§ 1 Топологическая теорема Хелли

Для начала вспомним (обычную) теорему Хелли; она следует из (обычной) т. Радона.

Т. Хелли Пусть $A_1, \dots, A_{d+2} \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклые, и такие, что

$$\forall i = 1, \dots, d+2 \qquad \bigcap_{j \neq i} A_j \neq \varnothing.$$

Тогда $\bigcap_{j=1}^{d+2} A_j \neq \varnothing$.

т. Радона-1 для всякого $X = \{x_1, \dots, x_{d+2}\} \subset \mathbb{R}^d$ существует разбиение (= представление в виде объединения непересек. подмножеств)

$X = X_1 \sqcup X_2$ такое, что

$$\mathrm{Conv}(X_1) \cap \mathrm{Conv}(X_2) \neq \varnothing.$$

Примечание: Conv – выпуклая оболочка, от слова "convex".

Теорема Радона доказывается в две строчки методами линейной алгебры.

Теорема Радона влечёт т. Хелли; приведём доказательство для $d=2$.

Оно обобщается на бо́льшие размерности без дополнительных усилий.

Итак, пусть $A_1,\dots,A_4\subset\mathbb{R}^2$, все тройные пересечения непусты.

Рассмотрим
$$x_1\in A_2\cap A_3\cap A_4,$$
$$x_2\in A_1\cap A_3\cap A_4$$
$$x_3\in A_1\cap A_2\cap A_4$$
$$x_4\in A_1\cap A_2\cap A_3,$$

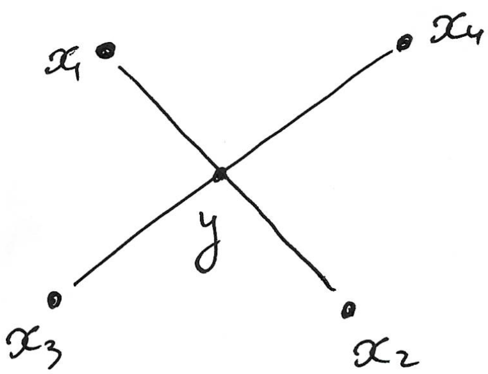
$X=\{x_1,\dots,x_4\}$.

Применим т. Радона к X. $X=X_1\sqcup X_2$.

Покажем, что $\mathrm{Conv}(X_1)\cap\mathrm{Conv}(X_2)\subset A_1\cap\dots\cap A_4$.

~~Для начала рассмотрим пример~~

<u>Пример</u>:



$y\in$ отрезку $x_1x_2\Rightarrow y\in A_{3,4}$

$y\in$ отрезку $x_3x_4\Rightarrow y\in A_{1,2}$.

~~Общий случай~~

Наша ближайшая цель:

- сформулировать и доказать топологическую т. Радона
- вывести из неё топологическую т. Хелли, подражая схеме доказательства обычной т. Хелли.

Топологическая т. Радона.

Заметим вначале, что т. Радона может быть переформулирована так:

<u>Т. Радона-2</u> (эквив. формулировка)

$\forall$ линейного $f: \Delta^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ найдутся две непересекающиеся грани F и G симплекса Δ^{d+1} такие, что

$$f(F) \cap f(G) \neq \emptyset.$$

<u>отступление о симплексе:</u>

Возьмем $d+2$ точки в $\mathbb{R}^d$ в общем положении (= не умещающихся ни в какую гиперплоскость).

Их выпуклая оболочка называется d-мерным симплексом и обозначается Δ^d.

~~Этот~~ <u>Задача</u>. Всякое подмножество вершин Δ^d

Δ^d задаёт некоторую грань Δ^d.

<u>Задача</u> Любые два симплекса аффинно эквивалентны

(конец отступления)

(это про равносильность формулировок)

Действительно, всякая конфигурация $X=\{x_1,\dots,x_{d+2}\}$ представима в виде линейного образа множества вершин Δ^{d+1}. При этом образы граней суть выпуклые оболочки образов вершин.

Теперь ослабим формулировку т. Радона-2:

<u>Топологическая т. Радона</u>

$\forall$ <u>непрерывного</u> $f: \Delta^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ найдутся две непересекающиеся грани Δ^{d+1}, образы которых пересекаются.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся

- т. Борсука-Улама
- Пермутоэдр

Теорема Борсука-Улама

$\forall$ непрерывного $\varphi : S^n \to \mathbb{R}^n$

$\exists x \in S^n \;:\; \varphi(x) = \varphi(-x)$.

