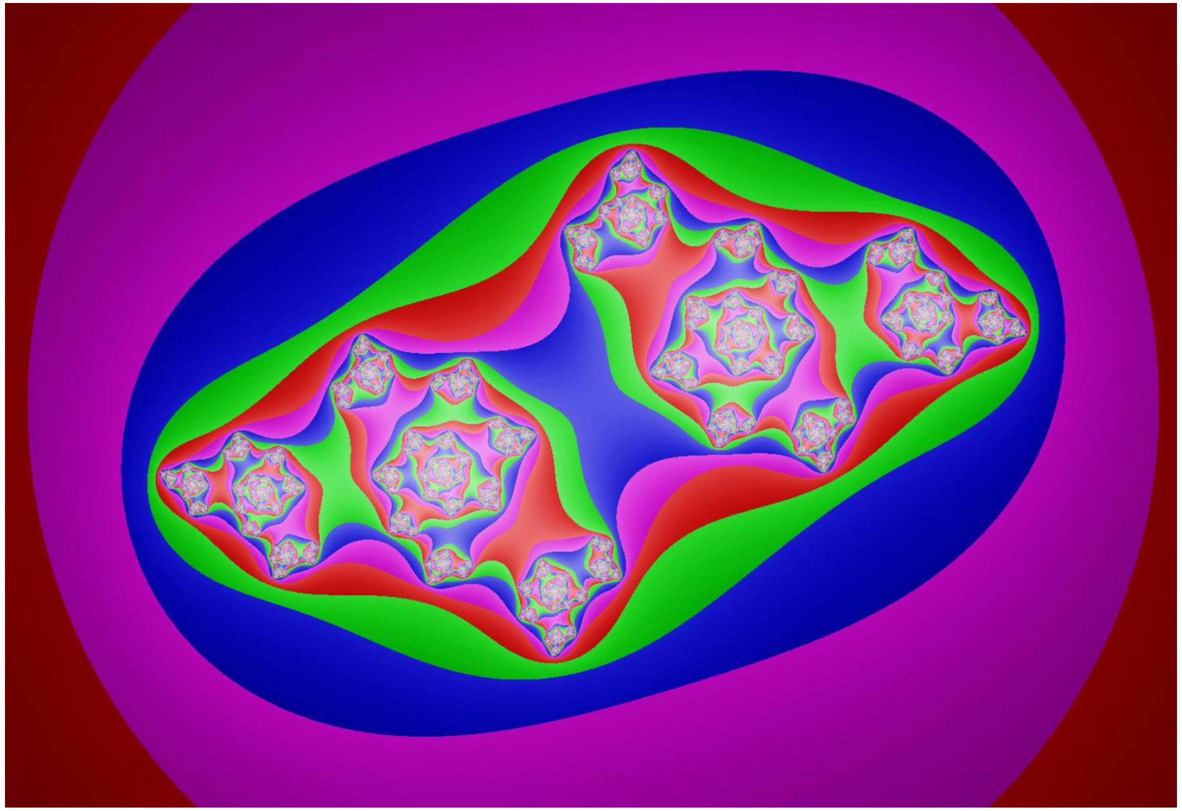
- Для многочлена $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ заполненное множество Жюлиа – это $K(P) = \{z \in \mathbb{C} \mid P^n(z) \nrightarrow \infty\}$.
- Множество Жюлиа $J(P) = \partial K(P)$, множество Фату $\mathbb{C}P^1 \setminus J(P)$.
- Любой квадратный многочлен приводится к виду $Q_c(z) = z^2 + c$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$.
- По определению, $c \in \mathcal{M}$ (множество Мандельброта), если $K(Q_c)$ связно.
- **Теорема**. $c \in \mathcal{M}_2 \iff Q_c^n(0) \nrightarrow \infty$



Некоторые несвязные множества Жюлиа

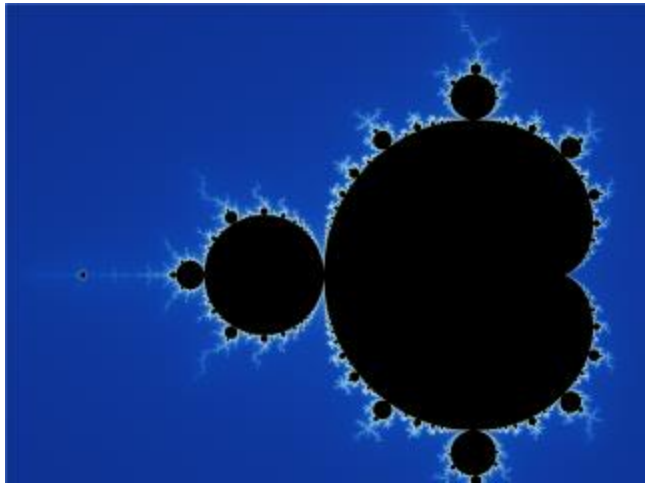
Лемма. *Если $c \in D$, то $Q_c^{-1}(D)$ связно, а иначе нет.*

