Теорема Абеля

Упражнение 10. *Докажите, что при $n \geq 5$ группа четных перестановок A_n совершенна*

$$A_n = [A_n, A_n] := \{\sigma = \alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} \circ \beta^{-1} |\ \alpha, \beta \in A_n\}.$$

Упражнение 11. .

Докажите, что существует ровно четыре перестановки (i_1, i_2, i_3, i_4) элементов множества $\{1, 2, 3, 4\}$, которые могут быть представлены в виде произведения коммутаторов четных перестановок (на самом деле они являются коммутаторами четных перестановок). Докажите это и найдите эти четыре перестановки.

Упражнение 12. .

Рассмотрим кубическое уравнение

$$x^3 + ax - 1 = 0.$$

При $a = 0$ у этого уравнения три корня: 1, $\varepsilon_3 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ и $\bar{\varepsilon}_3$.

(а) При каких значениях a у этого уравнения есть двойные корни (то есть чему равны «опасные значения» a)?

(б) Одно из этих опасных значений a действительно (и отрицательно). Если a обходит петлю вокруг этого опасного значения, начинающуюся в точке 0 (как изображено на третьем рисунке в верхнем ряду на рис. 5.11), то какая перестановка корней образуется в результате?

(в) Покажите, что любая перестановка корней может быть получена из петли, начинающейся в точке $a = 0$, не проходящей через опасные значения a и возвращающейся в 0.

Метод Ньютона

Метод Ньютона – итеративная процедура поиска корня уравнения $f(x) = 0$, в котором

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n).$$

Упражнение 13. *Получите приближение для $\sqrt{5}$, используя метод Ньютона.*

Упражнение 14. ***Оператор Ньютона*** *T для функции f определяется формулой*

$$T(x) = x - f(x)/f'(x).$$

Покажите, что $T'(r) = (k-1)/k < 1$, где r – корень f кратности k.

Бассейн сходимости корня x уравнения $f(x) = 0$ это множество точек x_0, для которых метод Ньютона даёт данный корень, то есть последовательность x_n сходится к x.

Упражнение 15. *Найти бассейны сходимости для вещественного многочлена*

$$f(x) = x^3 - x.$$

Упражнение 16. *Рассмотрим преобразование, заданное формулой $M(z) = \frac{z-1}{z+1}$ и обратное к нему $M^{-1}(u) = \frac{1+u}{1-u}$ (преобразование Мёбиуса и обратное). Проверьте, что выполнено*

$$R(u) = u^2, \text{ где } R = M \circ T \circ M^{-1}(u).$$

Упражнение 17. *Исследовать бассейны сходимости для комплексного многочлена $z^5 - 1$.*

Векторное поле v – это отображение, которое каждой точке x рассматриваемого пространства ставит в соответствие касательный вектор $v(x)$ с началом в этой точке. Кривая

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$$

называется интегральной траекторией векторного поля v, если для любого $t \in [0, 1]$ выполнено

$$\partial\gamma/\partial t|_{t_0} = v(\gamma(t_0)).$$

Упражнение 18. *Постройте траектории векторного поля $\frac{z^2}{1+\lambda z}\frac{\partial}{\partial z}$, а также поля $\frac{z}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}$. Для второго поля рассмотрите зависимость решения от знака параметра*

$$Re(\lambda) > 0, < 0, = 0.$$