1. Симметризация Штейнера и неравенство Брунна–Минковского

Мы будем рассмтривать выпуклые замкнутые ограниченные множества с непустой внутренностью в $\mathbb{R}^n$. Такие множества будем называть выпуклыми телами. Напомним, что множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если для каждой пары точек $x, y \in K$ и для каждого числа $\lambda \in [0,1]$ точка $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$.

На $\mathbb{R}^n$ фиксирована обычная евклидова норма (длина вектора) $|x| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, мы можем померить расстояние между двумя точками $x, y \in \mathbb{R}^n$ с помощью формулы $d(x,y) = |x-y| = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + \ldots + |x_n-y_n|^2}$. Шар радиуса r с центром в точке x будем обозначать $B(x,r)$. Объем шара $B(0,1)$ обозначим символом ω_n.

Определение 1.1. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$, $|u| = 1$. **Симметризацией по Штейнеру** множества K в направлении u называется новое множество

$$S_u(K) := \Big\{x + s\cdot u\colon x \in Pr_{\langle u\rangle^\perp}(K), |s| \le \frac{1}{2}|K \cap (x + \mathbb{R}\cdot u)|\Big\},$$

где $Pr_{\langle u\rangle^\perp}(K)$ — проекция множества K на гиперплоскость $\langle u\rangle^\perp$, $K \cap (x + \mathbb{R}\cdot u)$ — пересечение множества K с прямой $\{x + s\cdot u\colon s \in \mathbb{R}\}$.

Пример 1.2. Рассмотрим прямоугольник с вершинами $(2,0)$, $(1,\sqrt{3})$, $(-2,0)$, $(-1,-\sqrt{3})$. Его сторона задаются прямыми $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x \pm 2)$, $y = \sqrt{3}(-x \pm 2)$. Симметризацией такого прямоугольника в направлении $u = (0,1)$ будет шестиугольник с вершинами $(\pm 2, 0)$, $(\pm 1, \pm\frac{2}{\sqrt{3}})$. Действительно, на участке $x \in [0,1]$ половина длины сечения постоянная: $\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2) - \frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)) = \frac{2}{\sqrt{3}}$; на промежутке $x \in [1,2]$ половина длины сечения равна: $\frac{1}{2}(\sqrt{3}(-x+2) - \frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)) = \frac{2}{\sqrt{3}}(2-x)$.

Теорема 1.3. *Для выпуклого тела K, множество $S_u(K)$ — также выпуклое.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in [0,1]$, $x, y \in \langle u\rangle^\perp$, $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Заметим, что

$$\lambda(x + s\cdot u) + (1-\lambda)(y + t\cdot u) = z + (\lambda s + (1-\lambda)t)\cdot u,$$

где $|s| \le \frac{1}{2}|K \cap (x + \mathbb{R}\cdot u)|$ и $|t| \le \frac{1}{2}|K \cap (y + \mathbb{R}\cdot u)|$. Поэтому

$$|\lambda s + (1-\lambda)t| \le \frac{1}{2}\big(\lambda|K \cap (x + \mathbb{R}\cdot u)| + (1-\lambda)|K \cap (y + \mathbb{R}\cdot u)|\big)$$

и нам достаточно проверить, что

$$\lambda|K \cap (x + \mathbb{R}\cdot u)| + (1-\lambda)|K \cap (y + \mathbb{R}\cdot u)| \le |K \cap (z + \mathbb{R}\cdot u)|.$$

Из-за выпуклости K $\lambda\big(K\cap(x+\mathbb{R}\cdot u)\big) + (1-\lambda)\big(K\cap(y+\mathbb{R}\cdot u)\big) \subset K\cap(z+\mathbb{R}\cdot u)$, но для трапеции верно, что $|\lambda\big(K\cap(x+\mathbb{R}\cdot u)\big) + (1-\lambda)\big(K\cap(y+\mathbb{R}\cdot u)\big)| = \lambda|K\cap(x+\mathbb{R}\cdot u)| + (1-\lambda)|K\cap(y+\mathbb{R}\cdot u)|$. $\square$

Предложение 1.4. *Если $K \subset T$, то и $S_u(K) \subset S_u(T)$ для каждого вектора $u \in \mathbb{R}^n$, $|u| = 1$.*

Упражнение 1.5. Проверьте, что $S_u(\lambda\cdot K) = \lambda\cdot S_u(K)$ для $\lambda > 0$.

Принцип Кавальери. У двух фигур на плоскости с одинаковыми длинами всех сечений прямыми, ортогональными данной прямой, совпадают площади.

На самом деле (по теореме Фубини), объем фигуры $Vol_n(K)$ есть интеграл от длины сечения прямыми, ортогональными фиксированной плоскости, т.е.

$$Vol_n(K) = \int_{\langle u\rangle^\perp} |K \cap (x + \mathbb{R}\cdot u)|\, dx.$$

Следствие 1.6. *Имеет место равенство $Vol_n(K) = Vol_n(S_u(K))$.*

Замечание 1.7. Прямоугольник из примера 1.2 изначально был симметричен относительно прямой $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, но после симметризации в направлении $u = (0,1)$ перестал быть симметричен относительно этой прямой. Тем самым, последовательное применение симметризаций Штейнера, вообще говоря, не сохраняет тело симметричным относительно плоскостей, относительно которых тело было симметричным на предыдущих шагах.

Тем не менее, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.8 (Основная)**.** *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело. Найдется такая последовательность направлений $u_j \in \mathbb{R}^n$, $|u_j| = 1$, что последовательное применение симметризаций Штейнера в этих направлениях* превратит *тело K в евклидов шар объема $Vol_n(K)$.*

На самом деле справедливо даже чуть более общее утверждение.