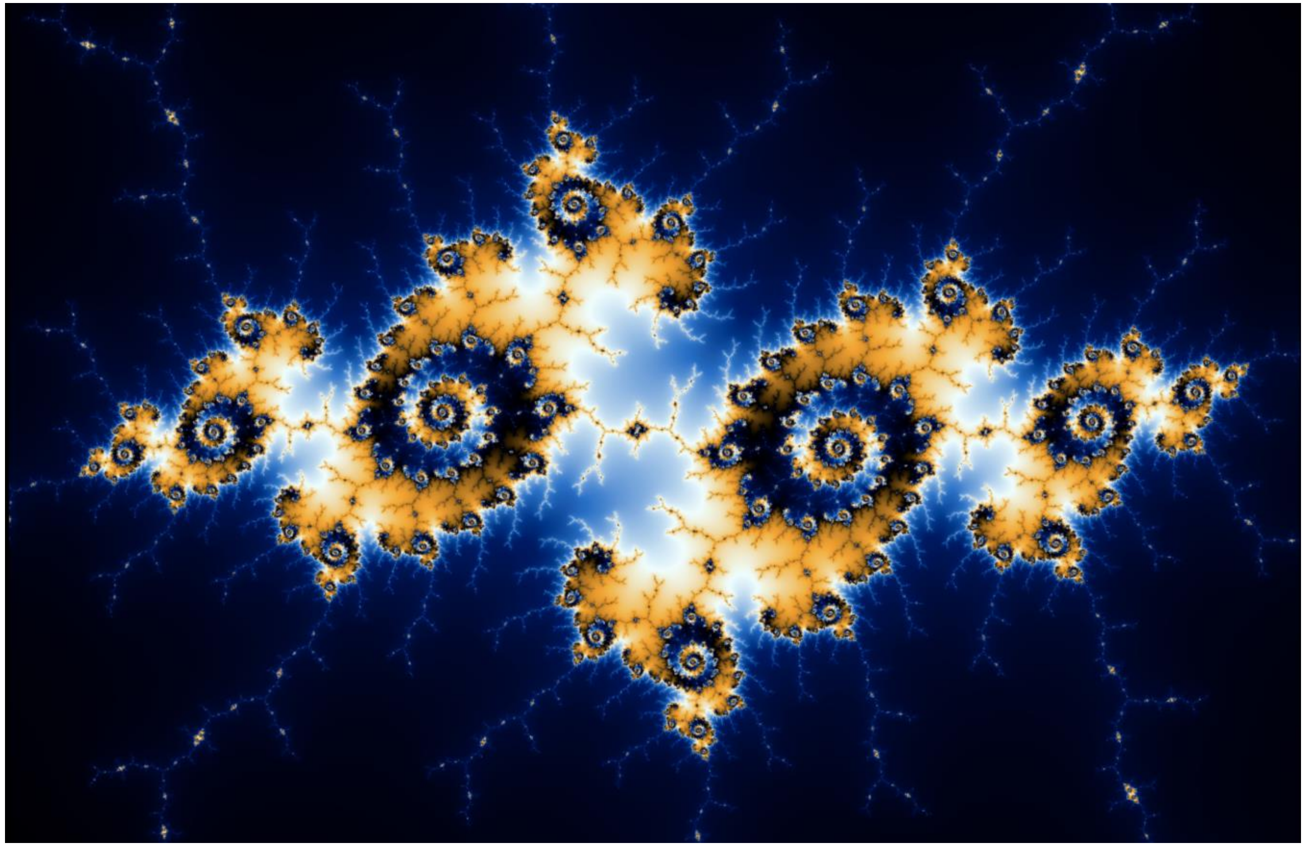




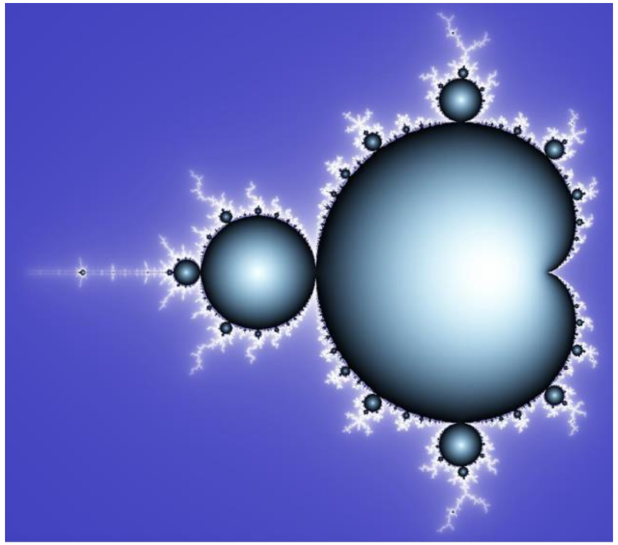
Множество Мандельброта

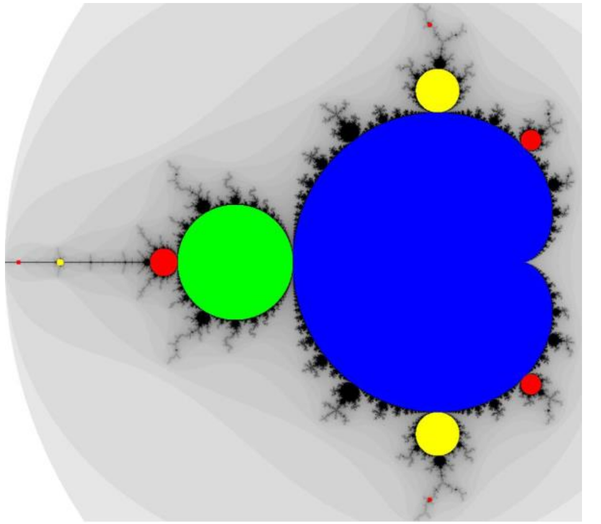
By Simpsons contributor at English Wikipedia - https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9277589





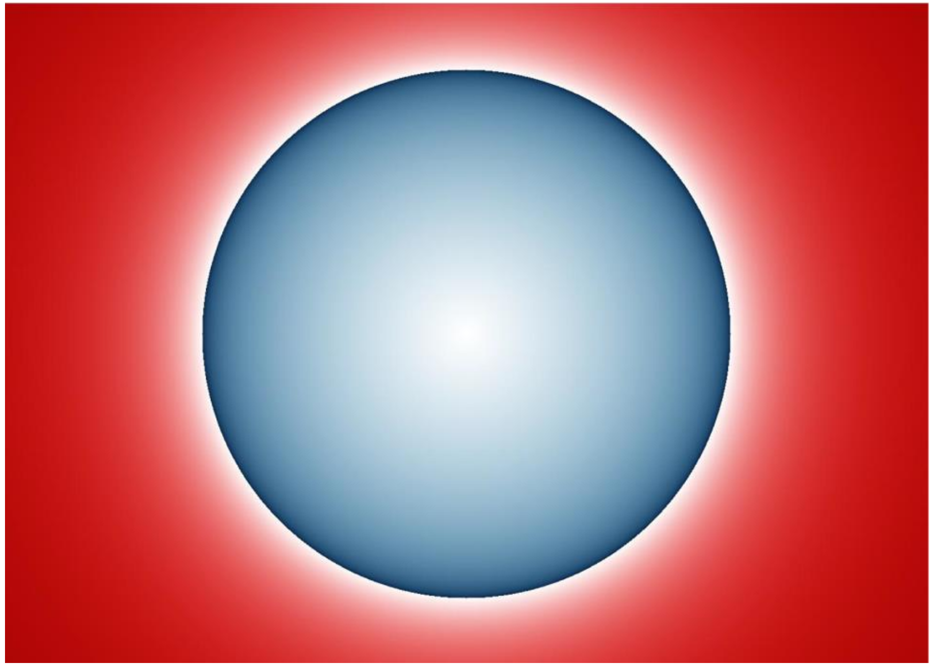
By Binette228 - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=31888310



