ТЕОРЕМА АБЕЛЯ-РУФФИНИ

0) Введение

Рассмотрим многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$

Мы хотим по его коэффициентам понять, как устроено мн-во его корней $/\mathbb{R}$ и $/\mathbb{C}$.

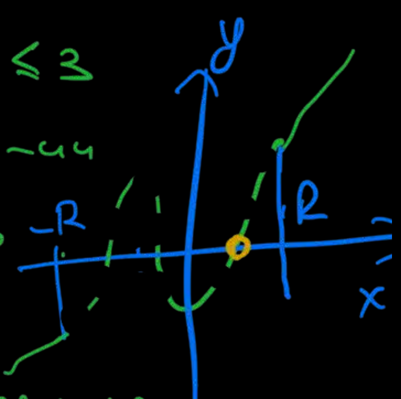
На этой лекции мы разберем случаи разных малых степеней и попробуем понять, почему этот вопрос не такой тривиальный

$\deg P = 1, 2$ – эти случаи вы очень подробно разбирали в школе, там существует исчерпывающий ответ, так как существует формула для корней.

$\deg P = 3$ две очевидных замечания

✓ по т-ме Безу # корней ≤ 3

✓ по т-ме о промежуточном зн-ии $\exists$ вещественный корень



Вопрос Существует ли формула, которая по коэффициентам P выдает его корни

Доказательство!

Приведем P к виду $P(x) = x^3 + 3rx + 2s$
(растяжение позволяет приравнять коэф-т при x^3 к 1, сдвиг позволяет убить x^2)

Будем искать корень в виде $x = A + B$

Тогда $x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx \Rightarrow$ достаточно решить

$$A^3 + B^3 = -2s \qquad AB = -r$$

Т.е. A^3 и B^3 это решения кв-го ур-ия $x^2 - 2sx - r^3 = 0$

с дискриминантом $D = 4s^2 + 4r^3$. Если $D \geq 0$,

то получаем
$$x = \sqrt[3]{-s + \sqrt{s^2 + r^3}} + \sqrt[3]{-s - \sqrt{s^2 + r^3}}$$

История про матбой

Упр Рассмотрим произвольное уравнение степени 4, записанное в виде
$$P(x) = x^4 + px^2 + qx + u$$
Для произвольного параметра t существует разложение
$$P = Q^2 - H = (Q+t)^2 - H_t, \quad \deg Q, H = 2$$
$D(H_t) \equiv 0$ это кубическое уравнение на t

Пользуясь формулой выше можно найти t_0

Тогда $P = Q_1^2 - H_1$ - сумма квадратов

Таким образом, существует явная формула выдающая по коэффициентам мн-на степени 4 его корни. Оказывается, что для многочленов степени 5 это не так
До конца лекции мы это докажем
Это версия т-мы Абеля-Руффини

---

① Дискриминант кубического ур-ия

Формула * не всегда помогает вычислить корни, т.к. выдает их в странном виде

Например, для $P(x) = (x-1)(x^2+x+4) = x^3+6x-2$

$$x = 1 = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

На самом деле, это общий факт:
P имеет единственный вещ. корень $\Leftrightarrow s^2+r^3>0$

У формулы x есть теоретический смысл, причем важно не то, как она работает, а то как она не работает, т.е. когда дает "комплексные" значения для вещ корней

Я утверждаю, что уравнение $s^2+r^3=0$

определяет $\boxed{\text{дискриминантное мн-во}}$

в пространстве многочленов, т.е.

отвечает многочленам с кратными корнями.