Теорема 1.9. *Пусть $K_1, \dots, K_m \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые тела. Найдется такая последовательность направлений $u_j \in \mathbb{R}^n$, $|u_j| = 1$, что последовательное применение симметризаций Штейнера в этих направлениях* превратит *тела $K_1, \dots, K_m$ в евклидовы шары соответствующих объемов.*

Теорему мы докажем чуть позже, а пока посмотрим на ее возможные применения.

Определение 1.10. *Для множеств $U, V \subset \mathbb{R}^n$ их* **суммой по Минковскому** *называется множество*

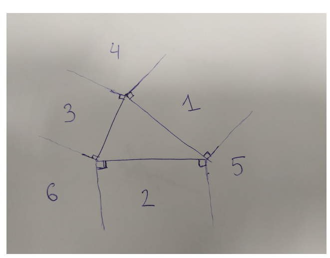
$$U + V := \{u + v \colon u \in U, v \in V\}.$$

Пример 1.11. Заметим, что $[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$. Действительно, если $u \in [a,b], v \in [c,d]$, то $u + v \in [a+c, b+d]$ и, если $w \in [a+c, b+c]$, то $w = c + (w-c)$, $w - c \in [a,b]$, а если $w \in [b+c, b+d]$, то $w = b + (w-b)$, $w - b \in [c,d]$.

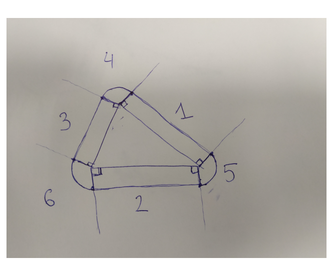
Пример 1.12. Для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$A + B(0,r) = A^r := \{y \in \mathbb{R}^n \colon \exists x \in A, |x - y| \le r\}.$$

Пример 1.13. Например, в случае треугольника A на плоскости, все пространство делится на области:



причем в областях $1, 2, 3$ ближайшей точкой из треугольника будет точка на стороне, а в областях $4, 5, 6$ ближайшей точкой из треугольника будет одна из его вершин. Поэтому, множество $A + B(0,r)$ будет иметь вид:



Упражнение 1.14. (i) Проверьте, что сумма по Минковскому двух выпуклых множеств будет снова выпуклым множеством.

(ii) Проверьте, что для выпуклого множества K и чисел $\alpha, \beta > 0$ справедливо равенство $\alpha \cdot K + \beta \cdot K = (\alpha + \beta) \cdot K$.

Определение 1.15. *Пусть A — (борлевское) подмножество $\mathbb{R}^n$. (Нижней)* **площадью поверхности** *множнства A (по Минковскому) называется величина*

$$Per(A) := \liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{Vol_n(A^\varepsilon) - Vol_n(A)}{\varepsilon}.$$

Замечание 1.16. Заметим, что для выпуклых многоугольников на плоскости получается действительно правильный ответ.

Мы бы хотели понять, у какого выпуклого множества наименьшая площадь поверхности среди всех выпуклых множеств фиксированного объема, т.е. нам бы хотелось научиться оценивать снизу площадь поверхности выпуклого множества. Для этого достаточно научиться оценивать снизу объем суммы двух выпуклых множеств. Такую оценку дает следующая теорема.

Теорема 1.17 (Неравенство Брунна–Минковского)**.** *Пусть K, T — выпуклые тела (на самом деле, можно ослабить до произвольных непустых борелевских множеств) в $\mathbb{R}^n$, тогда*

$$\big[Vol_n(K+T)\big]^{1/n} \geq \big[Vol_n(K)\big]^{1/n} + \big[Vol_n(T)\big]^{1/n}.$$

Для доказательства неравенства Брунна–Минковского будем использовать симметризацию Штейнера. Для этого заметим, как связаны сложение по Минковскому и симметризация Штейнера.

Предложение 1.18. *Для выпуклых тел $K, T \subset \mathbb{R}^n$ и вектора $u \in \mathbb{R}^n$, $|u| = 1$, выполняется включение $S_u(K) + S_u(T) \subset S_u(K+T)$.*

Доказательство. Пусть $x' \in S_u(K)$, $y' \in S_u(T)$, т.е. $x' = x + s \cdot u$, $y' = y + t \cdot u$, $x, y \in \langle u \rangle^\perp$, $|s| \leq \frac{1}{2}|K \cap (x + \mathbb{R} \cdot u)|$ и $|t| \leq \frac{1}{2}|T \cap (y + \mathbb{R} \cdot u)|$. Тогда $x' + y' = (x+y) + (s+t) \cdot u$, причем $|s+t| \leq |s| + |t| \leq \frac{1}{2}(|K \cap (x + \mathbb{R} \cdot u)| + |T \cap (y + \mathbb{R} \cdot u)|)$. Таким образом, достаточно проверить, что

$$|K \cap (x + \mathbb{R} \cdot u)| + |T \cap (y + \mathbb{R} \cdot u)| \leq |(K+T) \cap (x + y + \mathbb{R} \cdot u)|.$$

Но $K \cap (x + \mathbb{R} \cdot u) + T \cap (y + \mathbb{R} \cdot u) \subset (K+T) \cap (x + y + \mathbb{R} \cdot u)$ и

$$|K \cap (x + \mathbb{R} \cdot u) + T \cap (y + \mathbb{R} \cdot u)| = |K \cap (x + \mathbb{R} \cdot u)| + |T \cap (y + \mathbb{R} \cdot u)|.$$

Утверждение доказано. □

Доказательство неравенства Брунна–Минковского.

