Магия эрмитовых уголков

Игрушечный пример: случайный вектор

Представим себе, что в пространстве $\mathbb{R}^\beta$ выбирается случайный гауссов вектор $x = (x_1, \dots, x_\beta)$:

$$\rho(x_1, \dots, x_\beta) \propto \exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2)$$

На $\mathbb{R}^\beta$ действует группа поворотов; её действием любой вектор переводится на луч положительную полуось Ox_1. Как устроено распределение там?

$$\rho_\beta(r) \propto r^{\beta-1} \exp(-\frac{1}{2} r^2).$$

1. Не все орбиты имеют одинаковый объём $\Rightarrow$ множитель $r^{\beta-1}$.
2. Корректно определено даже при нецелом β.

Игрушечный пример: предел при $\beta \to \infty$

$$\rho_\beta(r) \propto r^{\beta-1} \exp(-\frac{1}{2}r^2) = \exp(-\beta F_\beta(r)),$$

$$F_\beta(r) \to F(r) = -\log r + \frac{1}{2}r^2, \quad \beta \to \infty.$$

1. Закон больших чисел: r концентрируется вокруг $r_0 = \operatorname{argmax} F = 1$
2. Центральная предельная теорема: отклонения r от r_0 асимптотически нормальные:

$$F(r) \approx F(r_0) + \frac{1}{2}F''(r_0) \cdot (r - r_0)^2 = F(r_0) + (r - r_0)^2;$$

$$\sqrt{\beta}(r - r_0) \xrightarrow{d} \xi \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}), \quad \beta \to \infty.$$

Случайные матрицы GOE/GUE: классические вопросы

Рассмотрим случайную симметричную/эрмитову матрицу размера $N \times N$:

$$M = \frac{A + A^*}{2}, \quad A = (a_{ij}), \quad \rho_{a_{i,j}}(x) \propto \exp(-\frac{1}{2}|x|^2)$$

На пространстве симметричных/эрмитовых матриц действует сопряжениями ортогональная/унитарная группа: любую матрицу можно сопрячь с диагональной. А как устроено распределение там — иными словами, как устроено распределение собственных значений?

Случайные матрицы: ответ

$$\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \propto \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \cdot \exp(-\frac{1}{2}\sum_j |\lambda_j|^2),$$

где первый сомножитель отвечает за «объём орбиты», а $\beta = 1, 2, 4$ соответствует вещественному числам, комплексному и кватернионному случаю.

Но ответ имеет смысл и при других β!

Наш случай: $\beta \to \infty$.

Предел $\beta \to \infty$

$$\rho(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \propto \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \cdot \exp(-\frac{1}{2}\sum_j |\lambda_j|^2),$$

$$\rho(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \propto \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \cdot \exp(-\frac{\beta}{4}\sum_j |\lambda_j|^2)$$

Иными словами,

$$\rho(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \propto \exp(-\beta F(\lambda)),$$

где

$$F(\lambda) = -\sum_{i<j} \log|\lambda_i - \lambda_j| + \frac{1}{4}\sum_j |\lambda_j|^2.$$

В пределе $\beta \to \infty$: единственная точка $(x_1^N, \ldots, x_N^N) = \operatorname{argmin} F$.
Это — корни многочлена Эрмита $H_N(x)$.

$\beta \gg 1$

При $\beta \gg 1$ мы видим только окрестность минимума $(x_1^N, \dots, x_N^N)$. Рядом с ней F приближается квадратичным членом ряда Тейлора:

$$\exp(-\beta F(\lambda)) \propto \exp\left(-\beta \cdot \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \cdot (\lambda_i - x_i^N)(\lambda_j - x_j^N)\right)$$

Поэтому колебания $\lambda = (\lambda_i)$ вокруг предельных значений (x_i^N) — гауссовские, порядка $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$:

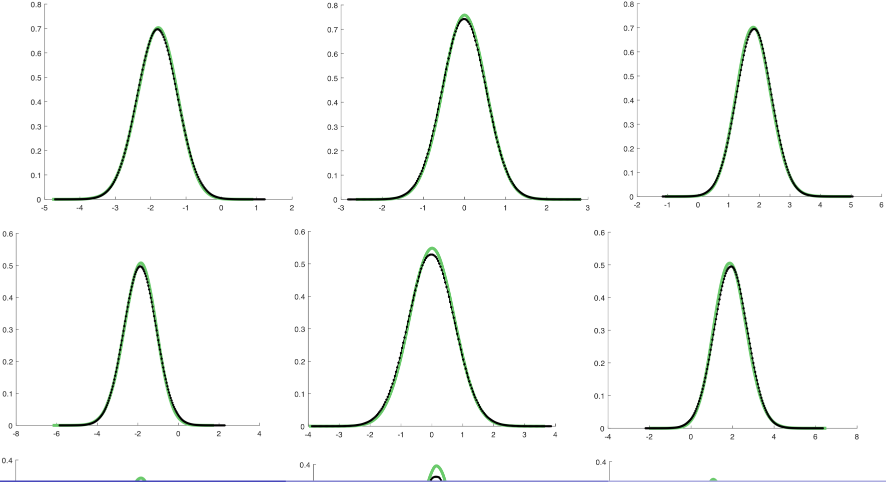
$$\sqrt{\beta}(\lambda_i - x_i^N) \xrightarrow[\beta\to\infty]{d} \xi_i.$$

Матрица вторых частных производных F — обратная к матрице ковариаций ξ.

Графики плотности и приближение из $\beta = \infty$

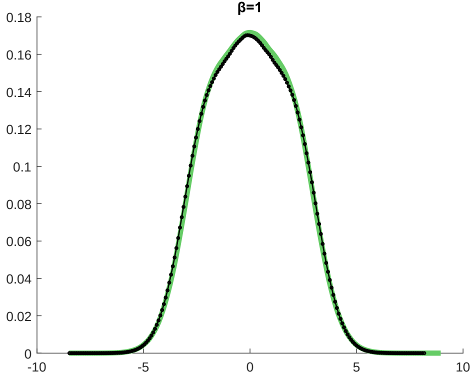
Рассмотрим случайные величины «i-е собственное значение случайной матрицы», $i = 1, \ldots, N$. Как устроены их плотности? Вот графики из компьютерных экспериментов для $N = 3$:

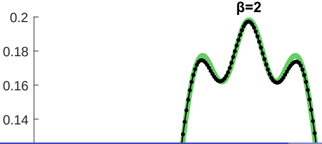
$\beta = 4$: $\beta = 2$: $\beta = 1$:



Графики плотности и приближение из $\beta = \infty$, ч. 2

Рассмотрим случайную величину «случайно выбранное собственное значение случайной матрицы». Как устроена её плотность? Вот графики из компьютерных экспериментов для $N = 3$:

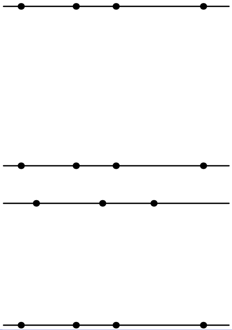




Процесс уголков

В эрмитовой матрице порядка N можно рассмотреть уголок размера $N-1$; его собственные значения перемежаются с собственными значениями исходной матрицы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right)$$



Один шаг спуска

Пусть собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ зафиксированы. Рассмотрим «случайно повёрнутую» матрицу порядка N с этими собственными значениями и посмотрим на распределение собственных значений $\mu_1, \ldots, \mu_{N-1}$ её уголка порядка $N-1$.

Теорема

$$\rho(\mu_1, \ldots, \mu_{N-1}) \propto \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{N-1} |\lambda_i - \mu_j|^{\frac{\beta}{2}-1} \cdot \prod_{1 \le i < j \le N-1} (\mu_j - \mu_i)$$

(Гельфанд–Наймарк, 50'е ; Барышников–Неретин, 00'е; Dixon, Anderson)

При любом фиксированном β формула выше позволяет задать марковский процесс (переходя от «уже известных» собственных значений порядка k к «новым» собственным значениям порядка $k-1$).