Элементарное замечание

x кратный корень мн-на $P \iff \begin{cases} P'(x)=0 \\ P(x)=0 \end{cases}$

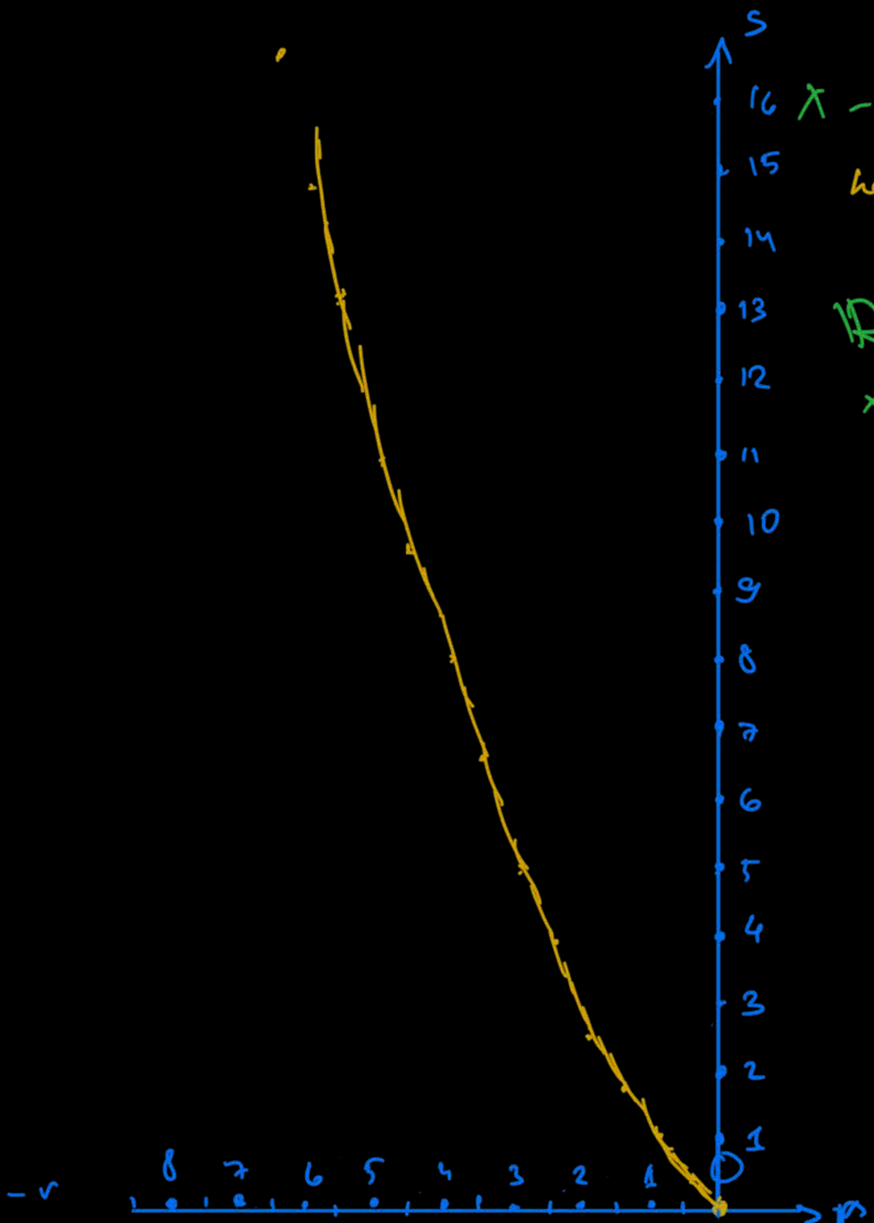
Вычислим:

$$\begin{cases} P(x)=0 \\ P'(x)=0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x^3+3rx+2s=0 \\ 3x^2+3r=0 \end{cases}} \iff \begin{cases} s=x^3 \\ r=-x^2 \end{cases} \iff s^2+r^3=0$$

Сейчас мы рассмотрим специфическую пл-ть $\mathbb{R}^2_{s,r}$ заданную многочленом $D(s,r)=s^3+r^3$.

Если это уже всё очевидно, то можно избежать $\deg P=4$

Как выглядит мн-во нулей D на $\mathbb{R}_{r,s}$?