Пусть $\{u_j\} \subset \mathbb{R}^n$ — последовательность таких направлений, последовательное применение симметризаций Штейнера относительно которых переводит тела K, T и $K+T$ в евклидовы шары соответсвующих объемов. Т.е. тело K перейдет в шар $B(0, r_K)$, $r_K^n \omega_n = Vol_n(K)$, тело T перейдет в шар $B(0, r_T)$, $r_T^n \omega_n = Vol_n(T)$, тело $K+T$ перейдет в шар $B(0, r_{K+T})$, $r_{K+T}^n \omega_n = Vol_n(K+T)$, где $\omega_n := Vol_n(B(0,1))$. Пусть $K_j = S_{u_j}(K_{j-1})$, $K_0 = K$, $T_j = S_{u_j}(T_{j-1})$, $T_0 = T$, $V_j = S_{u_j}(V_{j-1})$, $V_0 = K+T$. По доказанному

$$V_1 = S_{u_1}(K+T) \supset S_{u_1}(K) + S_{u_1}(T) = K_1 + T_1$$

и по индукции получаем, что $V_j \supset K_j + T_j$. Поэтому,

$$B(0, r_{K+T}) \supset B(0, r_K) + B(0, r_T) = B(0, r_K + r_T).$$

Таким образом, $r_{K+T} \geq r_K + r_T$, что после умножения на $\omega_n^{1/n}$ и дает заявленное в теореме неравенство. Теорема доказана.

Из неравенства Брунна–Минковского немедленно следует следующее, так называемое, изопериметрическое неравенство.

Теорема 1.19 (Изопериметрическое неравенство)**.** *Для произвольного выпуклого (на самом деле, борелевского) множества K выполнено неравенство*

$$Per(K) \geq Per(B(0,R)) = n\omega_n^{\frac{1}{n}}[Vol_n(K)]^{1-\frac{1}{n}},$$

где $R = \left[\frac{Vol_n(K)}{Vol_n(B(0,1))}\right]^{1/n}$*, т.е.* $B(0,R)$ *— шар такого радиуса* R*, что* $Vol_n(B(0,R)) = Vol_n(K)$*.*

Доказательство. По неравенству Брунна–Минковского

$$\frac{Vol_n(K+B(0,\varepsilon)) - Vol_n(K)}{\varepsilon} \geq \frac{(R+\varepsilon)^n - R^n}{\varepsilon}\ Vol_n(B(0,1)),$$

откуда

$$Per(K) \geq nR^{n-1}Vol_n(B(0,1)) = Per(B(0,R)).$$

Теорема доказана. □

Упражнение 1.20. Пусть

$$diam(K) := \max\{|x-y| \colon x, y \in K\}.$$

(i) Проверьте, что $diam(S_u(K)) \leq diam(K)$.
(ii) Докажите следующее изодиаметрическое неравенство:

$$Vol_n(K) \leq \omega_n \cdot (\tfrac{1}{2}\, diam(K))^n.$$

2. Расстояние Хаусдорфа

Мы хотим доказать нашу основную теорему.

Теорема 2.1. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело. Найдется такая последовательность направлений $u_j \in \mathbb{R}^n$, $|u_j| = 1$, что последовательное применение симметризаций Штейнера в этих направлениях* превратит *тело K в евклидов шар объема $Vol_n(K)$.*

Но прежде чем к этому приступить нам неплохо бы было понять, что с формальной точки зрения значит фраза: последовательное применение симметризаций Штейнера в этих направлениях превратит тело K в евклидов шар объема $Vol_n(K)$. На интуитивном уровне это значит, что при достаточно большом числе таких последовательных симметризаций тело $K_j := S_{u_j} \circ S_{u_{j-1}} \circ \ldots \circ S_{u_1}(K)$ и шар $B(0,R)$ будут мало отличаться ($Vol_n(B(0,R)) = Vol_n(K)$). Измерить «малость» различия двух множеств можно с помощью подходящего расстояния, как мы это делаем в обычном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Напомним следующее определение.

Определение 2.2. Пусть X — множество. Функция $d \colon X \times X \to [0, +\infty)$ называется **метрикой**, если
$(i)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
$(ii)\ d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X$;
$(iii)\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x, y, z \in X$.

Пример 2.3. Если взять $X = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = |x-y| = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + \ldots + |x_n-y_n|^2}$, то свойства метрики $(i), (ii), (iii)$ выполнены для d.

Упражнение 2.4. Проверьте это.

Рассмотрим сначала множество $X = \mathcal{C}^n$ всех непустых замкнутых и ограниченных множеств (компактов) в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2.5. Расстояние Хаусдорфа между двумя множествами $U, V \in \mathcal{C}^n$ задается равенством
$$\delta(U,V) := \min\{r \geq 0\colon U \subset V^r, V \subset U^r\},$$
где $A^r := \{y \in \mathbb{R}^n\colon \exists x \in A, |x-y| \leq r\} = A + B(0,r)$.

Упражнение 2.6. Проверьте, что
$$\delta(U,V) = \max\{\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}|u-v|, \sup_{v\in V}\inf_{u\in U}|v-u|\}.$$

Предложение 2.7. *Метрика Хаусдорфа — действительно метрика.*

Доказательство. Неочевидно только неравенство треугольника.