Предел при $\beta \to \infty$

Теорема (В. Горин, A. Marcus)

У «процесса уголков» есть нетривиальный (перенормированный) предел при $\beta \to \infty$.

$$\rho(\mu_1, \ldots, \mu_{N-1}) = \exp(-\beta F_\beta(\lambda, \mu)),$$

$$F_\beta(\lambda, \mu) \to F(\lambda, \mu) = -\sum_{i,j} \log|\lambda_i - \mu_j|, \quad \beta \to \infty$$

1. Собственные значения μ_j уголка асимптотически независимы при условии известных λ_i.
2. Они концентрируются в точках минимума $\sum_i \log|\lambda_i - x|$, т.е. в корнях производной характеристического многочлена $P_\lambda(x)$.
3. Они асимптотически гауссовские с колебаниями $\sim \frac{1}{\sqrt{\beta}}$

Постановка задачи

Теорема (В. Горин, A. Marcus)

Предел

$$\xi_i^k := \lim_{\beta\to\infty} \sqrt{\beta}(\lambda_i^k - x_i^k),$$

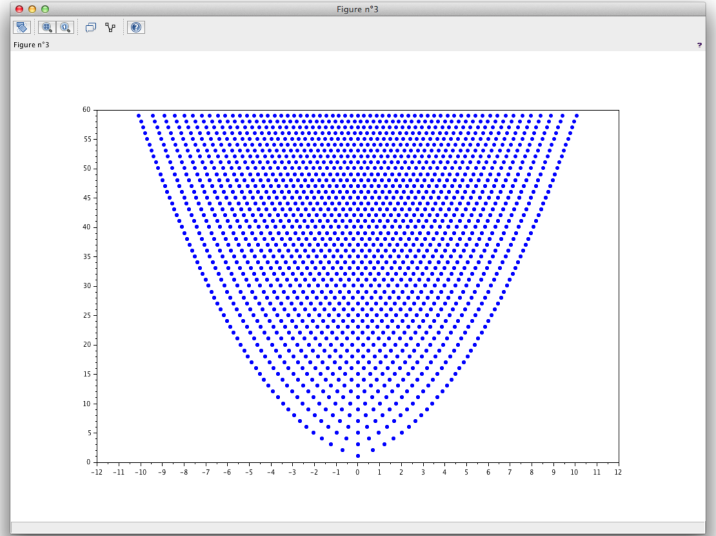
где x_i^k — корни многочлена P_k с $P'_{k+1} = (k+1)P_k$, существует и задаёт гауссовский марковский процесс. (+явная формула для всей совместной плотности)

Вопрос

Что можно сказать о корнях–точках концентрации x_i^k и о процессе ξ_i^k?

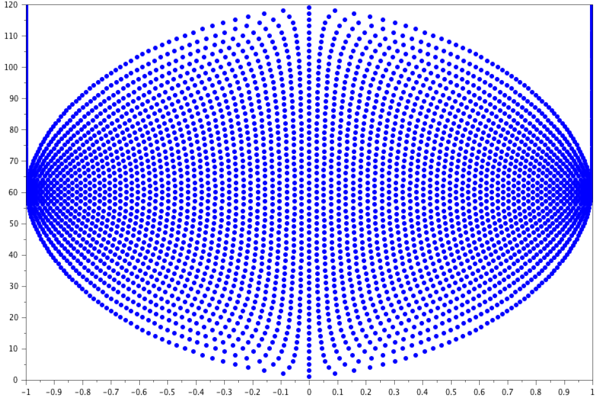
1. Если все P_k — многочлены Эрмита («гауссова» мера на β-матрицах)?
2. Если собственные значения $x_1^N, \dots, x_N^N$ на уровне N детерминированы?

Решётка корней многочленов Эрмита



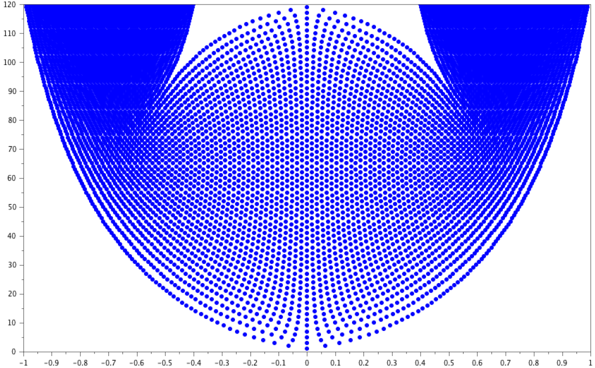
Примеры для других «начальных условий»-1