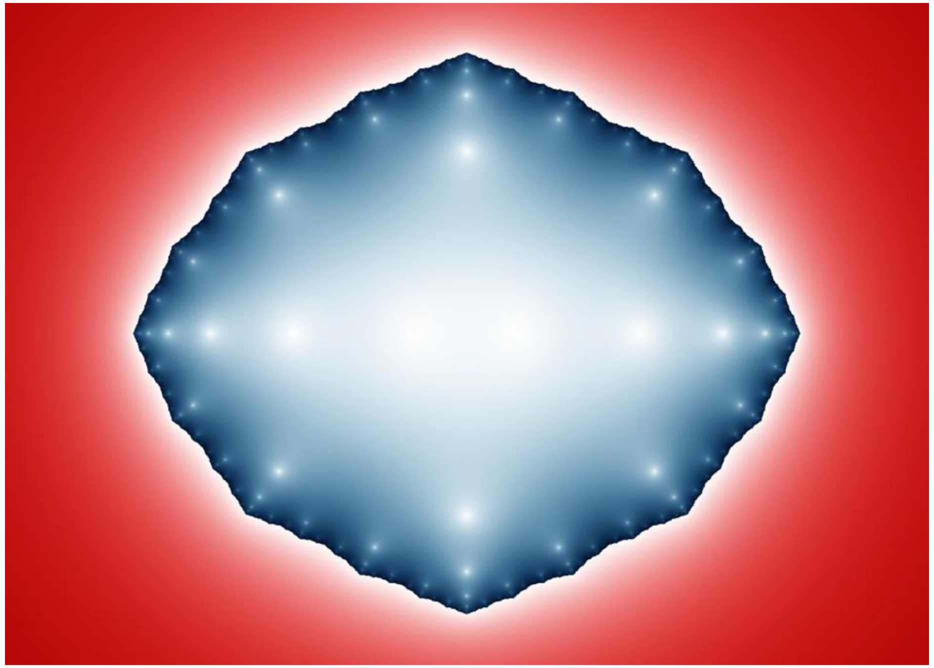


Некоторые множества Жюлиа

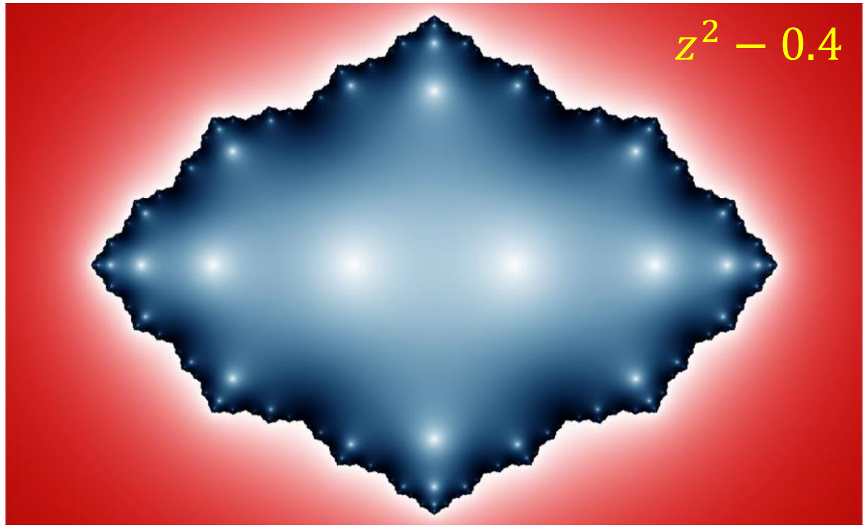
- Сверху: $K(z^2)$. Красные точки убегают на бесконечность. Синие точки притягиваются к 0.

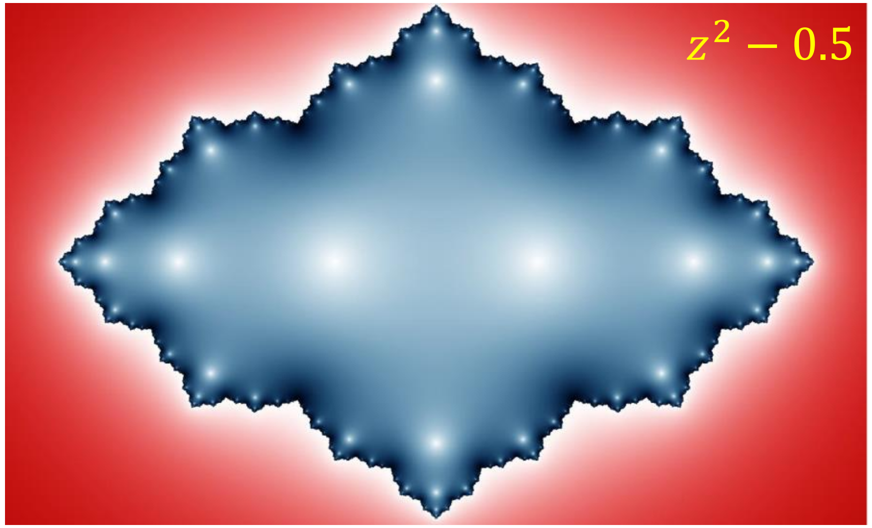


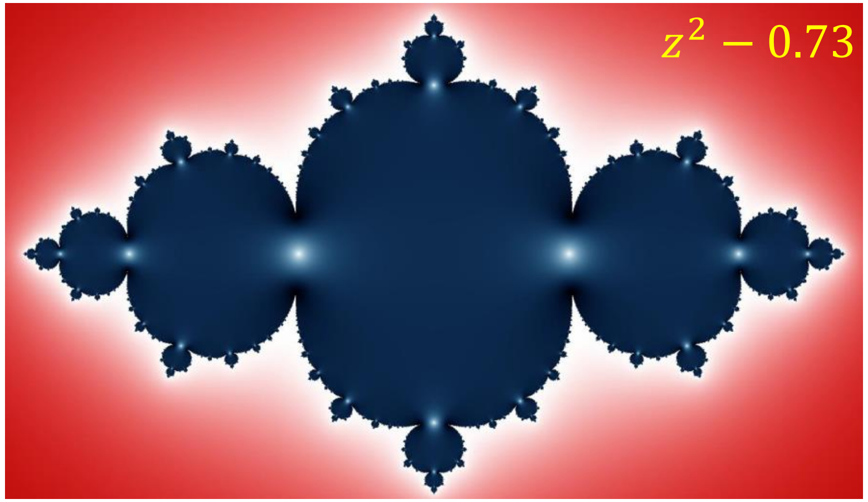
- Снизу: $K(z^2 - .2)$. Синие орбиты сходятся к притягивающей неподвижной точке вблизи 0.