Пусть $\delta(U,W) = \alpha$, $\delta(W,V) = \beta$. Это значит, что $U \subset W + B(0,\alpha)$, $W \subset V + B(0,\alpha)$, откуда $U \subset V + B(0,\alpha) + B(0,\beta) = V + B(0,\alpha+\beta)$. Аналогично, $V \subset U + B(0,\alpha+\beta)$. ☐

Нам также потребуется еще ряд определений.

(i) Задав метрику d на множестве X, можно говорить о сходимости последовательности элементов $x_m \in X$ к элементу $x \in X$, а именно, говорят, что последовательность $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ **сходится** к элементу x тогда и только тогда, когда для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер m_0, что при номерах $m > m_0$ выполнено соотношение $d(x_m, x) < \varepsilon$ (обозначение: $\lim\limits_{m\to+\infty} x_m = x$ или $x_m \to x$ при $m \to +\infty$). Это и означает, что начиная с какого-то момента все элементы последовательности $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ и элемент x мало отличаются.

(ii) Последовательность $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset X$ называется **фундаментальной**, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер m_0, что при всех номерах $m, k > m_0$ выполнено соотношение $d(x_m, x_k) < \varepsilon$.

(iii) Метрическое пространство (X,d) называется **полным**, если каждая фундаментальная последовательность $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ его элементов имеет предел в этом пространстве.

Например, в курсе анализа 1-го курса доказывается, что пространство $\mathbb{R}^n$ с обычной метрикой — полное.

(iv) Точка x в метрическом пространстве X называется **предельной** для множества $M \subset X$, если к ней сходится некоторая последовательность точек из M, т.е. найдется последовательность $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset M$, $x_m \to x$.

(v) Множество M называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки.

(vi) **Замыканием** $\overline{M}$ множества M называется множество $M \cup \{$предельные точки $M\}$.

(vii) Множество M в метрическом пространстве называется **компактным**, если из каждой последовательности его точек можно выделить сходящуюся к точке этого множества подпоследовательность.

Например, из курса анализа 1-го курса известно, что замкнутые ограниченные множества в $\mathbb{R}^n$ — компактны.

Отсюда получается важное следствие.

Предложение 2.8. *Пусть $V_n \subset \mathbb{R}^n$ — последовательность убывающих замкнутых непустых ограниченных множеств, т.е. $V_{n+1} \subset V_n$. Тогда $V := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$.*

Доказательство. Возьмем в каждом множества по точке $x_n \in V_n$. Т.к. V_1 — компактно, то найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $x \in V_1$. Кроме того, при $k \geq k_0$, $x_{n_k} \in V_{n_{k_0}}$, а значит $x \in V_{n_{k_0}}$. В силу вложенности получаем, что $x \in V$. ☐

Лемма 2.9. *Предположим, что последовательность множеств $V_m \in \mathcal{C}^n$ убывает, т.е. $V_{m+1} \subset V_m \forall m \in \mathbb{N}$. Тогда*
$$\lim_{m\to+\infty} V_m = V := \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j.$$

Доказательство. Ясно, что $V \in \mathcal{C}^n$. Предположим, что $V_m \not\to V$. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что $V_m \not\subset V^\varepsilon$ при всех $m \in \mathbb{N}$, т.к. иначе, если $V_{m_0} \subset V^\varepsilon$ для некоторого $m_0 \in \mathbb{N}$, то такое же вложение верно и при всех $m \geq m_0$, а значит $\delta(V_m, V) \leq \varepsilon$ при каждом $m \geq m_0$.

Рассмотрим множества $U_m := \overline{V_m \setminus V^\varepsilon}$. Заметим, что $U_{m+1} \subset U_m$, U_m — непустое замкнутое и ограниченное множество. Значит $U := \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} U_j \neq \emptyset$. Кроме того, ясно, что $U \subset V$, но также ясно, что $U \cap V = \emptyset$ (т.к. $|u - v| \geq \varepsilon$ для произвольных точек $u \in U$, $v \in V$). Противоречие. $\square$

Теорема 2.10. *Метрическое пространство $(\mathcal{C}^n, \delta)$ — полное.*

Доказательство. Пусть $K_m \in \mathcal{C}^n$ — фундаментальная последовательность. Пусть $V_m := \overline{\bigcup\limits_{j=m}^{\infty} K_j}$. Последовательность V_m — убывающая последовательность множеств из $\mathcal{C}^n$ (ограниченность множеств V_m следует из фундаментальности последовательности K_m). По предыдущей лемме $V_m \to V := \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} V_j$.

Покажем, что $K_i \to V$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой номер m_0, что $V_m \subset V^\varepsilon$ при $m > m_0$. Поэтому $K_i \subset V^\varepsilon$ при $i > m_0$. Т.к. K_i — фундаментальная последовательность, то найдется такой номер m_1, что $K_j \subset K_i^\varepsilon$ при $i, j > m_1$. Таким образом, при $m, i > m_1$ имеет место включение $V_m := \overline{\bigcup\limits_{j=m}^{\infty} K_j} \subset K_i^\varepsilon$, откуда $V \subset V_m \subset K_i^\varepsilon$. Таким образом, $\delta(K_i, V) < \varepsilon$ при $i \geq \max\{m_0, m_1\}$. $\square$