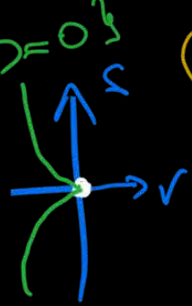
x – естественный параметр на Δ

$\mathbb{R} \xrightarrow{\simeq} \Delta$

$x \mapsto (x^3, -x^2)$

Очевидно, Δ лежит в левой полуплоскости и симметрично относительно оси O_r

$\Delta = \{D=0\}$



алгебраическая кривая

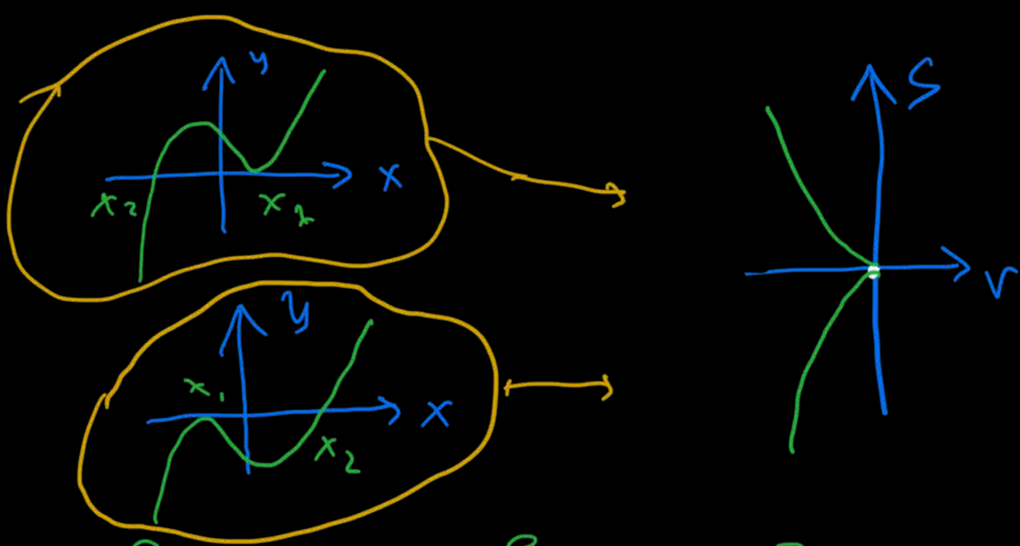
$(r,s)\in\Delta \Leftrightarrow P_{r,s}$ имеет кратный корень

$\Leftrightarrow$ # разных корней $P_{r,s}$ из $\mathbb{R} \le 2$, $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} = 0$

~~Как~~ Вопрос: отличить значения $(r,s)\in\Delta\setminus\{(0,0)\}$ лежащие на верхней и нижней полуветвях?

Что происходит в нуле?

По т-ме Виета, сумма корней P равна 0 $\Rightarrow$ для кратного корня x_1 второй корень x_2 равен $-2x_1$.



Теперь поймем, чему отвечают области „внутри" и „снаружи" клюва.

Рассмотрим отображение $\Phi: \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^2_{r,s} \xrightarrow{(x,r,s)\mapsto x^3+3rx+2s} \mathbb{R}$

Мы можем думать про Φ двумя способами:

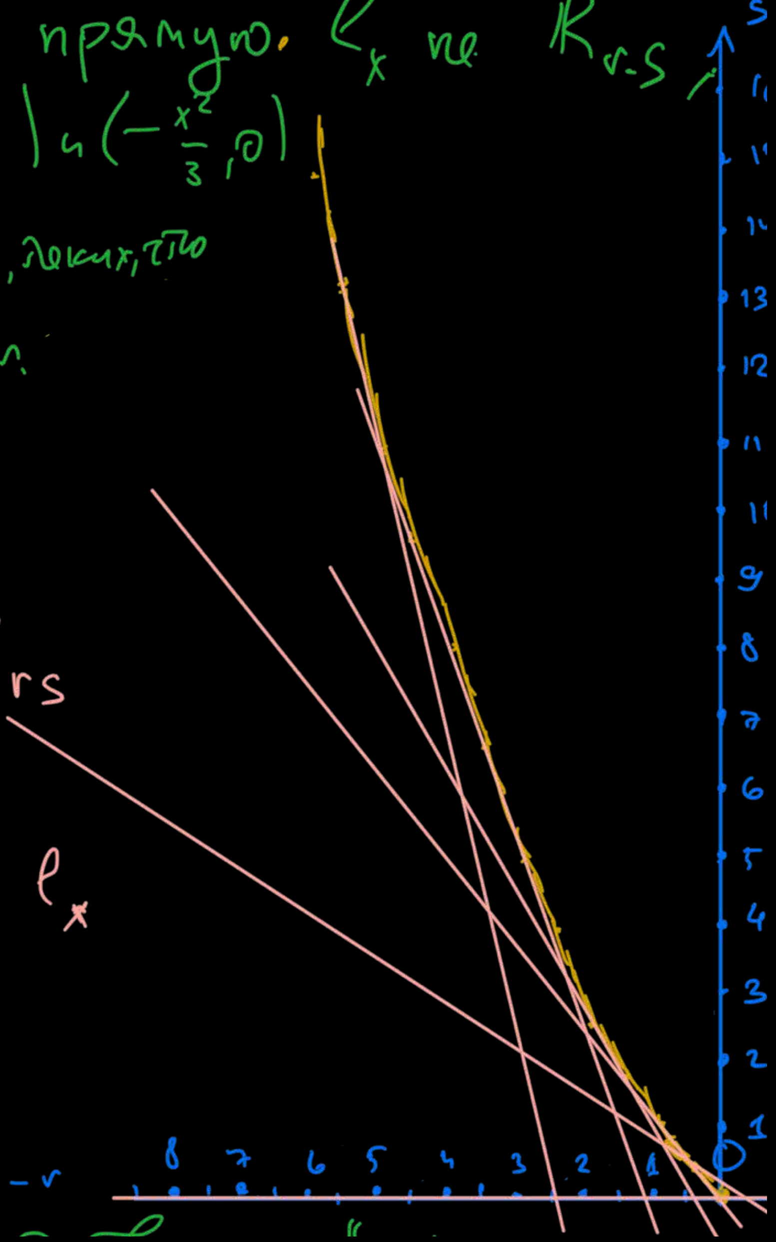
- как про семейство кубических ур-ий $P_{r,s}$ параметризованное плоскостью $\mathbb{R}^2_{r,s}$
- как про семейство линейных уравнений f_x параметризованное прямой $\mathbb{R}_x$

$$f_x(r,s) = 3rx + 2s + x^3.$$

$\{f_x = 0\}$ определяет прямую ℓ_x на $\mathbb{R}_{r,s}$, проходящую через $\left(0, -\frac{x^3}{2}\right)$ и $\left(-\frac{x^2}{3}, 0\right)$

ℓ_x – мн-во пар (r,s), таких, что x является корнем $P_{r,s}$.

Это способ „изобразить" кривую Δ на $\mathbb{R}^2_{rs}$ – „нарисовать" на плоскость прямые ℓ_x



Эти 2 взгляда „двойственны". А именно:

Кривая Δ - „огибающая семейства" ℓ_x

В данном случае это значит, что мн-во прямых ℓ_x это в точности мн-во касательных к кривой Δ

Замечание 1 В прошлый раз был задан вопрос: пусть (r_t, s_t) - путь по $\mathbb{R}^2 - \Delta$, $(r_t, s_t) \in \ell_t \cap \tilde{\ell}_t$, $\ell_0 \neq \tilde{\ell}_0$. Почему в этом случае $\ell_1 \neq \tilde{\ell}_1$.

Почему так? Для параметра $x \in \mathbb{R}$ рассмотрим единственное пересечение прямых

$$(r(\varepsilon), s(\varepsilon)) = (r, s) + \varepsilon(r', s') + O(\varepsilon^2) \in \ell_x \cap \ell_{x+\varepsilon} \quad 0 < \varepsilon < 1$$

Рассматриваем траекторию $(r(\varepsilon), s(\varepsilon)) \in \mathbb{R}^2$

$$\forall \varepsilon \quad f_{x+\varepsilon}(r(\varepsilon), s(\varepsilon)) = f_x(r(\varepsilon), s(\varepsilon)) = 0$$

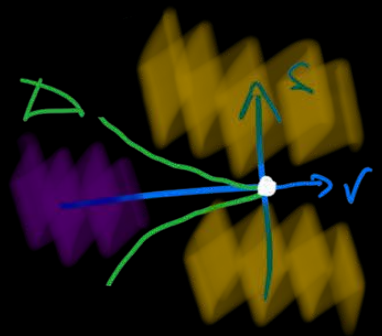
получаем, что $(r, s) \in \Delta$

$$x^3 + 2rx + 3s = 0 \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x^2 + 2r + 2r'x + 3s' = 0 \\ 2r'x + 3s' = 0 \end{cases}$$