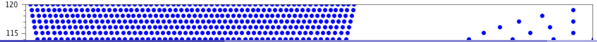
Поведение корней производных многочлена $(x^2 - 1)^M$, $M = 60$:



Примеры для других «начальных условий»-2

$N = 2M = 120$ корней равномерно распределены на отрезках $[-1, -0.4]$ и $[0.4, 1]$:





Разные режимы

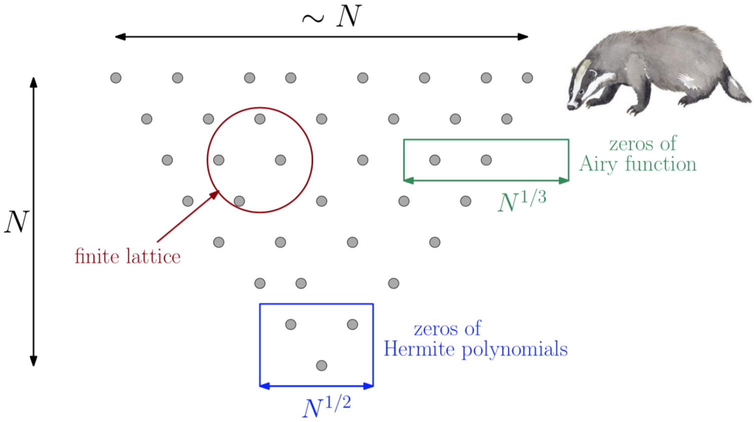


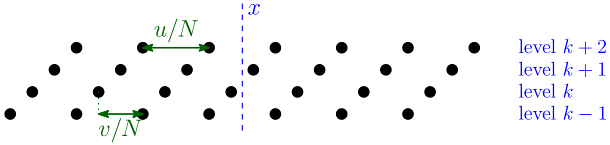
Image credit: V. Gorin

Ответ для x_i^k

Теорема (В. Горин, В.К.)

При достаточно разумных предположениях на начальные собственные значения $x_1^N, \ldots, x_N^N$:

1. *На фиксированном уровне k: корни полинома Эрмита H_k* *([GK, Theorem 2.9])*
2. *В балке: «решётка»* *([GK, Theorem 2.14]).*
3. *На границе: нули функции Эйри* $\mathrm{Ai}(x)$ *([GK, Theorem 2.17])*



Чуть-чуть доказательств: аналитическая часть.

Поведение внизу: «лобовой» подход

$$P(x) = \prod_{j=1}^{N}(x - x_j) = x^N - \sigma_1(x_j)x^{N-1} + \sigma_2(x_j)x^{N-2} \pm \dots$$

$$\mu := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{x_j}$$

$$p_1 = N\int x\,d\mu, \quad p_2 = N\int x^2\,d\mu, \dots.$$

$$\sigma_1 = p_1, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2), \quad \sigma_3 = \frac{1}{3}(p_1\sigma_2 - p_2\sigma_1 + p_3), \dots$$

$$\sigma_1 \sim N\overline{\mu}, \quad \sigma_2 \sim \frac{N^2}{2}\overline{\mu}^2, \quad \sigma_3 \sim \frac{N^3}{3!}\overline{\mu}^3, \dots$$

Поведение внизу: «лобовой» подход-2

$$P_N(x) \sim x^N - N\overline{\mu}x^{N-1} + \frac{N^2}{2!}\overline{\mu}^2 x^{N-2} - \frac{N^3}{3!}\overline{\mu}^3 x^{N-3} \pm \dots$$

$$P_k(x) = \frac{1}{N(N-1)\dots(k+1)} P^{(N-k)}(x) \to$$
$$\to x^k - k\overline{\mu}x^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!}x^{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^{k-3} \pm \dots$$
$$= (x-\overline{\mu})^k$$

Всё определяется p_1 — и корни садятся в $\overline{\mu}$.
Если перенести $\mathbb{E}\,\mu$ в ноль, то новым главным членом будет $\sigma^2 = p_2$, и он всё и определяет $\Rightarrow$ универсальность.