Теорема 2.11. *Пусть последовательность множеств $K_j \in \mathcal{C}^n$ ограничена (содержится в общем шаре/кубе), тогда существуют такие множество $K \in \mathcal{C}^n$ и подпоследовательность номеров $\{j_m\}$, что $K_{j_m} \to K$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что все множества K_j содержатся в кубе с ребром 1. Подразобьем каждое из ребер куба на 2^{-m} частей, что поделит исходный куб на 2^{mn} меньших (замкнутых) кубов с ребром длины 2^{-m}. Для каждого множества $K \in \mathcal{C}^n$ в исходном кубе пусть $T_m(K)$ обозначает объединение всех таких кубов с ребром длины 2^{-m}, пересекающихся с K. Т.к. число возможных конфигураций множеств $T_1(K)$ конечно, то найдется такая конфигурация T_1 кубов с ребром длины 2^{-1}, что для бесконечного числа номеров j выполнено тождество $T_1(K_j) = T_1$. Значит, есть такая подпоследовательность $\{K_j^1\}$ последовательности $\{K_j\}$, что $T_1(K_j^1) = T_1$. Аналогично, получаем такую подпоследовательность $\{K_j^2\}$ последовательности $\{K_j^1\}$, что $T_2(K_j^2) = T_2$ — фиксированное объединение кубов с ребром длины 2^{-2}. Продолжая построение индуктивно, получаем при каждом m такую подпоследовательность $\{K_j^m\}$ последовательности $\{K_j^{m-1}\}$ (а значит и всех предыдущих построенных последовательностей), что $T_m(K_j^m) = T_m$ — фиксированное объединение кубов с ребром длины 2^{-m}.

Заметим, что $K_i^m \subset K_j^m + B(0, r)$, где $r = 2^{-m}\sqrt{n}$, т.е. $\delta(K_i^m, K_j^m) \leq 2^{-m}\sqrt{n}$. В силу вложенности построенных подпоследовательностей, получаем, что $\delta(K_i^m, K_j^k) \leq 2^{-m}\sqrt{n}$ при $k \geq m$. Рассмотрим последовательность K_m^m. Из сказанного выше следует, что $\delta(K_m^m, K_k^k) \leq 2^{-m}\sqrt{n}$ при $k \geq m$. Таким образом, последовательность $\{K_m^m\}$ — фундаментальная, а значит имеет предел из $\mathcal{C}^n$ по предыдущей теореме. $\square$

3. Доказательство основной теоремы

Пусть теперь $\mathcal{K}^n \subset \mathcal{C}^n$ класс всех непустых замкнутых выпуклых множеств.

Следствие 3.1. *Класс $\mathcal{K}^n$ замкнут в $\mathcal{C}^n$.*

Доказательство. Пусть $K_j \to K$, $K_j \in \mathcal{K}^n$. Рассмотрим точки $x, y \in K$ и число $\lambda \in (0,1)$. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ найдется такой номер j_N, что $\delta(K_{j_N}, K) \le \frac{1}{N}$. Это, в частности, значит, что $x, y \in K \subset K_{j_N}^{\frac{1}{N}}$. Множество $K_{j_N}^{\frac{1}{N}}$ — выпуклое, поэтому $\lambda x + (1-\lambda)y \in K_{j_N}^{\frac{1}{N}}$. Кроме того, $K_{j_N} \subset K^{\frac{1}{N}}$, поэтому $K_{j_N}^{\frac{1}{N}} \subset K^{\frac{2}{N}}$. Тем самым, $\lambda x + (1-\lambda)y \in K^{\frac{2}{N}}$ при каждом $N \in \mathbb{N}$. Остается заметить, что $K = \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} K^{\frac{2}{N}}$ в силу замкнутости K, а значит $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть $u \in \mathbb{R}^n$, $|u| = 1$, K_j, K — выпуклые тела, и пусть $K_j \to K$. Тогда*
(i) $Vol_n(K_j) \to Vol_n(K)$;
(ii) $S_u(K_j) \to S_u(K)$.

Доказательство. Т.к. K — выпуклое тело, то в нем содержится некоторой шар. Не ограничивая общности, считаем, что это шар с центром в нуле, т.е. $B(0,r) \subset K$ для некоторого $r > 0$. В силу ограниченности множества K также найдется число $R > 0$, для которого $K \subset B(0,R)$. Пусть теперь j_0 выбрано так, что $\delta(K_j, K) < \varepsilon < \frac{r}{2}$ при $j > j_0$. Тогда

$$K_j \subset K^{\varepsilon} = K + B(0,\varepsilon) \subset K + \tfrac{\varepsilon}{r} \cdot K = (1 + \tfrac{\varepsilon}{r}) \cdot K.$$

Наоборот,

$$K \subset K_j^{\varepsilon} = K_j + B(0,\varepsilon) \subset K_j + \tfrac{\varepsilon}{r} \cdot K \subset K_j + \tfrac{\varepsilon}{r} \cdot K_j + (\tfrac{\varepsilon}{r})^2 K.$$

Продолжая индуктивно, получаем вложение

$$K \subset \big(1 + \tfrac{\varepsilon}{r} + \ldots + (\tfrac{\varepsilon}{r})^N\big) \cdot K_j + (\tfrac{\varepsilon}{r})^{N+1} \cdot K \subset \tfrac{1-(\frac{\varepsilon}{r})^{N+1}}{1-\frac{\varepsilon}{r}} \cdot K_j + (\tfrac{\varepsilon}{r})^{N+1} \cdot B(0,R)$$

при каждом $N \in \mathbb{N}$. Т.е. для каждой точки $x \in K$ при каждом $N \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $y_N \in K_j$, что $x = \frac{1-(\frac{\varepsilon}{r})^{N+1}}{1-\frac{\varepsilon}{r}} y_N + z$, $|z| \le R(\frac{\varepsilon}{r})^{N+1}$. Отсюда получается, что последовательность $\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}} y_N$ сходится к точке x и, в силу замкнутости, $K \subset \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}} \cdot K_j$. В итоге, $(1 - \frac{\varepsilon}{r}) \cdot K \subset K_j \subset (1 + \frac{\varepsilon}{r}) \cdot K$ и

$$(1 - \tfrac{\varepsilon}{r})^n Vol_n(K) \le Vol_n(K_j) \le (1 + \tfrac{\varepsilon}{r})^n Vol_n(K),$$

что доказывает пункт (i).