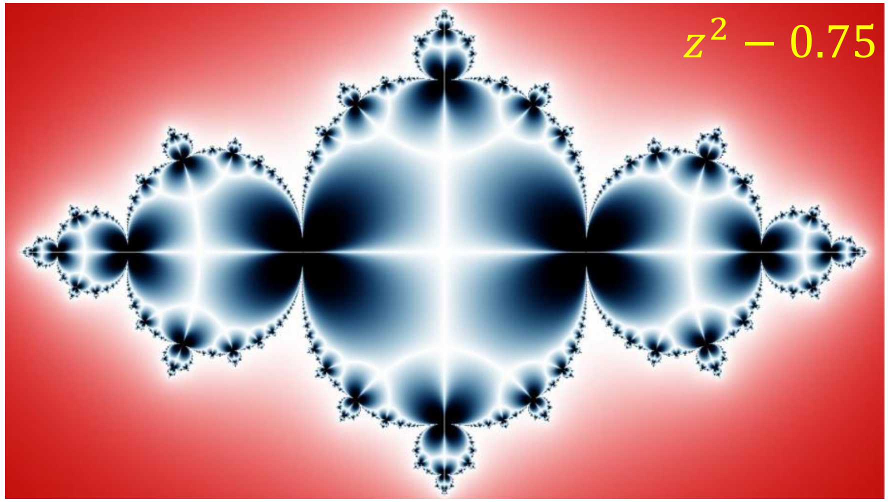


На пути к параболической бифуркации

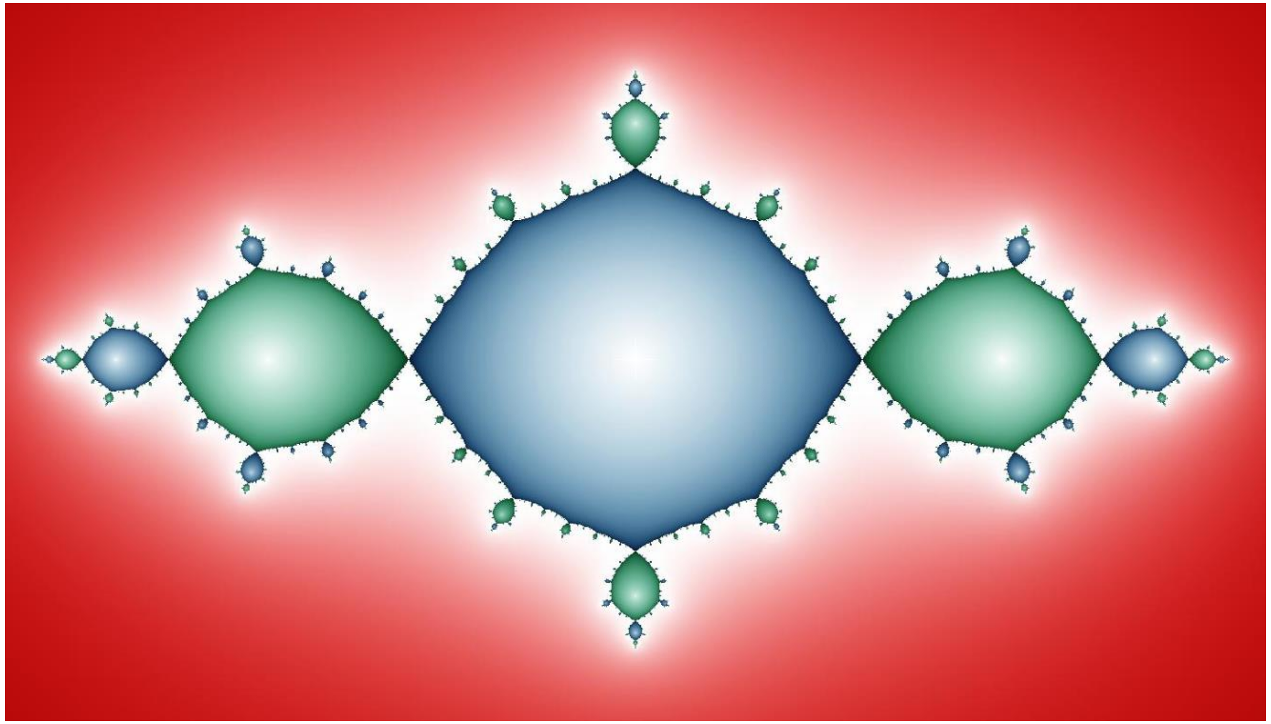


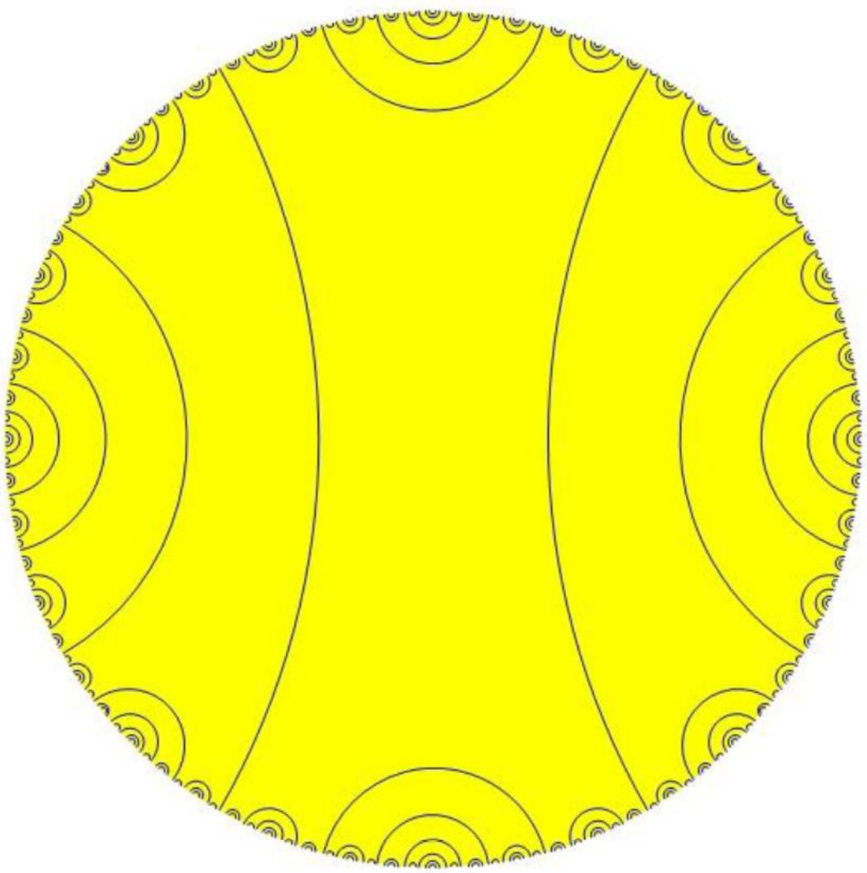