Это означает, что для $(r,s)\in \mathbb{R}^2_{r,s}$

$P_{r,s}(x)=0 \Leftrightarrow (r,s)\in \ell_x \Leftrightarrow (r,s)$ лежит на касательной к точке на Δ с параметром x

т.е. вещественные корни $P_{r,s}$ это касательные к Δ, проведенные из (r,s)

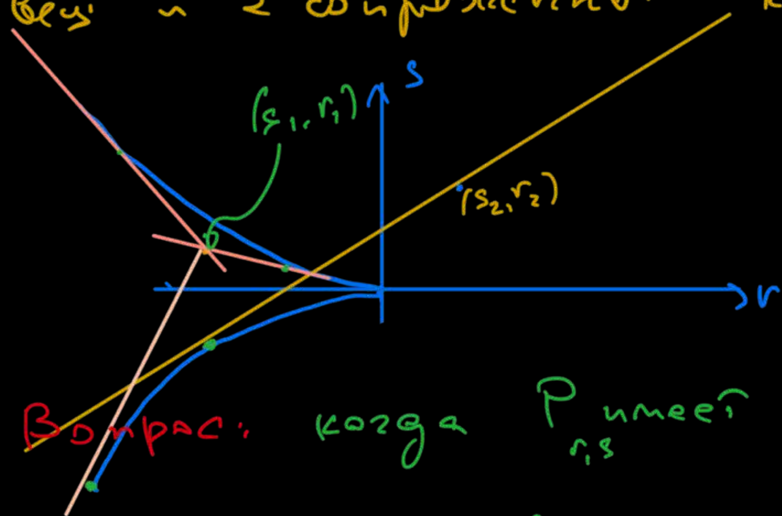


Заметим, что для (r,s)

- касательная к Δ одна, если (r,s) лежит в желтой области
- касательных 3, если лежит в фиолетовой

3 вещ. корня

1 вещ. и 2 комплексных сопряженных корня.



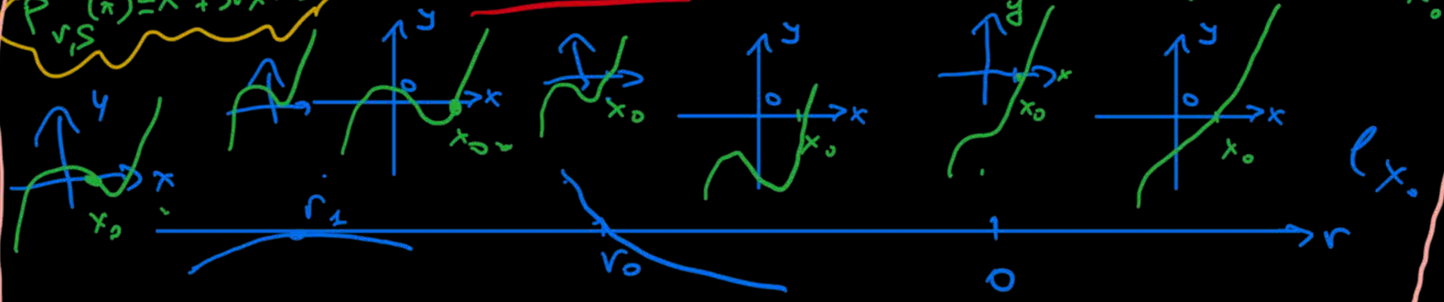
Для касательной ℓ_x, содержащей (s,r), x это параметр точки касания $(r',s')\in\Delta$

Вопрос: когда $P_{r,s}$ имеет локальные экстремумы?