Для доказательства пункта (ii) также воспользуемся установленным выше включением, из которого следует, что

$$(1 - \tfrac{\varepsilon}{r}) \cdot S_u(K) \subset S_u(K_j) \subset (1 + \tfrac{\varepsilon}{r}) \cdot S_u(K).$$

Таким образом,

$$S_u(K_j) \subset (1 + \tfrac{\varepsilon}{r}) \cdot S_u(K) \subset S_u(K) + B(0, \tfrac{\varepsilon R}{r})$$

и

$$S_u(K) \subset \tfrac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}} S_u(K_j) \subset S_u(K_j) + \tfrac{\frac{\varepsilon}{r}}{1-\frac{\varepsilon}{r}} (1 + \tfrac{\varepsilon}{r}) B(0,R)$$

Таким образом,

$$\delta(S_u(K_j), S_u(K)) \le \tfrac{3R}{r} \varepsilon,$$

что доказывает и пункт (ii). $\square$

Теорема 3.3. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело. Найдется такая последовательность направлений $u_j \in \mathbb{R}^n$, $|u_j| = 1$, что $K_j \to B(0,R)$ в смысле сходимости по метрике Хаусдорфа, где $K_j = S_{u_j}(K_{j-1})$, $K_0 := K$, R выбрано так, чтобы $Vol_n(B(0,R)) = Vol_n(K)$.*

Доказательство. Пусть

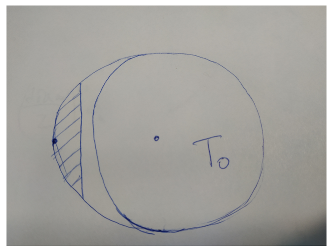
$$R(T) := \inf\{R \colon \exists x \in \mathbb{R}^n, B(x,R) \supset K\} - \text{радиус описанного шара.}$$

Упражнение 3.4. Проверьте, что $R(T_j) \to R(T)$, если $T_j \to T$.

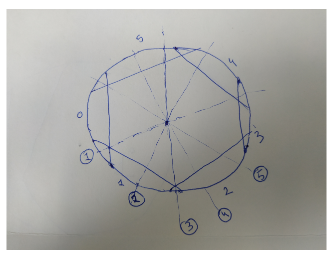
Пусть $\mathcal{S}$ — семейство всех множеств (выпуклых тел), полученных с помощью последовательного применения нескольких симметризаций Штейнера к телу K. Заметим, что, если $K \subset B(0, R)$, то и каждое множество $T \in \mathcal{S}$ будет содержаться в этом шаре. Пусть

$$R_0 := \inf\{R(T) \colon T \in \mathcal{S}\}.$$

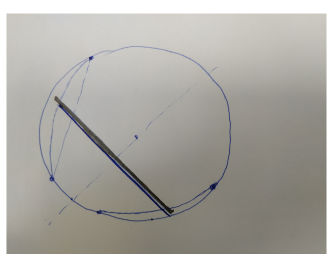
Пусть $T_j \in \mathcal{S}$ такая последовательность, что $R(T_j) \to R_0$. По доказанной ранее теореме, в последовательности $\{T_j\}$ можно найти подпоследовательность $\{T_{j_m}\}$, сходящуюся в метрике Хаусдорфа к некоторому выпуклому телу T_0. Причем, применяя упражнение выше, мы понимаем, что $R_0 = R(T_0)$. Пусть $B(x, R_0)$ — описанный вокруг T_0 шар и предположим, что $T_0 \neq B(x, R_0)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $x = 0$. Тогда T_0 не содержит некоторый шаровой сегмент D (пересечения шара и полупространства):



Сфера этого шара покрывается конечным числом симметричных относительно некоторых плоскостей образов этого сегмента:



Применим симметризацию вдоль векторов $v_1, \dots, v_k$, ортогональных этим плоскостям. При симметризации тела T_0 вдоль вектора v_1 тело $S_{v_1}(T_0)$ не будет иметь точек пересечения со сферой внутри сегмента D и внутри симметричного сегмента относительно плоскости $\langle v_1 \rangle^{\perp}$. При симметризации тела $S_{v_1}(T_0)$ вдоль вектора v_2 тело $S_{v_2}\big(S_{v_1}(T_0)\big)$ не будет иметь точек пересечения со сферой внутри сегмента D и внутри симметричного сегмента относительно плоскости $\langle v_2 \rangle^{\perp}$.



И так далее. Тело $T_0' := S_{v_k}\big(\dots\big(S_{v_1}(T_0)\big)\dots\big)$ не будет иметь со сферой точек пересечения и $R(T_0') \leq R_0 - \delta < R_0$. Т.к.

$$S_{v_k}\big(\dots\big(S_{v_1}(T_{j_m})\big)\dots\big) \to S_{v_k}\big(\dots\big(S_{v_1}(T_0)\big)\dots\big) = T_0',$$

то $R_0 \neq \inf\{R(T) \colon T \in \mathcal{S}\}$, что приводит к противоречию.