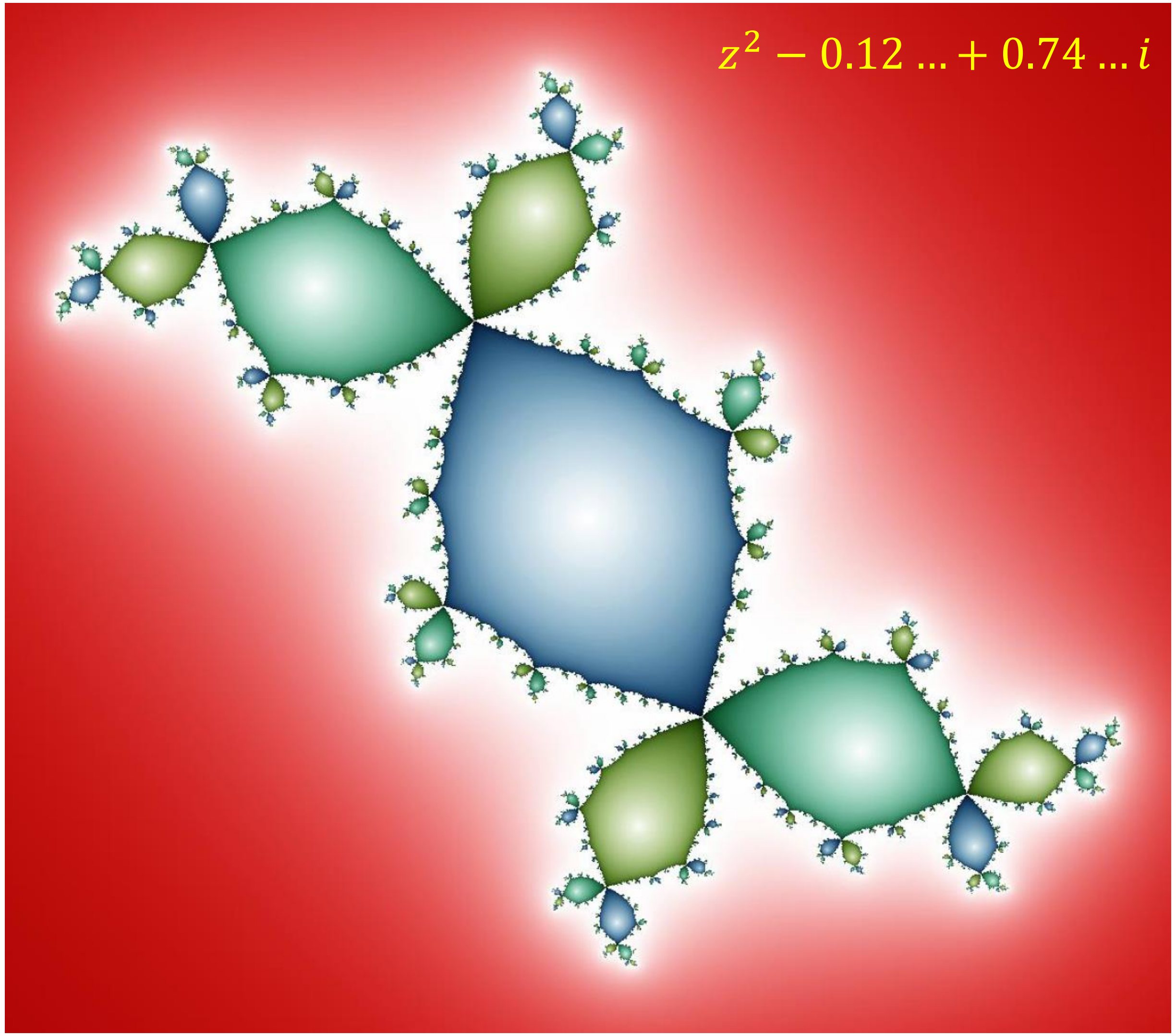


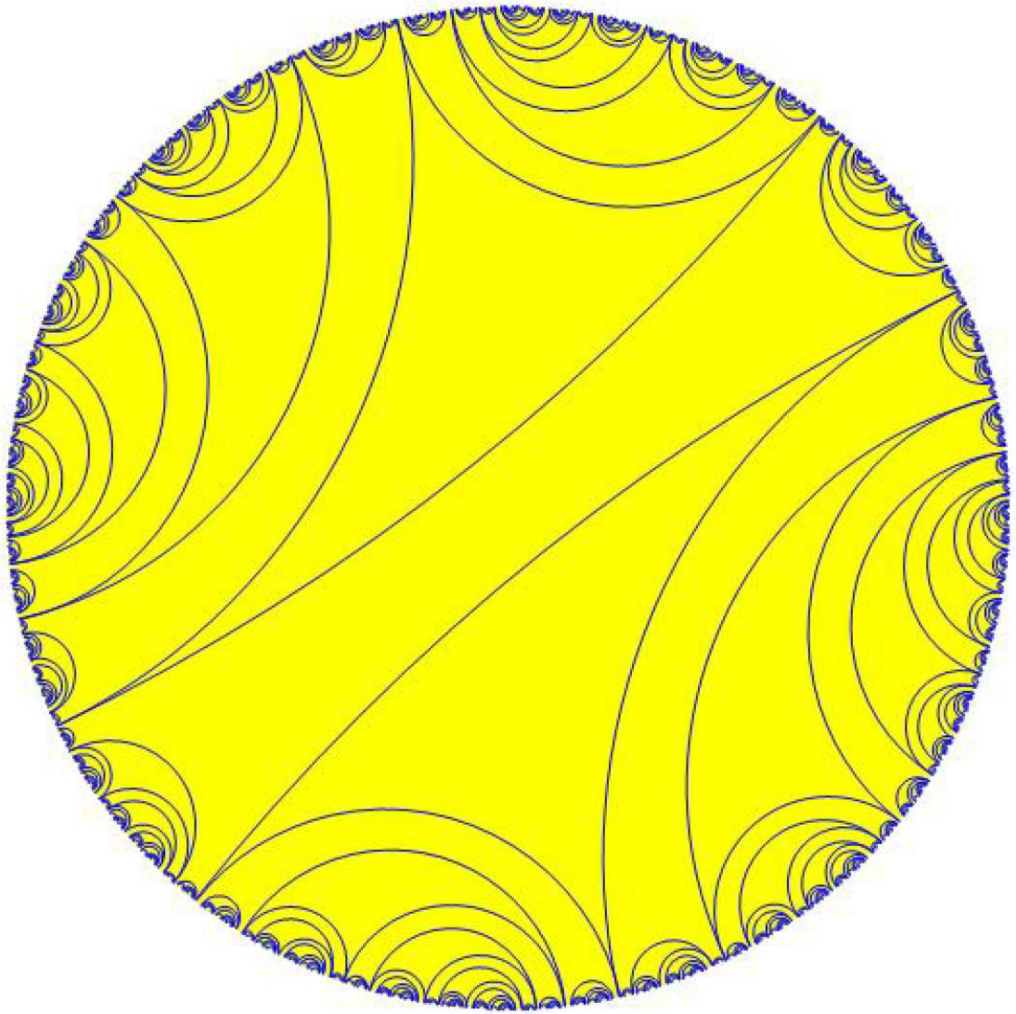
Множества Жюлиа и инвариантные ламинации Тёрстона: базилика



