0 Введение

Эта брошюра посвящена доказательству замечательной *формулы Шлефли.* А именно: представим себе, что в пространстве задан (гладко) зависящий от времени многогранник — у которого могут меняться длины рёбер и углы, но который сохраняет свой комбинаторный тип. Один из примеров такого — если в пространстве движутся четыре точки, не оказывающиеся в одной плоскости, то можно рассмотреть тетраэдр с вершинами в этих точках.

Теорема 0.1 (Формула Шлефли)**.** *В любой момент времени t*

$$\sum_j l_j(t)\dot{\alpha}_j(t) = 0,$$

где сумма ведётся по всем рёбрам многогранника, $l_j(t)$ — длина j-го ребра, $\alpha_j(t)$ — соответствующий двугранный угол, а точка обозначает производную по времени.

Мы разберём вероятностное доказательство этой формулы — и для этого рассмотрим несколько вероятностных вопросов, связанных с выбором одной или нескольких случайных прямых или плоскостей. Эти вопросы обычно коротко и естественно формулируются, и ими занимались многие математики.

Так, у В. И. Арнольда [1, с. 60–61] есть рассказ о том, как А. Д. Сахаров шинковал капусту — и заинтересовался поведением получающихся кусочков. Оказалось, что при разрезании пластов капусты большим количеством случайно проводимых разрезов среднее число сторон кусочка оказалось равным четырем. Другое его наблюдение — отношение средней площади кусочка к квадрату его среднего периметра такое же, как если бы кусочки были кругами ($\pi r^2/(2\pi r)^2 = 1/(4\pi)$).

Можно ещё вспомнить также классические вопросы про среднюю длину проекции на случайно выбираемую прямую или про среднюю площадь проекции какой-нибудь выпуклой фигуры (например, куба) на случайно выбираемую плоскость.

В нашем же случае нас будут интересовать углы многогранника, но об этом позднее.

1 Вводные понятия: теория вероятностей

1.1 Дискретное распределение

Чтобы говорить о случайности, нам понадобятся некоторые вводные понятия из теории вероятностей; читатель, уже знакомый с её началами, может спокойно этот раздел пропустить.

Когда мы ставим какой-либо случайный эксперимент — кидаем монетку или кубик — мы получаем один из *элементарных исходов*: монетка может выпасть орлом или решкой, и т.д. Их множество обычно обозначается через $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Этим элементарным исходам сопоставляют их *вероятности* — неотрицательные числа $p_1, \ldots, p_n$ со свойством

$$\sum p_i = 1.$$

Вероятность *события* (состоящего из нескольких элементарных исходов) тогда оказывается суммой соответствующих вероятностей. Например, рассмотрим такую ситуацию: мы бросаем два кубика и считаем сумму выпавших очков. Тогда вероятность каждого элементарного исхода (a, b) (выпадение a очков на первом кубике и b на втором) равна $\frac{1}{36}$. Поэтому вероятность получить сумму, равную 7, равна $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Вероятность же получить сумму, равную 2, равна всего $\frac{1}{36}$.

Часто бывает удобнее рассматривать не набор вероятностей, а *случайные величины* — функции, которые случайному исходу сопоставляют некоторые, вообще говоря, вещественные значения. Можно о них думать, как об очках (положительных или отрицательных), которые приносит данный бросок.

Если задана случайная величина $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, то можно рассмотреть ее математическое ожидание $E\xi$ — аналог среднего значения в вероятностном случае. По определению

$$E\xi = \sum p_i \xi(\omega_i).$$

Важное для нас свойство математического ожидания в этом пункте — аддитивность: математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий. На этом дискретный случай мы оставим и перейдем к непрерывному.

1.2 Непрерывное распределение

Попробуем выбрать случайную точку на отрезке $[0, 1]$. Вероятность выбрать любую конкретную точку, вообще говоря, равна нулю. Поэтому лучше будет обсуждать вероятность попадания на некоторый малый промежуток Δx. Строго говоря, это выражается так: есть функция «плотность вероятности» $\rho(x)$ (она может быть разная, зависит от рассматриваемой ситуации):