Поведение внизу: «аналитический» подход

Пусть $\overline{\mu} = 0$, $\sigma^2 = 1$.

$$P_k(y) = \binom{N}{k}^{-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_0 \frac{P_N(z+y)}{z^{N-k+1}} dz;$$

$$\frac{P_N(z+y)}{z} = \prod_{j=1}^{N} \left(1 + \frac{y}{z} - \frac{x_j}{z}\right)$$

Смотрим на поведение рядом с нулём (на масштабе $\frac{1}{\sqrt{N}}$), интегрируем по кругу радиуса $\sqrt{N}$:

$$y = \frac{x}{\sqrt{N}}, \quad z = \frac{\sqrt{N}}{w}$$

$$\ln\left(1 + \frac{y}{z} - \frac{x_j}{z}\right) = \frac{y}{z} - \frac{x_j}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_j}{z}\right)^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{N} wx - \frac{1}{\sqrt{N}} x_j w - \frac{1}{2N}(x_j^2 w^2) + O(N^{-3/2}).$$

Поведение внизу: «аналитический» подход-2

$$\sum_j \ln(1+\frac{y}{z}-\frac{x_j}{z}) = \sum_j \frac{1}{N}wx - \frac{1}{\sqrt{N}}x_j w - \frac{1}{2N}(x_j^2 w^2) + O(N^{-3/2})$$

$$= wx - 0 - \frac{1}{2}w^2 + O(N^{-1/2}), \qquad \text{as } \sigma^2 = 1.$$

Под интегралом:

$$\oint_0 \prod_{j=1}^{N}(1+\frac{y}{z}-\frac{x_j}{z})z^{k-1}dz = N^{k/2}\cdot\oint_0 \exp(wx-\frac{1}{2}w^2)\frac{1}{w^{k-1}}dw$$

$N^{k/2}$ сокращается с биномиальным коэффициентом $\binom{N}{k}$ и с $N^{k/2}$ от замены координат $y=\frac{x}{\sqrt{N}}$ (старший коэффициент должен быть 1). А $\exp(wx-\frac{1}{2}w^2)$ — производящая функция для многочленов Эрмита!

И, возвращаясь к вероятностным вопросам...

Описание для ξ_i^k

Теорема (В. Горин, В.К.)

При достаточно разумных предположениях на фиксированном уровне k: процесс в пределе такой же, как для случая $P_k = H_k$ ([GK, Theorem 2.12])

Теорема (В. Горин, В.К.)

Если P_k — многочлены Эрмита H_k:

1. *В балке: work in progress (GFF)*
2. *На границе: Airy$_\infty$ line ensemble ([GK, Theorem 1.1]).*

Предел на краю: Airy$_\infty$ line ensemble

Пусть $k(t) = N + [N^{2/3} t]$.

Теорема (В. Горин, В.К.; ([GK, Theorem 1.1]))

$$\lim_{N\to\infty} N^{1/6} \xi^{k(t)}_{k(t)+1-i} = \mathfrak{Z}(i,t), \quad i \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\mathfrak{Z}(i,t)$ *— гауссов процесс с нулевым матожиданием и ковариациями*

$$\mathbb{E}\, \mathfrak{Z}(i,t)\mathfrak{Z}(j,s) = \frac{2}{\mathrm{Ai}'(\mathfrak{a}_i)\mathrm{Ai}'(\mathfrak{a}_j)} \int_0^\infty \mathrm{Ai}(\mathfrak{a}_i + y)\mathrm{Ai}(\mathfrak{a}_j + y) \exp\left(-|t-s|y\right) \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Этот процесс можно представить как «усреднение броуновских шумов по вспомогательному процессу».

Варьируя матрицы...

Удивительным образом, ответ совпадает с ответом для поведения на границе Дайсоновского броуновского движения!
Вместо изменения размера матрицы («процесс уголков») можно заставить меняться элементы матрицы фиксированного размера $N \times N$:

$$M(t) = \frac{A(t) + A^*(t)}{2}, \quad A(t) = (a_{ij}(t)),$$

где $a_{ij}(t)$ — β-мерное броуновское движение. Дифференциальное уравнение для собственных значений $X_i(t)$ можно написать и при любом β:

$$\mathrm{d}X_i(t) = \sum_{j \neq i} \frac{\mathrm{d}t}{X_i(t) - X_j(t)} + \sqrt{\frac{2}{\beta}}\, \mathrm{d}W_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Airy$_\infty$ line ensemble-2

Рассмотрим временной интервал порядка $N^{-1/3}$: положим

$$\tau(t) = 1 + 2tN^{-1/3}.$$

Теорема (В. Горин, В.К.; ([GK, Theorem 1.2]))

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{\beta\to\infty} N^{1/6}\sqrt{\beta}\left(X_{N+1-i}(t) - \left(\tau(t)\frac{\beta}{2}\right)^{1/2} x^N_{N+1-i}\right) = \mathfrak{Z}(i,t),$$

$$i \in \mathbb{Z}_{>0},\ t \in \mathbb{R}.$$

Здесь $\mathfrak{Z}(i,t)$ — тот же процесс!