Таким образом, $T_0 = B(x, R_0)$. Осталось проверить, что к шару сходится не просто последовательность элементов множества $\mathcal{S}$, а последовательность последовательных применений симметризаций к множеству K.

Мы научились для каждого выпуклого тела K и для каждого $\varepsilon > 0$ предъявлять такой набор направлений $u_1, \ldots, u_m$, что расстояние от $S_{u_m} \circ \ldots \circ S_{u_1}(K)$ до соответствующего шара будет меньше ε.

Упражнение 3.5. Пусть $\delta\big(K, B(0,R)\big) \le \varepsilon$. Проверьте, что $\delta\big(S_u(K), B(0,R)\big) \le \varepsilon$ для каждого вектора $u \in \mathbb{R}^n$, $|u| = 1$.

Теперь можно строить искомую последовательность индуктивно. Теорема доказана. □

Упражнение 3.6. Придумайте, как надо дополнить окончание предыдущего доказательства, чтобы получить теорему о симметризации сразу нескольких тел общей последовательностью.

Упражнение 3.7. Пусть выпуклые тела K_j сходятся к выпуклому телу K, выпуклые тела T_j сходятся к выпуклому телу T. Проверьте, что $K_j + T_j \to K + T$.

4. Неравенство Бляшке–Сантало

Определение 4.1. Пусть K — центрально симметричное выпуклое тело. **Полярой** K° тела K называется множество

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n \colon \max_{x \in K} \langle x, y\rangle \le 1\}.$$

Упражнение 4.2. Проверьте, что множество K° — выпуклое и центрально симметричное.

Определение 4.3. *Нормой на $\mathbb{R}^n$ называется такая функция $\|\cdot\| \colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, что*
(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^n$;
(iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Упражнение 4.4. Проверьте, что следующие функции будут нормами:
(i) $\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$; (ii) $\|x\|_1 := |x_1| + \ldots + |x_n|$; (iii) $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

Норма — это то, что мереет длины векторов. Имеея на руках норму, можно задать расстояние между точками $x, y \in \mathbb{R}^n$ формулой $d(x, y) := \|x - y\|$.

Упражнение 4.5. Проверьте, что так определенная функция действительно метрика.

Единичным шаром с центром в нуле по такой метрике будет множество

$$B_{\|\cdot\|} := B(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \le 1\}.$$

Упражнение 4.6. Проверьте, что для каждой нормы $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^n$ шар $B_{\|\cdot\|}$ будет выпуклым центрально симметричным множеством.

Замечание 4.7. Важное замечание заключается в том, что каждое центрально симметричное выпуклое тело K можно считать единичным шаром по некоторой норме $\|\cdot\|_K$. А именно,

$$\|x\|_K := \inf\{\alpha > 0 \colon \alpha^{-1} x \in K\}.$$

Пусть у меня есть центрально симметричное выпуклое тело K и есть норма, ассоциированная с этим телом. Предположим мы хотим померить, сколь непрерывны линейные функции по такой норме. Рассмотрим линейную функцию $\ell(x) := \langle x, y\rangle$ и спросим себя, для какой наименьшей константы справедлива оценка

$$|\ell(x_1) - \ell(x_2)| \le C \|x_1 - x_2\|_K.$$

Ясно, что такая константа вычисляется, как

$$C=\max_{x_1\neq x_2}\frac{|\ell(x_1)-\ell(x_2)|}{\|x_1-x_2\|_K}=\max_{x\neq 0}\frac{|\ell(x)|}{\|x\|_K}=\max_{x\neq 0}|\ell(\tfrac{x}{\|x\|_K})|=\max_{\|x\|_K=1}|\ell(x)|=\max_{\|x\|_K\le 1}\ell(x)=\max_{x\in K}\langle x,y\rangle.$$

Получается, что поляра, это множество таких векторов y, что у соответсвующего линейного функционала число $C\le 1$.

Пример 4.8. Пусть $K:=B_{\|\cdot\|_2}$ и $n=2$. Тогда

$$\max_{x\in K}\langle x,y\rangle=\max\bigl\{x_1y_1+x_2y_2\colon (x_1^2+x_2^2)^{1/2}\le 1\bigr\}\le (y_1^2+y_2^2)^{1/2}$$

в силу неравенства $x_1y_1+x_2y_2\le\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}$. Кроме того,

$$\max\bigl\{x_1y_1+x_2y_2\colon (x_1^2+x_2^2)^{1/2}\le 1\bigr\}\ge\tfrac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}y_1+\tfrac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}y_2=(y_1^2+y_2^2)^{1/2}.$$

Таким образом, в нашем случае $K^\circ=K$.

Пример 4.9. Пусть $n=2$ и $K:=B_{\|\cdot\|_\infty}=[-1,1]\times[-1,1]$ — квадрат. Тогда

$$\max_{x\in K}\langle x,y\rangle=\max\bigl\{x_1y_1+x_2y_2\colon |x_1|\le 1,|x_2|\le 1\bigr\}\le |y_1|+|y_2|.$$

Кроме того,

$$\max\bigl\{x_1y_1+x_2y_2\colon |x_1|\le 1,|x_2|\le 1\bigr\}\ge \operatorname{sgn}(y_1)\cdot y_1+\operatorname{sgn}(y_2)\cdot y_2=|y_1|+|y_2|.$$

Таким образом, $B^\circ_{\|\cdot\|_\infty}=B_{\|\cdot\|_1}$.

Упражнение 4.10. Вычислите поляры для выпуклых тел $B_{\|\cdot\|_1}$, $B_{\|\cdot\|_2}$, $B_{\|\cdot\|_\infty}$ при каждом $n\in\mathbb{N}$.