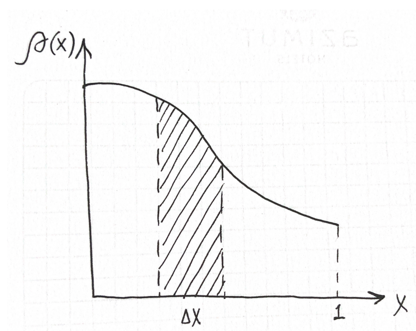

Рис. 1: Плотность распределения $\rho(x)$

Если мы берем малый промежуток, то вероятность (с геометрической точки зрения — площадь) попасть в него равна

$$\rho(x)\Delta x.$$

Но это при малых промежутке. Если мы хотим узнать, с какой вероятностью мы попадаем на какой-то меньший отрезок $[a, b]$ — разобьём его на маленькие интервалы $[x_i, x_{i+1}]$ длиной $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$. Искомая вероятность тогда должна быть суммой

$$P(x \in [a, b]) = \sum_i P(x \in [x_i, x_{i+1}]) \approx \sum_i \rho(x_i)\Delta x_i.$$

В правой части стоит интегральная сумма Римана; измельчая разбиение, мы получаем в пределе интеграл:

$$\forall a, b \quad P(x \in [a, b]) = \int_a^b \rho(x)dx.$$

Эта формула (к которой мы пришли неформально) и является *определением непрерывного распределения с плотностью* $\rho(x)$.

Не любое распределение на отрезке описывается таким образом. Например, можно задать распределение так, что какие-то отдельные точки будут иметь ненулевую вероятность.

В этом разделе важное для нас свойство следующее:

$$\int_0^1 \rho(x)dx = 1.$$

Теперь посмотрим, что произойдет с математическим ожиданием в этом случае. Здесь случайная величина это опять функция на множестве $\Omega = [0,1]$ элементарных исходов, $\xi : [0,1] \to \mathbb{R}$. Пусть это некоторая функция $\xi(x)$.

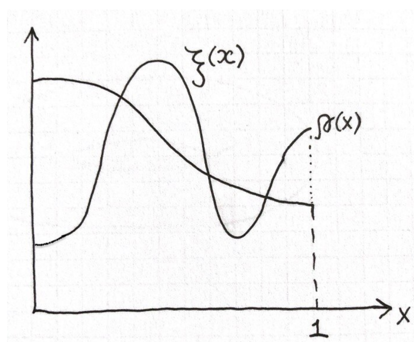

Рис. 2: Случайная величина $\xi(x)$ и плотность распределения $\rho(x)$

Опять же, разбив отрезок $[0,1]$ на кусочки $[x_i, x_{i+1}]$, и считая, что на таком отрезке ξ примерно равна $\xi(x_i)$, получаем приближение математического ожидания суммой

$$\sum_i \xi(x_i) \cdot P([x_i, x_{i+1}]) \approx \sum_i \xi(x_i) \cdot \rho(x_i)\Delta x_i.$$

Опять же, в правой части стоит интегральная сумма Римана; переходя к пределу всё измельчающихся разбиений, получаем интеграл

$$E\xi = \int \xi(x)\rho(x)\, dx.$$

Это — аналог математического ожидания в непрерывном случае; опять же, мы возьмём эту формулу за определение, не углубляясь в детали.

2 Пример вероятностной задачи

2.1 Иголка на плоскости

Рассмотрим известную *задачу Бюффона*:

Задача. *Возьмём плоскость, разлинованную параллельными прямыми на расстоянии 1 друг от друга. С какой вероятностью иголка единичной длины, брошенная на такую плоскость, пересечет одну из прямых?*

Тут можно задаться вопросом, что считать «пересечением». Например, если иголка попала только концом на прямую, будем ли мы рассматривать это как успешный исход? А если легла целиком на прямую? Договоримся сразу, что для простоты мы не рассматриваем вырожденные случаи — случаи нулевой вероятности — попадание конца иглы на прямую и т. д.

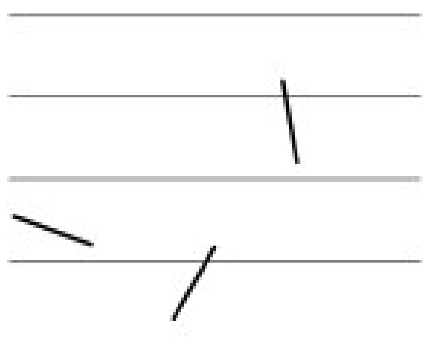

Рис. 3: Задача Бюффона

Как сформулировать (поставить) эту задачу формально? Проблема тут в том, что плоскость бесконечна. И это мешает сказать, что все возможные положения иголки равновероятны: если на отрезке есть равномерное распределение, на прямой и на плоскости из-за их бесконечности равномерного распределения нет.