Начинаем разбираться

Напомним, как ведут себя собственные значения μ_j уголка размера $k-1$ при условии известных собственных значений λ_i уголка размера k:

1. Собственные значения μ_j асимптотически (при $\beta \to \infty$) независимы при условии известных λ_i.
2. Они концентрируются в точках минимума $\sum_i \log|\lambda_i - x|$, т.е. в корнях производной характеристического многочлена $P_\lambda(x)$.
3. Они асимптотически гауссовские с колебаниями $\sim \frac{1}{\sqrt{\beta}}$

Предельный процесс ξ_i^k — гауссовский и марковский (где размер k уголка играет роль времени). Будем считать, что k «движется в сторону уменьшения».

Инновации

Гауссовский марковский процесс ξ_i^k на каждом шаге можно разбить в сумму его «предсказанного среднего» (условного матожидания при условии предыдущего шага) и «инновации»:

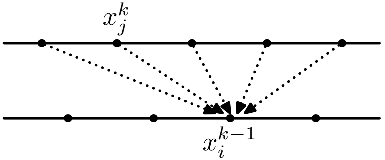
$$\xi_i^{k-1} = \mathbb{E}(\xi_i^{k-1} \mid \xi_j^k) + \eta_i^{k-1},$$

где (вектор) η_i^{k-1} независим от (вектора) ξ_j^k.
Процесс гауссовский $\Rightarrow$ условное матожидание это линейная комбинация:

$$\mathbb{E}(\xi_i^{k-1} \mid \xi_j^k) = \sum_j c_{ij}^k \xi_j^k.$$

А что можно сказать про константы c_{ij}^k?

«Прыгающий» процесс



Константы c_{ij}^k: производные корня x_i^{k-1} производной $P_k'(x)$ по корням x_j^k самого многочлена.

1. $c_{ij}^k > 0$
2. $\sum_j c_{ij}^k = 1$
3. $c_{ij}^k \sim \frac{1}{(x_j^k - x_i^{k-1})^2}$.

Их можно рассматривать как переходные вероятности процесса, «прыгающего» снизу вверх.

Ответы можно писать в терминах этого процесса!

Определение

Пусть $K^{k,l}(a,b)$ — переходное ядро этого процесса: вероятность «допрыгать» из корня x_a^k на уровне k в корень x_b^l на уровне $l \geq k$.

Представление ξ_i^k

Теорема (В. Горин, В.К.)

Процесс $\{\xi_i^k\}_{1\le i\le k\le N}$ *можно представить как*

$$\xi_a^k = \sum_{\ell=k}^{N-1} \sum_{b=1}^{\ell} K^{k,\ell}(a \to b) \cdot \eta_b^\ell,$$

где η_b^ℓ *независимые гауссовские с дисперсией*

$$\operatorname{Var} \eta_b^\ell = \frac{2}{\sum_{b=1}^{k+1} (x_b^\ell - x_c^{\ell+1})^{-2}} = -2\,\frac{P_{\ell+1}(x_b^\ell)}{P''_{\ell+1}(x_b^\ell)}.$$

Кроме того,

$$\operatorname{cov}(\xi_{a_1}^{k_1}, \xi_{a_2}^{k_2}) = \sum_{\ell=\max(k_1,k_2)}^{N-1} \left(\sum_{b=1}^{\ell} K^{k_1,l}(a_1 \to b) K^{k_2,\ell}(a_2 \to b) \cdot \operatorname{Var} \eta_b^\ell \right).$$

Описание процесса

Будем рассматривать только случай «бесконечных матриц» (тогда $P_k = H_k$ — многочлены Эрмита).