Упр-е: $P'_{r,s}(x)=3x^2+3r$ так что P' имеет корень $\Leftrightarrow r\le 0$

$\boxed{P_{r,s}(x)=x^3+3rx+2s}$

Мультик Едем по прямой ℓ_{x_0}



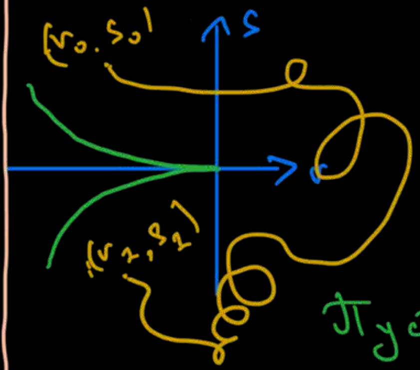
Упр Сделайте то же самое для $\deg P=4$

(в трехмерном пр-ве параметров)

(можно посмотреть брошюру Васильева „Геометрия дискриминанта")

Заодно, мы установили такой факт:

Рассмотрим семейство многочленов $P_{r(t),s(t)}$ без кратных корней $(r_t, s_t) \in \mathbb{R}^2_{r,s} - \Delta$



Тогда любой корень x_0 мн-на P_{r_0,s_0} определяет путь $x_t \in \mathbb{R}$: $P_{r_t,s_t}(x_t)=0$

Пусть теперь P_{r_0,s_0} имеет корни (x, y, z)

Тогда x_t, y_t, z_t определяют тройки различных корней P_{r_t,s_t}

Это позволяет показать, что число корней многочлена $P_{r,s}$ для (r,s) „внутри" и „снаружи" такое, как мы и рассказывали: надо выбрать точку, для которой это просто $(s=0)$ и соединить любую другую с ней путем

② Комплексификация дискриминанта

Вопрос: можно ли сделать то же самое для корней $/\mathbb{C}$?
(тайк Ивану Александровичу Панину на лекции Руденко

– комплексификация всё упрощает)

Будем считать, что коэффициенты r и s лежат в $\mathbb{C}$

Рассмотрим D как полином из $\mathbb{C}[r,s]$

Дискриминантное мн-во $\Delta_{\mathbb{C}} = \{D=0\}$

Теперь содержит точки с комплексными координатами. Они отвечают мн-ом $P_{r,s} \in \mathbb{C}[z]$ с комплексными кратными корнями

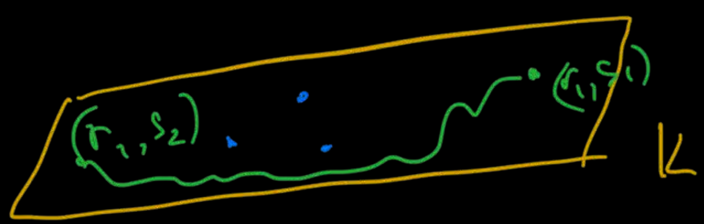
Всё остальное продолжает работать как раньше

⚠ Важное отличие

Дополнение до дискриминанта в $\mathbb{C}^2$ связно!

Для пары точек $(r_0,s_0),(r_1,s_1) \in \mathbb{C}^2 - \Delta_{\mathbb{C}}$ рассмотрим проходящую через (r_i,s_i) прямую

$$K = \{(r,s) \mid ar+bs+c=0\}$$



$K \cap \Delta_{\mathbb{C}}$ ~ корни мн-на одной переменной, не равного 0 тождественно $\Rightarrow$ их $\# < \infty$

Ограничение D на прямую K это комплексный многочлен от переменной z, не равный 0

$$\#(K \cap \Delta) = \#\{(r,s) \mid D(r,s)=0\} \leq \deg D$$

$x \quad \ldots \quad | ar+bs+c=0 \} = \ldots$

$\Rightarrow$ K-Δ связно $\Rightarrow$ (r_0,s_0) и (r_1,s_1) можно соединить

Дальше мы будем работать с многочленами произвольной фиксир-ой степени d

Они образуют $\mathbb{C}^N$ (аффинное пр-во$/_{\mathbb{C}}$) а мн-ны с кратными корнями - дискриминант $\Delta_{\mathbb{C}}$

Обозначим дополнение X_d

Квест! Из связности X_d следует ОТА:

у многочлена P, не имеющего кратных корней, корней ровно $\deg P$

достаточно проверить это для $P(x) = x^n - 1$

Доказательство неразрешимости

Определим гомоморфизм монодромии:

$$M : \pi_1(X_d, P) \to S_d \quad \leftarrow \text{перестановки мн-ва } \{1 \ldots d\}$$

фундаментальная группа - как на лекции Александра Гайфуллина

Чтобы определить M, обозначим корни P за

$$\{z_1, \ldots, z_d\} = P^{-1}(0)$$

Для пути $P_t : [0,1] \to X_d$, корни

z_i можно продолжить вдоль γ_t, т.е.