Поэтому задачу придётся несколько модифицировать. А именно: положение иголки определяется углом наклона и двумя координатами x и y верхней точки иглы (координаты стандартные, ось Ox параллельна прямым, а ось Oy перпендикулярна). И координата x вообще не влияет на факт пересечения, так что её можно опустить. Далее, от координаты y — которую мы всё ещё не можем выбрать равномерно на прямой —

нам на самом деле важна только дробная часть: ведь прямые чертятся с шагом 1. Поэтому можно выбрать только эту дробную часть

$$y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1,$$

а вот на отрезке или на окружности равномерное распределение уже есть.

Кроме того, $\varphi \in S^1$. Угол будем рассматривать с точностью (по модулю) π, и тогда $\varphi \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. И в итоге положение иглы задается двумя координатами: φ и y, а конфигурационное пространство для него — тор.

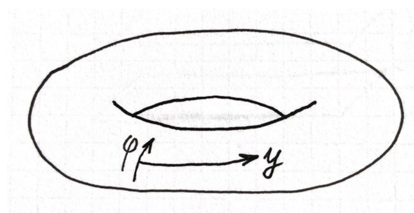

Рис. 4: Тор как конфигурационное пространство

2.2 Счётное решение: интегралы

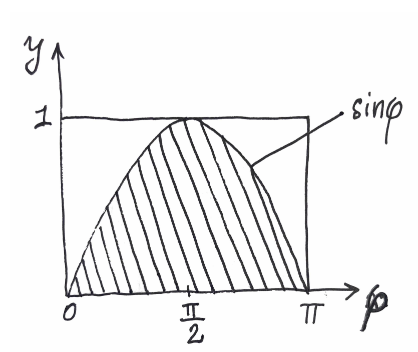

Рис. 5: Вероятность для случая плоскости

Если y фиксирован, то условие пересечения прямой — $y \leq \sin\varphi$. Найдем площадь под графиком соответствующей функции

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}.$$

Можно заметить, что это вероятностный способ получать число π. Однако для получения даже пары надёжных цифр после запятой бросать нужно ну очень долго.

2.3 Без счёта

Ответ в задаче Бюффона можно получить и не считая интегралы. Более того, для произвольного расстояния D между прямыми (или для произвольной длины L иглы) можно, не рассматривая интеграла, найти математическое ожидание *количества* пересечений. Для $L \leq D$, когда игла не может пересечь больше одной прямой, и потому число пересечений всегда равно 0 или 1, это математическое ожидание совпадает с вероятностью наличия пересечения.

А именно: пусть на разлинованную плоскость кидается иголка произвольной (гладкой) формы γ; мы рассматриваем число пересечений ξ_γ (являющееся случайной величиной) и хотим найти его математическое ожидание M_γ.

Несложно убедиться, что это математическое ожидание *аддитивно*: если мы разобьём кривую γ на несколько частей $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, то каждая из них падает случайным образом, и потому

$$M_\gamma = M_{\gamma_1} + \cdots + M_{\gamma_n}.$$

Поэтому для прямой иголки математическое ожидание числа пересечений — это аддитивная функция от её длины L, и значит, имеет вид $c \cdot L$ для некоторой константы c (если считать, что расстояние D между линиями фиксировано).

С другой стороны, любую (гладкую) иголку можно разбить на много-много маленьких «почти прямых» кусочков, и их будет столько же, сколько и для прямой иголки такой же длины. А значит, и математическое ожидание будет таким же. Поэтому математическое ожидание числа пересечений для кривой длины L равно $c \cdot L$, где c от кривой не зависит. Осталось этот коэффициент c найти.

Давайте возьмём в качестве кривой иглы окружность с диаметром, равным расстоянию D между линиями. Она всегда пересекает прямые ровно в двух точках. Значит, математическое ожидание равно 2. А длина этой кривой — $L = \pi D$. Отсюда $c = 2/(\pi D)$. И тем самым уже для любой кривой длины L математическое ожидание числа пересечений равно $2L/\pi D$.