Тогда $\mathrm{Var}\,\eta_b^k = \frac{2}{k+1}$.

Процесс «прыгает» снизу вверх, «собирая» η_b^k по пути; а как устроено его распределение на каком-нибудь уровне?

Начнём с самой нижней точки.

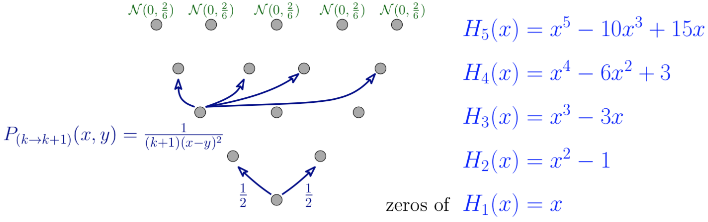
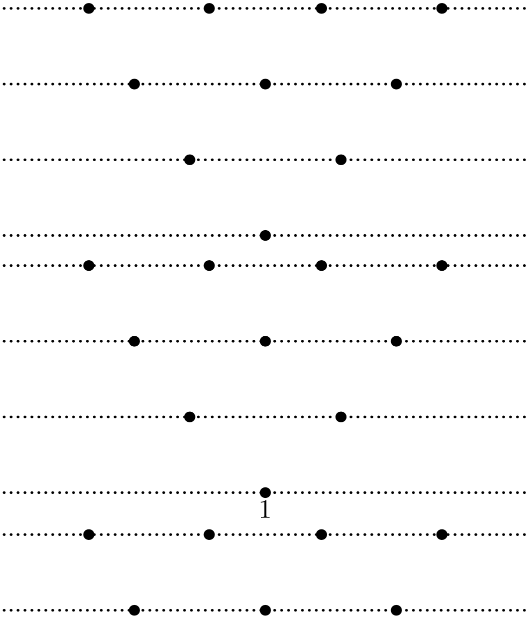


Image: V. Gorin

Чудеса начинаются!



$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$

$$H_3(x) = x^3 - 3x$$

$$H_2(x) = x^2 - 1$$

$$H_1(x) = x$$

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$

$$H_3(x) = x^3 - 3x$$

$$H_2(x) = x^2 - 1$$

$$H_1(x) = x$$

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$

$$H_3(x) = x^3 - 3x$$

… и продолжаются

Определение

$$D_k[f](y) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(y - x_j^k)^2} \cdot f(x_j^k), \quad H_{k+1}(y) = 0$$

Теорема (В. Горин, В.К.)

Оператор диффузии D_k переводит многочлен степени не выше m в многочлен степени не выше m,

$$D_k[x^m] = (1 - \frac{m+1}{k+1})x^m + \dots$$

Эскиз доказательства

Доказательство.

Посмотрим на $D_k[x^m]$:

$$\sum_j \frac{(x_j^k)^m}{(y - x_j^k)^2} = \sum_j \frac{(x_j^k)^m - y^m}{(y - x_j^k)^2} + \sum_j \frac{y^m}{(y - x_j^k)^2}$$

В первом слагаемом одна степень $(y - x_j^k)$ сократится, второе уже вида $\mathrm{const} \cdot y^m$ + ещё чуть-чуть таких же выкладок.
Альтернатива: комплексный анализ. $\square$

... и продолжаются

Определение

Многочлены $Q_m^{(k)} = x^m + \ldots$ — ортогональные многочлены по равномерной мере на корнях H_k.

Теорема (В. Горин, В.К.)

$D_k[Q_m^{(k)}] = (1 - \frac{m+1}{k+1})Q_m^{(k+1)}$.

Доказательство.

Лемма

Сопряжённый оператор D_k^* тоже сохраняет пространство многочленов степени не выше m при всех m.

Образ $D_k[Q_m^{(k)}]$ это многочлен степени m, ортогональный всем многочленам степени меньше m. □

Применение чудес в народном хозяйстве

Следствие

Можно искать $K^{k,l}(a,b)$: перейти в ортогональный базис $\{Q_m^{(k)}\}$, в нём операторы диффузии просто диагональны, а потом вернуться обратно.

А ковариации ζ_i^k можно искать и не возвращаясь обратно: в правой части стоит скалярное произведение ядер диффузии.

Спасибо за внимание!