Определение 4.11. Объемом Малера выпуклого тела K называется величина

$$s(K):=Vol_n(K)\cdot Vol_n(K^\circ).$$

Ясно, что объем Малера не зависит от растяжений множества, т.е. для каждого $\lambda>0$ имеет место равенство $s(\lambda K)=s(K)$.

Упражнение 4.12. Проверьте, что объем Малера не зависит от невырожденных линейных преобразований, т.е. для невырожденного линейного преобразования L имеет место равенство $s(K)=s(LK)$.

Теорема 4.13. *Пусть K — центрально симметричное выпуклое тело. Тогда*

$$Vol_n(K^\circ)\le Vol_n((S_u(K))^\circ)$$

для каждого вектора $u\in\mathbb{R}^n$, $|u|=1$.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $u=e_n$ и мы симметризуем относительно плоскости $x_n=0$. Симметризованное множество можно записать в виде

$$S_u(K)=\bigl\{(x,\tfrac{s-t}{2})\colon (x,s),(x,t)\in K\bigr\}.$$

Тогда

$$(S_u(K))^\circ=\{(y,r)\colon \langle x,y\rangle+r\tfrac{s-t}{2}\le 1\ \forall\,(x,s),(x,t)\in K\}.$$

Пусть $A(r):=\{x\in\mathbb{R}^{n-1}\colon (x,r)\in A\}$ — сечение множества A на высоте r. Тогда

$$\begin{aligned}\tfrac12\bigl(K^\circ(r)+K^\circ(-r)\bigr)&=\bigl\{\tfrac{y+z}{2}\colon \langle x,y\rangle+sr\le 1,\langle w,z\rangle+t(-r)\le 1\ \forall\,(x,s),(w,t)\in K\bigr\}\\ &\subset\bigl\{\tfrac{y+z}{2}\colon \langle x,y\rangle+sr\le 1,\langle x,z\rangle-tr\le 1\ \forall\,(x,s),(x,t)\in K\bigr\}\\ &\subset\bigl\{\tfrac{y+z}{2}\colon \bigl\langle x,\tfrac12(y+z)\bigr\rangle+\tfrac{s-t}{2}r\le 1,\ \forall\,(x,s),(x,t)\in K\bigr\}\\ &=\bigl\{v\colon \langle x,v\rangle+\tfrac{s-t}{2}r\le 1,\ \forall\,(x,s),(x,t)\in K\bigr\}=(S_u(K))^\circ(r).\end{aligned}$$

Таким образом, по неравенству Брунна–Минковского

$$Vol_{n-1}\big((S_u(K))^\circ(r)\big) \geq Vol_{n-1}\Big(\tfrac{1}{2}\big(K^\circ(r)+K^\circ(-r)\big)\Big)$$
$$\geq \Big(\tfrac{1}{2}\big[Vol_{n-1}\big(K^\circ(r)\big)\big]^{\frac{1}{n-1}}+\tfrac{1}{2}\big[Vol_{n-1}\big(K^\circ(-r)\big)\big]^{\frac{1}{n-1}}\Big)^{n-1}.$$

Заметим, что $Vol_n\big(K^\circ(r)\big)=Vol_n\big(K^\circ(-r)\big)$ в силу центральной симметричности множества K°. Поэтому,

$$Vol_{n-1}\big((S_u(K))^\circ(r)\big) \geq Vol_{n-1}\big(K^\circ(r)\big).$$

По теореме Фубини

$$Vol_n\big((S_u(K))^\circ\big)=\int_{-\infty}^{+\infty} Vol_{n-1}\big((S_u(K))^\circ(r)\big)\,dr \geq \int_{-\infty}^{+\infty} Vol_{n-1}\big(K^\circ(r)\big)\,dr = Vol_n\big(K^\circ\big).$$

Теорема доказана. □

Теорема 4.14 (неравенство Бляшке–Сантало)**.** *Для каждого центрально симметричного выпуклого тела $K\subset\mathbb{R}^n$ имеет место оценка*

$$s(K)\leq s\big(B_{\|\cdot\|_2}\big)=\omega_n^2.$$

Доказательство. При симметризации Штейнера объем Малера не уменьшится, а при некотором выборе последовательности симметризаций, в пределе получаем шар. □

Гипотеза Малера (открытая проблема). Верно ли, что $s(K)\geq s\big(B_{\|\cdot\|_\infty}\big)$.

Гипотеза проверена в размерности $n=2$ (Mahler, 1939) и $n=3$ (Iriyeh–Shibata, 2020). Доказано, что кубы — локальные минимумы (Nazarov–Petrov–Ryabogin–Zvavitch, 2010).

Относительно общей нижней оценки наилучший результат на данный момент принадлежит Бургейну–Мильману (1987):

$$s(K)\geq c^n s\big(B_{\|\cdot\|_2}\big).$$

Заметим, что $s\big(B_{\|\cdot\|_\infty}\big)=\frac{4^n}{n!}$, $s\big(B_{\|\cdot\|_2}\big)=\frac{\pi^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)^2}$. Т.е.

$$\sqrt[n]{s\big(B_{\|\cdot\|_2}\big)}\sim\frac{2\pi e}{n},\quad \sqrt[n]{s\big(B_{\|\cdot\|_\infty}\big)}\sim\frac{4e}{n},\ \text{и}\ \sqrt[n]{s\big(B_{\|\cdot\|_\infty}\big)}\sim\frac{\pi}{2}\sqrt[n]{s\big(B_{\|\cdot\|_2}\big)}.$$