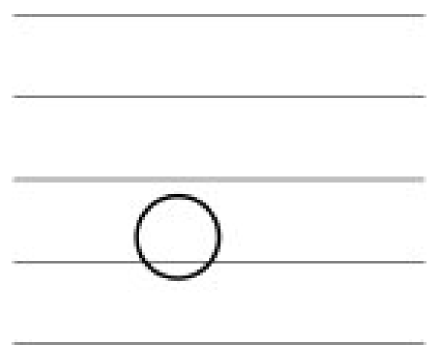

Рис. 6: Задача Бюффона для окружности

2.4 Иголка в пространстве

А что будет, если иглу бросают в пространстве, разделённом плоскостями на расстоянии 1 друг от друга? Какова вероятность, что она пересечет одну из плоскостей? Аналогично предыдущему случаю положение иглы характеризуется углом φ (угол с горизонтальной плоскостью), где $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

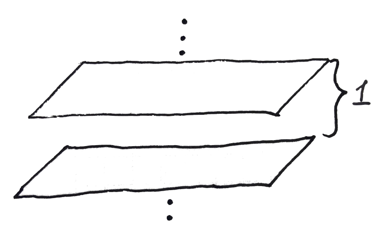

Рис. 7: Задача Бюффона для пространства

Теперь, однако, распределение угла φ вовсе не равномерное на отрезке. А именно — направление иголки равномерно выбирается на сфере S^2 (и, как можно считать, на верхней полусфере). Но какова при этом для угла с горизонталью вероятность попасть в промежуток от φ до $\varphi + \Delta\varphi$?

Закрашенный сектор в силу малости $\Delta\varphi$ — это почти окружность радиуса $\cos\varphi$. Следовательно, его площадь примерно равна $2\pi\cos\varphi\Delta\varphi$. Чтобы получить вероятность, поделим на площадь половины сферы:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\cos\varphi\Delta\varphi = \cos\varphi\Delta\varphi.$$

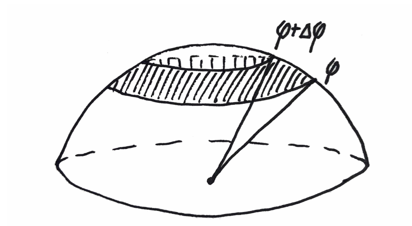

Рис. 8: Площадь сектора

Тогда
$$\rho(\pi) = \cos\varphi.$$

Поэтому распределение угла φ на $[0, \frac{\pi}{2}]$ не равномерное, а с плотностью $\rho(\pi) = \cos\varphi$. На рисунке заштрихованная область соответствует случаям, когда плоскость пересечена, а не заштрихованная — обратным ситуациям.

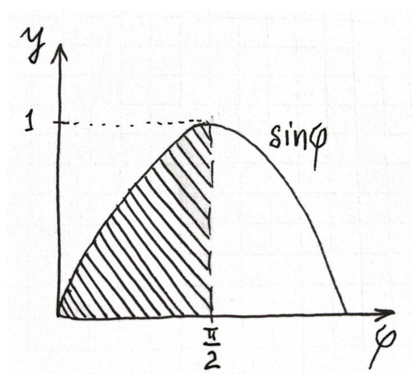

Рис. 9: Плотность вероятности

Теперь нам интересует отношение вероятности закрашенной части к вероятности всех исходов:

$$\int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cdot \rho(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cdot \cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}.$$

3 Сечение двугранного угла

Бесконечный угол

Рассмотрим ещё одну задачу: пусть нам задан (бесконечный) двугранный угол размера α. Рассечём его случайной плоскостью; в сечении получается плоский угол случайной величины β. Какая в среднем у него величина? Иными словами:

Задача. *Чему равно математическое ожидание угла β?*

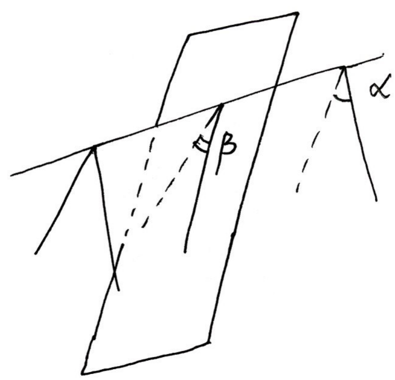

Рис. 10: Сечение двугранного угла плоскостью

Формализуем постановку задачи. Во-первых, как и в случае задачи Бюффона, мы не можем реализовать равномерное распределение на всех плоскостях в пространстве. Однако величина получаемого угла β зависит только от класса параллельных плоскостей — задаваемого направлением нормали к ней; поэтому мы можем считать, что мы выбираем нормальный вектор равномерно на единичной сфере. Наконец, для почти всех точек сферы угол в сечении действительно корректно определён — нам нужно исключить только плоскости, параллельные образующей прямой, а их суммарная вероятность равна нулю.