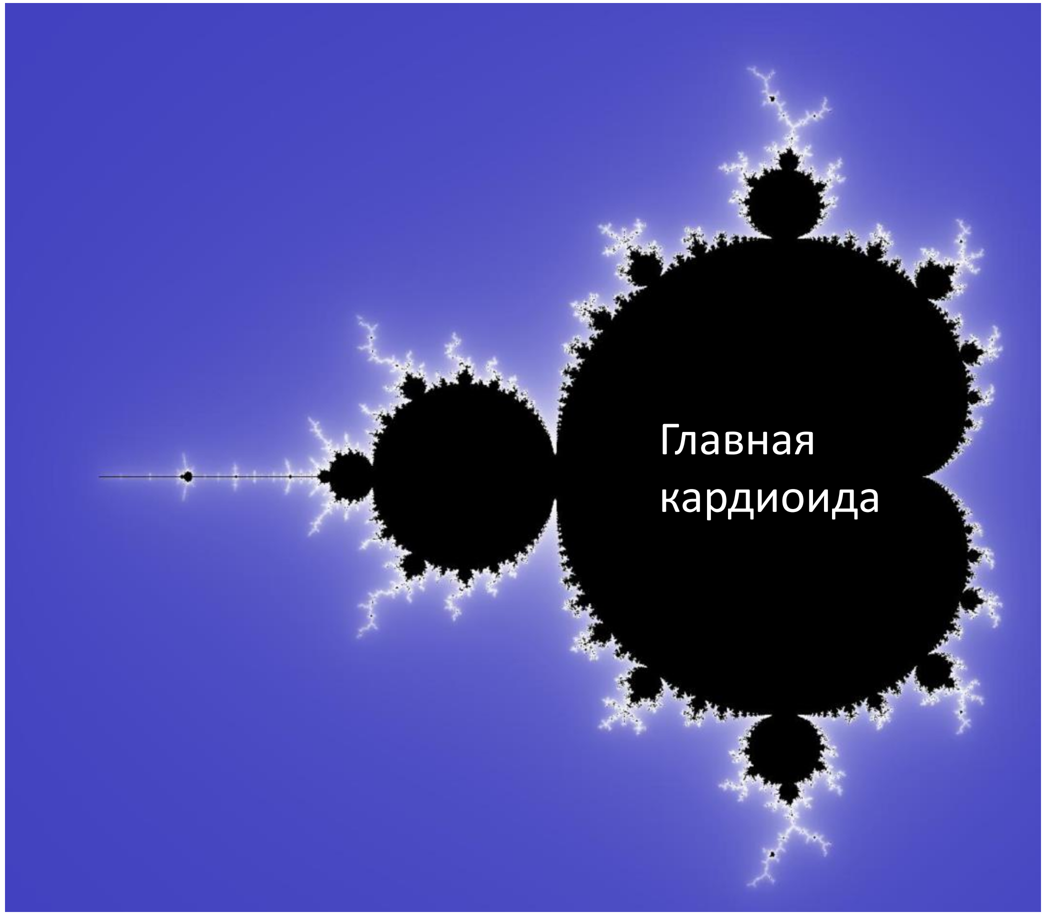


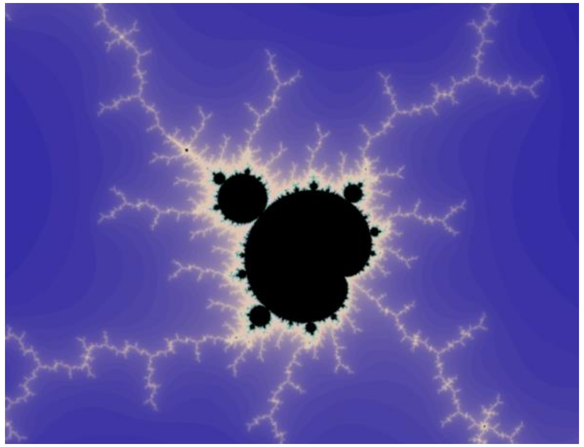
Кролик Дуади и его ламинация

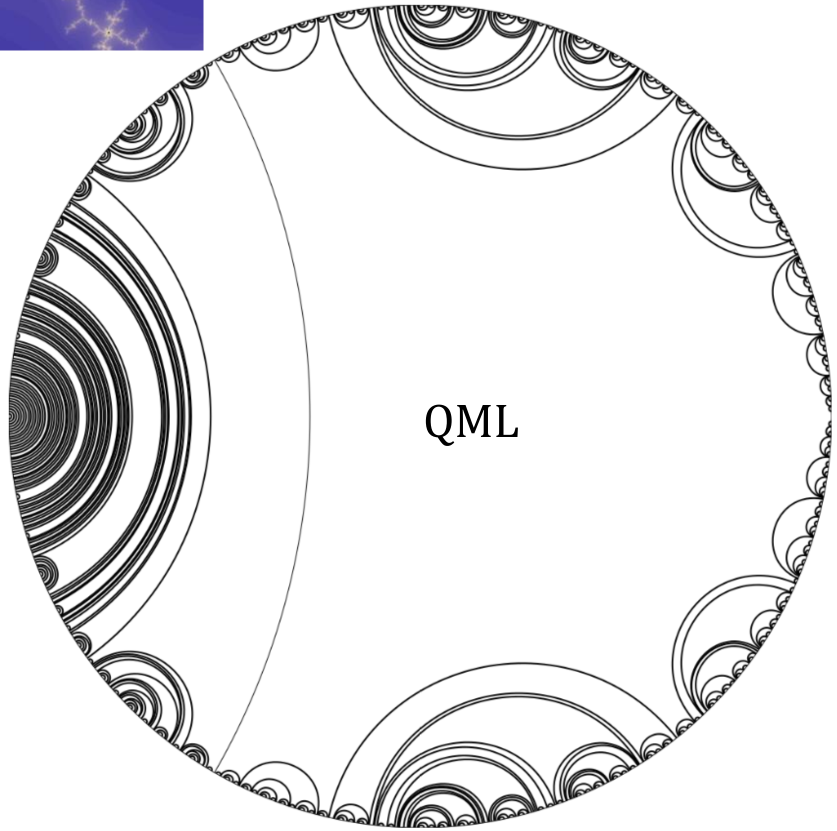




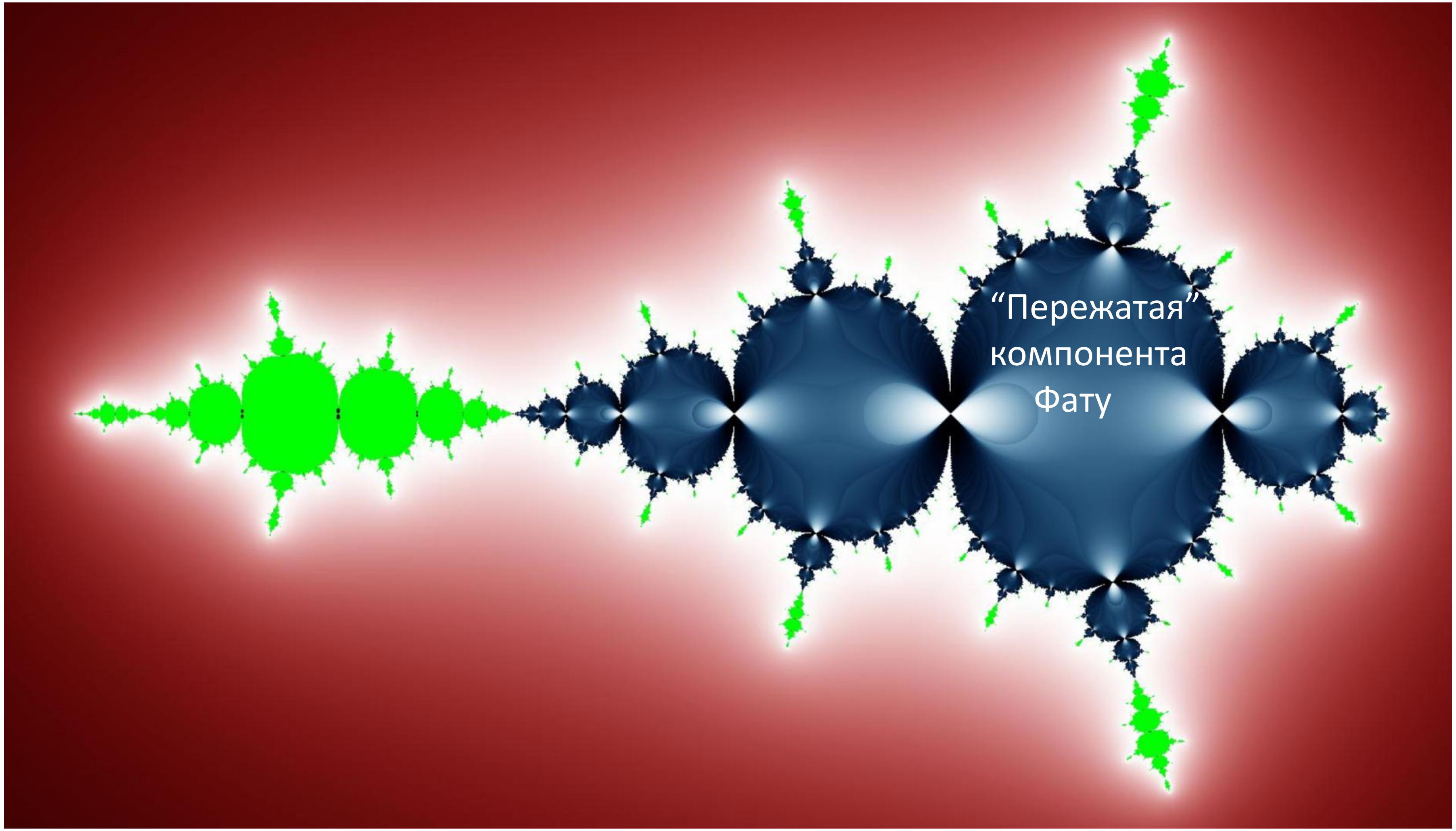
Множество $\mathcal{M}$







Тюнинг и ренормализация



Мандельбротики: конструкция Дуади-Хаббарда

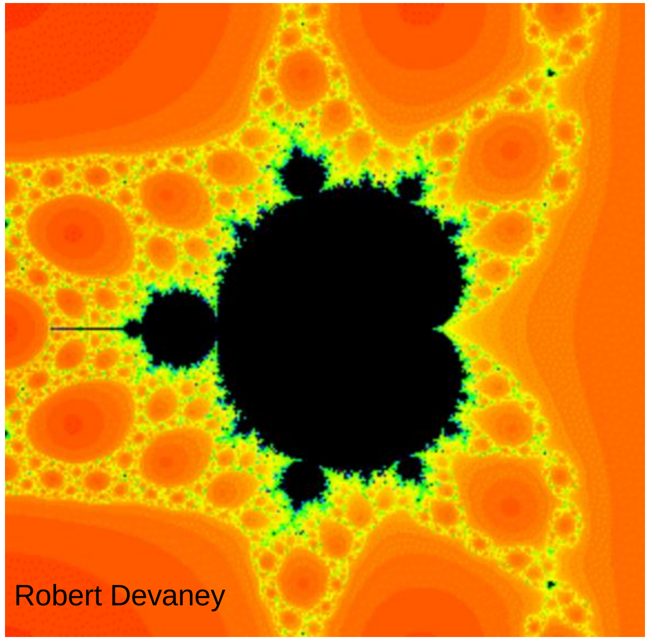
- Пусть точка 0 является периодической для Q_c.
- Непосредственный бассейн притяжения цикла $0, c, Q_c(c), \ldots$ – цикл Жордановых дисков.
- Заменим эти диски на $K(Q_{c'})$ – это называется тюнинг.
- Тюнинг задает копию множества $\mathcal{M}$, в которой роль главной кардиоиды играет компонента внутренности множества $\mathcal{M}$, содержащая точку c.
- Эти копии называются baby Mandelbrot sets (Мандельбротики).