получить $\forall i$ путь $z_i(t) \in \mathbb{C}$, такое,

$$\{z_1(t) \ldots z_d(t)\} \text{ - корни } P_t.$$

Если P_t - петля, т.е. $P_1 = P_0$, то

$$\{z_1(1), \ldots, z_d(1)\} = \{z_1, \ldots, z_d\}$$

Однако вообще говоря $z_i(1) \neq z_i$

Т.о. задана перестановка M_γ, такая, что

$$M_\gamma(i) = j \iff z_i(1) = z_j$$

M_γ зависит только от класса гомотопии γ:

для семейства γ_u, $u \in [0,1]$ петель

мы получаем семейство корней

$$z_i(u,t) \in \mathbb{C} \text{ мн-на } P_t$$

Тогда $z_i(u,1)$ - семейство корней P_1,

непрерывно зависящее от $u \Rightarrow$

$z_i(u,1) = const \Rightarrow M_{\gamma_0}(i) = M_{\gamma_1}(i) \Rightarrow M_{\gamma_0} = M_{\gamma_1}$.

Замечание № 2

Рассмотрим уравнение $P(x) = x^5 - x$

Нам не нужно рассматривать все X_5

- посмотрим на семейство $P_a(x) = x^5 - x + a$

Корни P это $\{0, \pm 1, \pm i\}$.

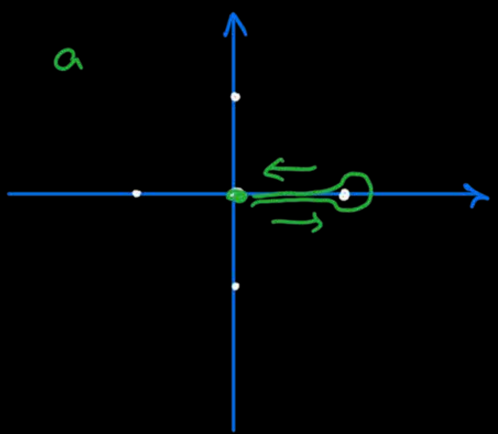
Как устроено пересечение $\{P_a\}$ и $\Delta_{\mathbb{C}}$?

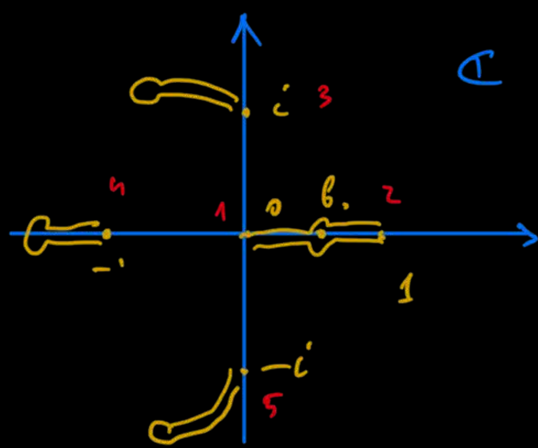
P_a имеет кратный корень $\Leftrightarrow P_a = P_a' = 0 \Leftrightarrow$ $x^4 = \frac{1}{5}$

$$\begin{cases} x^5 - x + a = 0 \\ 5x^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{5}x + a = 0 \\ x^4 = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4}a \\ \frac{5^4}{4^4} a^4 = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \left\{ a^4 = \frac{4^4}{5^5} \right.$$

$P_a \in \Delta \Leftrightarrow a^4 = \frac{4^4}{5^5} \Leftrightarrow a = \pm \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ или $a = \pm i\frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$

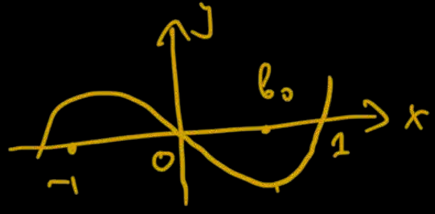
b - кратный корень $\Rightarrow 5b^4 = 1$.