Решеним эту задачу. Искомое матожидание — это некоторая функция $f(\alpha)$. Заметим, что если есть два двугранных угла α_1 и α_2, то когда они составятся вместе, сечение такого угла будет состоять из суммы сечений двух маленьких углов. То есть матожидание аддитивно по величине угла:

$$f(\alpha_1 + \alpha_2) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2).$$

Значит (аналогично уже проведённому рассуждению в не-счётном решении задачи Бюффона), функция f линейная — она имеет вид $c\alpha$ для некоторой константы c.

Итак, $f(\alpha) = c\alpha$. Но при $\alpha = \pi$, когда двугранный угол является полупространством, все его сечения плоскостями задают полуплоскость — соответственно, угол β в сечении тождественно равен π. И значит, математическое ожидание также равно π — и константа пропорциональности равна 1.

Ответ: математическое ожидание равно α.

Конечный угол: щепка в измельчителе

Посмотрим теперь на следующую задачу: щепки-углы падают в измельчитель, проводящий один горизонтальный разрез. Какая средняя величина получающегося угла — при условии, что щепка была разрублена?

Это — *другая* задача, нежели задача о сечении бесконечного двугранного угла! Потому что шанс разрубить падающую вертикально щепку больше, чем горизонтально.

Для формализации, дадим следующее определение:

Определение 3.1. *Конечным* двугранным углом называется двугранный угол с отмеченным отрезком J на его образующей.

Теперь нам придется ввести вероятностное распределение на плоскостях, потому что при сечении многогранника результат зависит не только от направления плоскости, но и от её положения. Выберем начало координат, а плоскость будем характеризовать направлением нормали, и сдвигом в этом направлении от начала координат. Кроме того, мы выберем и зафиксируем большое расстояние D. Теперь, случайную плоскость можно задавать следующим образом: мы выбираем направление нормали равномерно на всей единичной сфере, а сдвиг в этом направлении — равномерно на отрезке $[-D, D]$.

Задание распределения на плоскостях позволяет нам говорить о пересечении «щепки» — конечного двугранного угла: мы говорим, что плоскость его пересекает, если она пересекает выбранный отрезок J.

Несмотря на то, что задачи о сечении бесконечного и конечного двугранного углов различны — к последней применимо то же самое рассуждение об аддитивности, что и к первой. А именно, математическое ожидание для суммы углов (с одним и тем же отрезком образующей J)

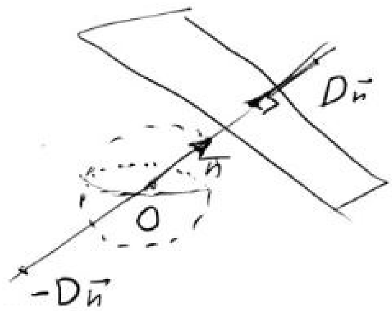

Рис. 11: Выбор нормали и расстояния

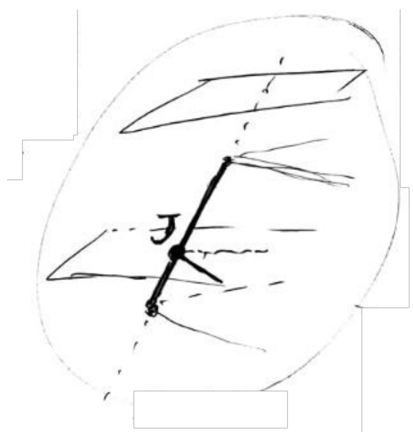

Рис. 12: «Щепка» — конечный двугранный угол — и пересекающая и не пересекающая её плоскости

равно сумме математических ожиданий, и а углу π всегда соответствует угол π в сечении. Поэтому математическое ожидание опять равно исходному углу.

4 Формула Шлефли

Рассмотрим многогранник P_t, гладко меняющийся с течением времени: двугранные углы $\alpha_i(t)$ при рёбрах длины $l_i(t)$.