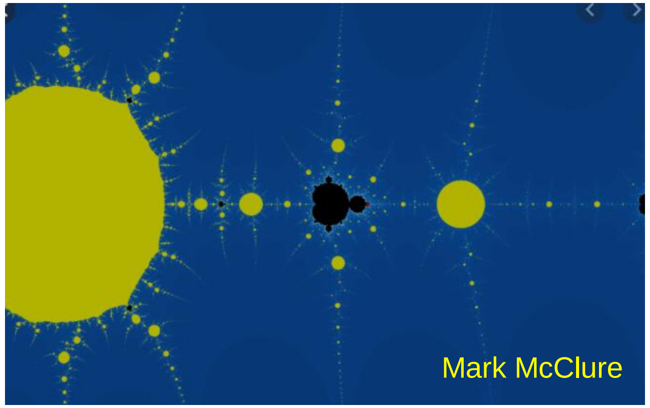
Множество $\mathcal{M}$ универсально (К. Макмюллен)

- Копии множества $\mathcal{M}$ возникают в общих аналитических семействах аналитических отображений:

$$e^z + c, \qquad z^4 + \frac{c}{z^4}, \qquad \text{и т. д.}$$

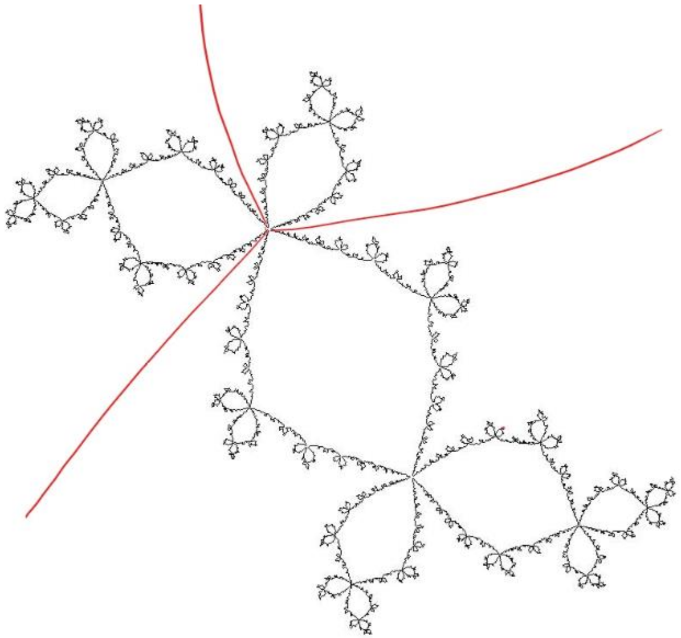
- Исключения: тривиальные пространства параметров (вообще нет бифуркаций), устойчиво кратные критические точки.

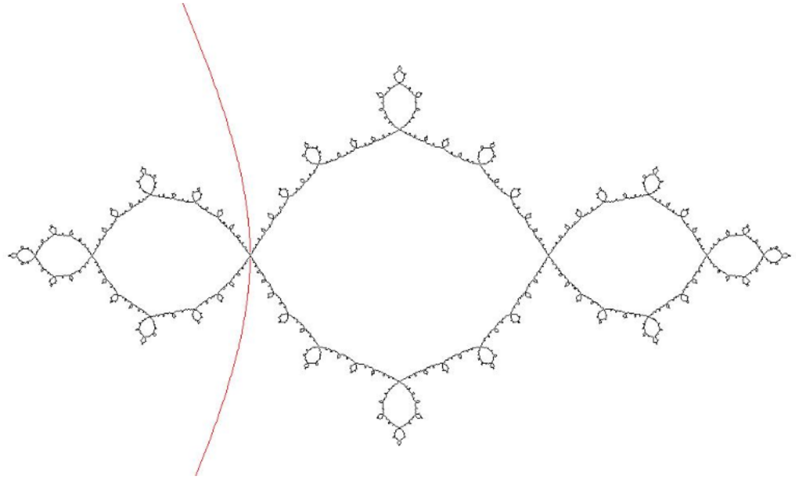




Внешние лучи

- Пусть $K(Q_c)$ связно.
- Отображение Римана $\psi_c: \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus K(Q_c)$ т.ч. $\psi_c(0) = \infty$ и $\lim\limits_{z \to 0} z \cdot \psi_c(z) > 0$ сопрягает $z \mapsto z^2$ с Q_c.
- Внешние лучи – образы радиальных интервалов: $R_c(\theta) = \psi_c\{te^{2\pi i\theta} \mid 0 < t < 1\}$
- Отталкивающая периодическая точка z многочлена Q_c задает один или несколько внешних лучей R, заканчивающихся в z, т.е. $\bar{R} \cap K(P) = \{z\}$.



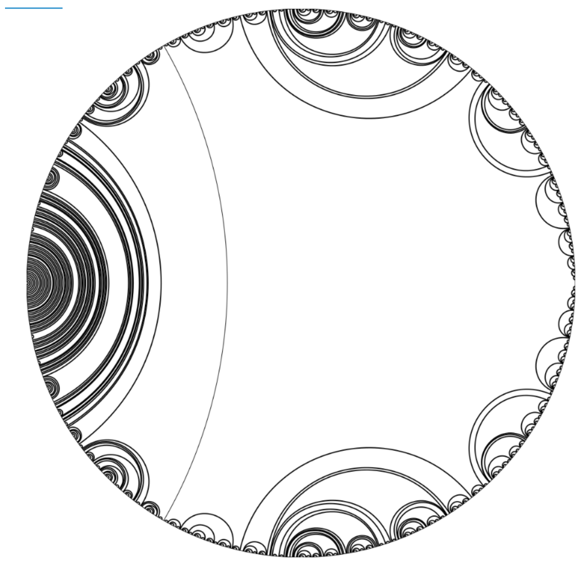


Ламинации Тёрстона для многочленов

- Если $J(Q_c)$ локально связно, то все лучи заканчиваются.
- Отношение эквивалентности $\sim_c$ на $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ определяется так: $\alpha \sim_c \beta$ если $R_c(\alpha), R_c(\beta)$ заканчиваются в одной точке.
- Геодезическая ламинация $\mathcal{L}_c$ состоит из сторон выпуклых оболочек (при отождествлении $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$) всех $\sim_c$-классов.
- Вообще, геодезическая ламинация – замкнутый набор хорд для $\mathbb{S}$, которые не пересекаются в $\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$.
- Можно определить $\mathcal{L}_c$ даже если $J(Q_c)$ не локально связно.

Ламинация квадратичных миноров (QML)

- Элементы ламинации называются листами. Замыкания компонент дополнения называются щелями.
- Отображение $\sigma_2 \colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ задано формулой $\sigma_2(z) = z^2$. Если $\ell = ab \in \mathcal{L}_c$, то положим $\sigma_2(\ell) = \sigma_2(a)\sigma_2(b)$.
- Пусть M_c – самый длинный лист в $\mathcal{L}_c$. Лист $m_c = \sigma_2(M_c)$ называется минором.
- Все миноры образуют ламинацию QML.



Спасибо за
внимание!