Мы утверждаем, что при обходе вокруг петли на картинке $\pm i$ и -1 остаются на месте а 0 меняется с 1

При движении вдоль зеленой кривой с элементом $x^5 - x + a$ происходит следующее



Потом мы делаем петлю. потом движемся в обратном направлении.

На протяжении всей этой петли траектории корней i и $-i$ комплексно сопряжены (почти все время) $\Rightarrow$ они не пересекают вещественную ось $\mathbb{R}_x$ $\Rightarrow$ переходят сами в себя

Из графика видно, что -1 не может поменяться с корнями 0 и 1

Теперь посмотрим на то, что происходит с траекториями корней 0 и 1

Для $\varepsilon \in \mathbb{C}$ $|\varepsilon| \ll 1$ посмотрим, при каких a у мн-на P_a есть корень $x = b_0 + \varepsilon$

$$a = (b_0+\varepsilon) - (b_0+\varepsilon)^5 = b_0 - b_0^5 + \varepsilon(1-5b_0^4) - \varepsilon^2(10b_0^3 + 10b_0^2\ldots + 5\varepsilon^2 b_0 + \varepsilon^3) = a_0 - \varepsilon^2(-,-) \approx a_0 - 10b_0^3\varepsilon^2$$

Т.о. когда x обходит по часовой стрелке пол оборота вокруг b_0, a делает целый круг

$\Rightarrow$ 0 и 1 меняются местами

Таким образом $M(\gamma) = (1, 2)$

Значит мы можем получить все транспозиции, а значит и все S_5.

Т.о. образ гомоморфизма монодромии M совпадает со всей группой S_5

Разрешимость в радикалах

по опр-ию Алгоритм решения уравнения степени d в радикалах это набор многочленов $Q_1, \dots, Q_N$, таких, что

среди корней x_N следующей системы найдется корень уравнения $P(x)=a_d x^d + \dots + a_0$

$$\begin{cases} x_1^{k_1} = Q_1(a_0, \dots a_d) \\ \vdots \\ x_N^{k_N} = Q_N(a_0 \dots a_d\, x_1 \dots x_{N-1}) \end{cases}$$

Сейчас мы докажем, что для уравнения степени 5 (а значит и для $d \geq 5$) не существует алгоритма разрешения в радикалах.

Пусть существует алгоритм решений ур-ов степени d

Тогда $G^N = \{e\}$, где $G^n < S_n$ определяется индуктивно

$$G^0 = \operatorname{Im} M, \quad G^{k+1} = [G^k, G^k] = \{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \mid \alpha, \beta \in G^k\}$$

Док-во: Докажем это для $N=1$

Рассмотрим пару петель $\delta_1, \delta_2 \in \pi_1(X_d, P)$

Мы хотим доказать, что для $\gamma = \delta_1 \delta_2 \delta_1^{-1} \delta_2^{-1}$

$$M_\gamma = Id.$$

При проходе вдоль петли δ переставляются корни

$$z_i = \sqrt[k]{A} \qquad A = Q(a_0, \dots, a_d)$$

При этом отношения $\eta = z_i / z_j$ сохраняются (так как оно удовлетворяет ур-ию $\eta(t)^k = 1 \ \forall t$)

Таким образом действие δ задаётся умножением на некоторый корень из 1

$$\delta: z_i \longmapsto z_i \cdot \varepsilon, \text{ где } \varepsilon^k = 1$$

Тогда γ действует $z_i \mapsto z_i \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1^{-1} \cdot \varepsilon_2^{-1} = z_i.$

Следовательно $\forall g \in G^1$

$$g = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = M(\delta_1) M(\delta_2) M(\delta_1^{-1}) M(\delta_2^{-1}) = M(\gamma) = Id$$

Доказательство для больших N проводится по индукции

Для элементов $g = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in G^N$ по пред. инд-ции

$$\alpha, \beta: x_i \longmapsto x_i \quad i \leq N-1$$

$\Rightarrow$ g переводит x_N в x_N по рассуждению выше $\square$

Осталось доказать сл-ее упражнение

Упр Для $G = S_5$ выполнено равенство $d \geq 5$

$\forall N \quad G^N = A_5$ — подгруппа четных перестановок $\square$

(A_5 — совершенна)