В этом разделе мы докажем анонсированную во введении формулу

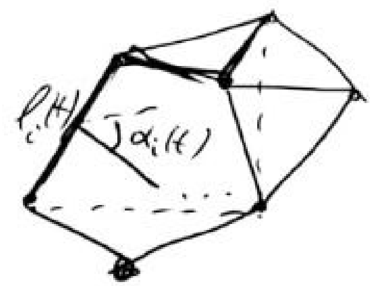

Рис. 13: Многогранник P_t

Шлефли: как бы ни менялся многогранник, выполнено

$$\sum_i l_i(t) \cdot \dot{\alpha}_i(t) = 0$$

(здесь точка сверху означает производную по времени: $\dot{\alpha}_i(t) = \frac{d\alpha_i(t)}{dt}$).

Отметим, что у этой формулы есть очень простая плоская версия для многоугольника с углами $\beta_i(t)$:

$$\sum_i \dot{\beta}_i(t) = 0.$$

Действительно, сумма углов многоугольника (с фиксированным числом сторон) на плоскости постоянна.

Мы докажем формулу Шлефли с помощью рассмотрения случайных сечений. При этом мы столкнёмся с «задачей об измельчителе» из предыдущего раздела — потому что углы в многограннике не бесконечные, а конечные.

Как и в предыдущем разделе, мы выберем и зафиксируем достаточно большое D, чтобы многогранник целиком содержался в шаре радиуса D. Начнём с того, что выясним, с какой вероятностью вообще случайно выбираемая плоскость пересекает рёбра:

Лемма 4.1. *Случайно выбранная плоскость пересекает отрезок J длины l, находящийся целиком внутри сферы радиуса D с вероятностью,* пропорциональной *l, т.е. $c_D \cdot l$.*

Доказательство. Пусть вектор нормали $\vec{n}$ уже выбран. Рассмотрим $p(J)$ — проекцию J на прямую, порождённую $\vec{n}$. Выбранная плоскость будет пересекать J если и только если выбранный сдвиг пересекает $p(J)$, что происходит с вероятностью $\frac{|p(J)|}{2D}$. Усредняя по $\vec{n}$, получаем, что вероятность пересечь J это $\frac{1}{2D}$, умноженное на математическое ожидание длины проекции J на случайную прямую, а последнее пропорционально его длине l. □

Перейдём теперь к доказательству собственно формулы Шлефли. Пусть у нас задан гладко зависящий от времени многогранник в пространстве. Выберем начало координат и расстояние D так, чтобы он целиком содержался в шаре радиуса D.

Рассмотрим случайную величину — функцию от случайно выбираемой плоскости:

$$\xi_i = \begin{cases} \dot\beta_i, & \text{выбранная плоскость пересекает } i\text{-е ребро} \\ 0, & \text{не пересекает} \end{cases}.$$

Ключевым утверждением в доказательстве формулы Шлефли является следующая лемма:

Лемма 4.2.

$$E\xi_i = c_D \cdot l_i(t) \cdot \dot\alpha_i(t). \tag{4.1}$$

Прежде, чем эту лемму доказывать, выведем из неё формулу Шлефли. Действительно, сложим случайные величины ξ_i по всем рёбрам. С одной стороны, в силу леммы математическое ожидание их суммы равно

$$\sum_i E\xi_i = c_D \sum_i l_i(t) \cdot \dot\alpha_i(t).$$

С другой, их сумма почти всюду равна нулю. Действительно, для любой фиксированной плоскости, не проходящей в настоящий момент через вершины многогранника, сумма $\dot\beta_i$ обращается в ноль, поскольку в сечении мы видим движущийся многоугольник, сумма углов β_i которого постоянна. Значит, равно нулю и математическое ожидание такой суммы, и мы получаем

$$c_D \sum_i l_i(t) \cdot \dot\alpha_i(t) = \sum_i E\xi_i = 0.$$

Отсюда

$$\sum_i l_i(t) \cdot \dot\alpha_i(t) = 0,$$

и формула Шлефли доказана. Остаётся доказать лемму 4.2.

Доказательство леммы 4.2. Эта лемма по формулировке напоминает «дифференцирование по времени» ответа в задаче о щепке. Однако, работа здесь требует аккуратности: производную с взятием математического ожидания переставлять можно не всегда. Например, если рассмотреть семейство случайных величин

$$\eta_t(x) = \begin{cases} 1, & x \le t \\ 0, & x > t \end{cases}$$

на отрезке $[0, 1]$, то производная по t от η_t существует во всех точках, кроме $x = t$, и равна 0. Тем не менее, математическое ожидание $E\eta_t = t$ со временем меняется — его производная не равна (нулевому) математическому ожиданию производной.

