Задачи к курсу "Доказательство Гаусса Основной Теоремы Алгебры"

если задача решена — нарисуйте кошке мышку!

26 июля 2021 г.

Многочлены степеней 3 и 4

Упражнение 1. *а) Покажите, что произвольный многочлен степени 3 можно линейной заменой координат привести к следующему стандартному виду*

$$P(x) = x^3 + 3xr + 2s, \text{ где}$$

$$P(0) = 2s, \ P'(0) = 3r.$$

б) Предположим, что заданы вещественные числа $A, B \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие системе

$$A^3 + B^3 = -2s, \ AB = -r.$$

Тогда $x := A + B$ это корень уравнения $P(x) = 0$.
в) Пользуясь предыдущей системой, найдите коэффициенты квадратного многочлена

$$Q(x) = (x - A)(x - B).$$

Покажете, что дискриминант $D(Q)$ неотрицателен тогда и только тогда, когда

$$s^2 + r^3 \geq 0.$$

г) Покажите, что при $D(Q) \geq 0$ корень P задается следующей формулой

$$x = \sqrt[3]{-s + \sqrt{s^2 + r^3}} + \sqrt[3]{-s - \sqrt{s^2 + r^3}}.$$ *

Если $D(Q) = 0$, то эта формула дает корень, не являющийся двойным.

Упражнение 2. *Аналогичным образом постройте формулу для корня многочлена*

$$x^5 - 5ax^3 + 5ax^2 - 2b = 0$$

Упражнение 3. *а)Пусть теперь $s, r \in \mathbb{C}$ произвольные комплексные числа, для которых*

$$s^2 + r^3 \neq 0, \ r \neq 0.$$

Пользуясь формулой Муавра покажите, что для $u^3 = -s + \sqrt{s^2 + r^3}$ формула

$$x = u - \frac{r}{u}$$

определяет все три комплексных корня многочлена $P(x)$.
б) Докажите, что для корня z уравнения $z^3 - 3(a^2 + b^2)u - 2b(a^2 + b^2) = 0$ выполнено

$$\sqrt[3]{a + bi} = \frac{u(a + bi) + u^2 i}{2a\sqrt[3]{a^2 + b^2}}.$$

Упражнение 4. *а) Покажите, что $x = sin(\phi)$ является корнем кубического многочлена*

$$P(x) = 4x^3 - 3x + sin(3\phi).$$

б) Приведите кубический многочлен $P(x) = x^3 + 2rx + 3s$, для которого $r < 0$, к виду

$$4x^3 - 3x + const.$$

в) Докажите, что эта константа не превышает 1 по модулю тогда и только тогда, когда

$$s^3 + r^3 \leq 0.$$

Напишите формулу для корня $P(x)$ при $s^3 + r^3$, не использующую комплексных чисел.

Джироламо Кардано
1501—1576

Никколо Тарталья
1500—1557

5 упр.

Уравнение

$$x^3+9x+26=0$$

можно решить явно по формуле (*), поскольку все кубические и квадратные корни извлекаются:

$$x=\sqrt[3]{-13+\sqrt{27+169}}+\sqrt[3]{-13-\sqrt{27+169}}=\sqrt[3]{-13+14}+\sqrt[3]{-13-14}=$$
$$=\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{-27}=1-3=-2.$$

Найдите бесконечно много кубических уравнений, коэффициенты p и q которых не равны нулю и которые обладают тем же свойством.

Упражнение 6. *Опишите область в $\mathbb{R}^2_{r,s}$, точки которой отвечают многочленам*

- *не имеющим локальных экстремумов;*
- *имеющим два локальных экстремума и один вещественный корень;*
- *имеющим три вещественных корня.*

Опишите, как меняется график многочлена $P_{r,s}(x)$ при движении по прямой $l_x \subset \mathbb{R}^2_{r,s}$.

Теперь четвертая степень!

Упражнение 7. *а) Приведите многочлен $P(x)=x^4+ax^2+bx+c$ к виду*

$$P(x)=(Q(x))^2-H(x),\ deg\ Q,H=2.$$

б) Запишите дискриминант квадратного многочлена $H_t(x):=(Q(x)+t)^2-P(x)$

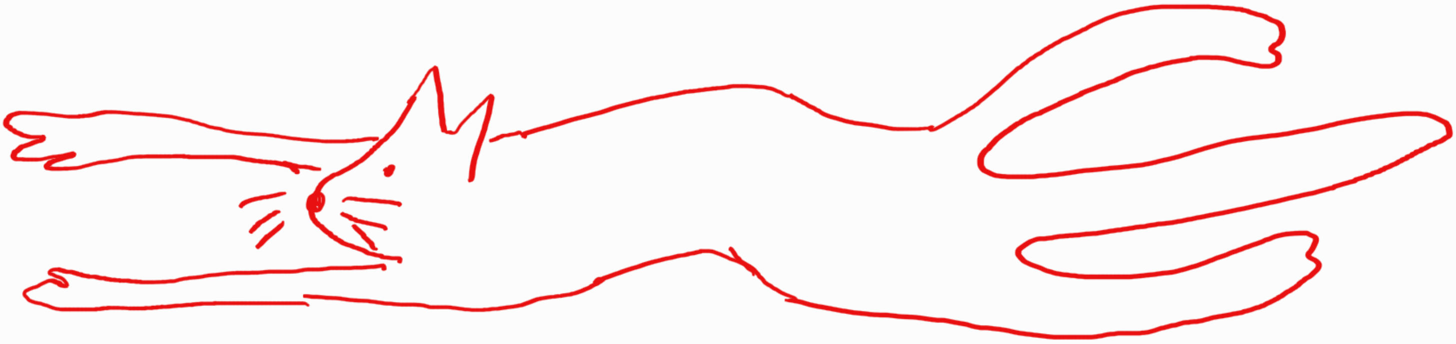
$$G(t):=D(H_t(x))$$

как кубический многочлен от t. Пользуясь формулами для корней кубического уравнения найдите значение t_0, для которого $D(H_{t_0}(x))=0$, то есть H_{t_0} является полным квадратом.
в) Найдите формулу для корня уравнения $P(x)=0$.

Упражнение 8. *Обозначим за u сумма произвольных двух корней $P(x)$. Докажите, что*

$$\exists\alpha,\beta\in\mathbb{C}:P(x)=(x^2+ux+\alpha)(x^2-ux+\beta).$$

б) Выведите кубическое уравнение на u^2 и покажите, что $P(x)$ разрешимо в радикалах.



9 упр. Пусть m, n, k — такие целые числа, что mnk является точным квадратом. Найдите уравнение $x^4+px^2+qx+r=0$ с рациональными коэффициентами p, q, r, для которого $\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{k}$ является корнем.

Указание. Найдите уравнение четвертой степени, для которого кубическое уравнение $(x+m)(x+n)(x+k)=0$ является вспомогательным.

(**) Геша и Рада идейные вдохно-вительницы этого листка.

Составители: Ваня + Женя