Рассмотрим многообразие F всевозможных двугранных углов: отрезок J и две начинающиеся из него полуплоскости. Для любого начального положения Δ двугранного угла можно рассмотреть касательное пространство $T_\Delta F$ всевозможных «направлений деформации».

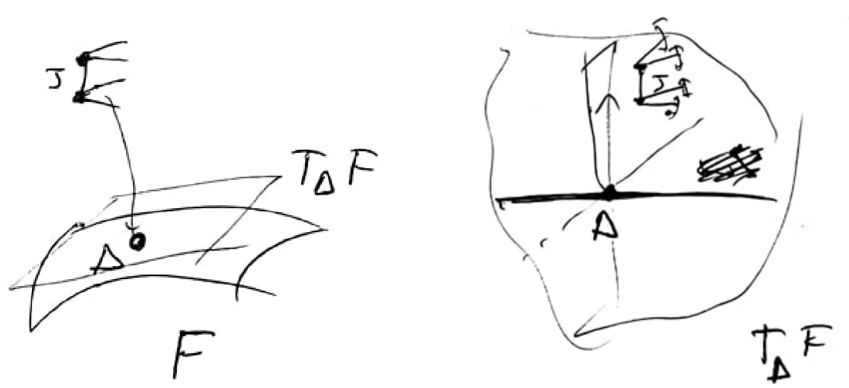

Рис. 14: Многообразие щепок, касательное пространство в одной точке, его разложение в прямую сумму

Как левая, так и правая части (4.1) зависят от вектора «скорости деформации» щепки $v \in T_\Delta F$. Более того, они по нему аддитивны (производная суммы равна сумме производных). Поэтому достаточно доказать утверждение леммы не для всех «направлений деформации», а только для набора, порождающего всё касательное пространство $T_\Delta F$.

С конечным двугранным углом могут происходить следующие процессы:

1. Можно, сохраняя собственно двугранный угол (образующую и обе полуплоскости), двигать по образующей концы отрезка J. В этом случае $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$, и в обеих частях (4.1) мы получаем ноль.

2. Можно параллельно переносить конечный двугранный угол. В этом случае $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$, и опять в обеих частях мы получаем ноль.

3. Рассмотрим центр C ребра J. Проведём через C перпендикулярную J плоскость, и рассмотрим угол, который она высекает. Пусть l_1 и l_2 — биссектрисы внутреннего и внешнего углов соответственно. Следующий класс движений — можно поворачивать щепку вокруг l_1 или l_2.

Рис. 15: Две биссектрисы центрального сечения щепки

В этом случае $\dot{\alpha} = 0$. Наоборот, случайная величина ξ_i в тождественный ноль не обращается: угол, видимый в пересечении с какой-нибудь конкретной плоскостью, может при этом меняться. Тем не менее, мы сейчас увидим, что математическое ожидание дает нам ноль из-за симметрии.

А именно — пусть мы поворачиваем вокруг l_2; рассмотрим движение D, являющееся осевой симметрией относительно другой биссектрисы l_1. Заметим, что в силу перпендикулярности l_1 и l_2 движение D переводит прямую l_2 в себя, меняя её направление. Поэтому D сопрягает поворот вокруг l_2 на угол φ с поворотом на угол $-\varphi$.

Отсюда следует, что если какая-то плоскость Π пересекает J, то $D(\Pi)$ также пересекает Π и $\xi(D(\Pi)) = -D(\Pi)$. Тем самым, на пересекающих J плоскостях есть биекция (действие D), сохраняющая меру и меняющая знак ξ. Следовательно, матожидание в левой части (4.1) действительно обращается в ноль.

Аналогично рассматривается и случай вращения вокруг биссектрисы l_2.

4. Наконец, можно оставить J в точности на месте, двигая плоскости, образующие двугранный угол. И вот в этом случае множество «плохих» плоскостей (суммарной нулевой вероятности) от времени не зависит. И это позволяет продифференцировать ответ в задаче о щепке по времени, опять получив желаемое тождество.

Поскольку все перечисленные выше направления в объединении порождают всё касательное пространство (проверьте это!) — утверждение леммы справедливо для любого направления деформации. $\square$

Упражнение 4.1. Проведем в пространстве 4 случайные плоскости. Получим тетраэдр. Найти математическое ожидание любого полученного двугранного угла.

Список литературы

[1] В. И. Арнольд, Экспериментальная математика, М.: ФАЗИС, 2005.