. (доказательство появится позже)

~~Нер~~ Мы можем посмотреть на топ. т. Радона с точки зрения т. Б.-У.:

топ. Т. радона тоже про отображение из сферы в евклидово пространство:

$$f : \partial \Delta^{d+1} \to \mathbb{R}^d$$
$$\shortparallel$$
$$S^d$$

Однако $\partial \Delta^{d+1}$ (границе) несимметрична, и на ней нет инволюции. Кроме того, у $\partial \Delta^{d+1}$ есть структура граней, которая не участвует в т. Б-У.

Поэтому прежде всего, "сделаем симплекс Δ^{d+1} симметричным".

Для этого пригодится пермутоэдр.

Пермутоэдр

$$\Pi_n := \mathrm{Conv}\,\{\sigma(1,\dots,n) \mid \sigma \in S_n\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Пример 1: $n=3$ 

Пример 2: $n=4$ (скачать картинку из инета; усеченный октаэдр)

Теорема

- Π_n – многогранник размерности $n-1$
- все точки $\sigma(1,\dots,n)$ – вершины Π_n
- грани Π_n ~~соответ~~ нумеруются линейно упорядоченными разбиениями $\{1,\dots,n\}$ на непустые подмножества.

Поясняющий пример: Пусть $n=6$.

~~Опр~~ По определению, грань многогранника с внешней нормалью $\xi \in \mathbb{R}^n$ есть подмножество многогранника, на котором достигается максимум скалярного произведения $\langle \xi, \cdot \rangle$.

Возьмем $\xi = (1,1,1,2,2,3)$

Максимум достигается на следующих вершинах Π_6:

$(1\,2\,3\,4\,5\,6)$ $(1\,3\,2\,4\,5\,6)$ $(3\,2\,1\,4\,5\,6)$

$(1\,2\,3\,5\,4\,6)$ $(1\,3\,2\,5\,4\,6)$ ...

их всего $6\cdot 2 = 12$ штук..

Задача: докажите, что Π_n центрально симметричен

Нам пригодится альтернативная конструкция пермутоэдра Π_n:

- Возьмем симплекс Δ^{n-1},
  - отрежем все его вершины,
  - отрежем все рёбра,
  - отрежем все двумерные грани

    и т.п.

Полученный "обрезанный" симплекс комбинаторно эквивалентен Π_n.

(Более того, если ~~бы~~ стартовать с правильного симплекса, и отрезая определённым образом, мы получим в точности Π_n). метрическим но это нам не надо.

Примечание: мы отрезаем только "старые" грани Δ^{n-1}. При усечении образуются новые грани, рёбра, вершины: их мы не отрезаем.

Пример Убедитесь, что при таком обрезании трехмерного симплекса Δ^3 получается Π_4, то есть, усечённый октаэдр.

Докажем это, расставив вначале метки на Δ^{n-1}.

Занумеруем вершины Δ^{n-1} числами $1, \dots, n$.

Шаг 1. На каждой вершине Δ^{n-1} поставим метку $\{i\}$, где i - номер вершины.

Шаг 2. На каждой грани Δ^{n-1} поставим метку "множество индексов вершин этой грани". (рис. 1. а)

Шаг 3 Дополним эти метки, см. рис. 1. б.

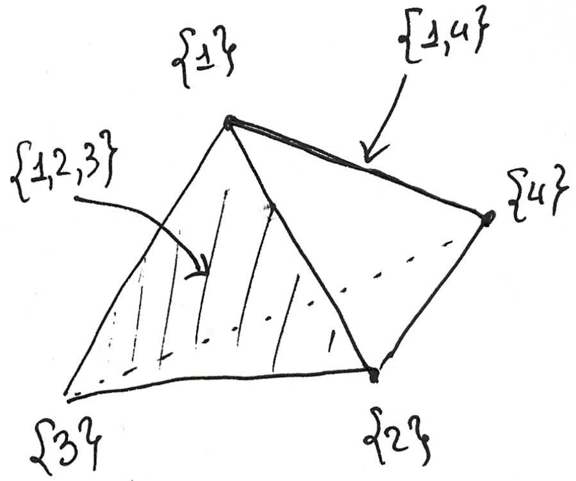


рис. 1, а

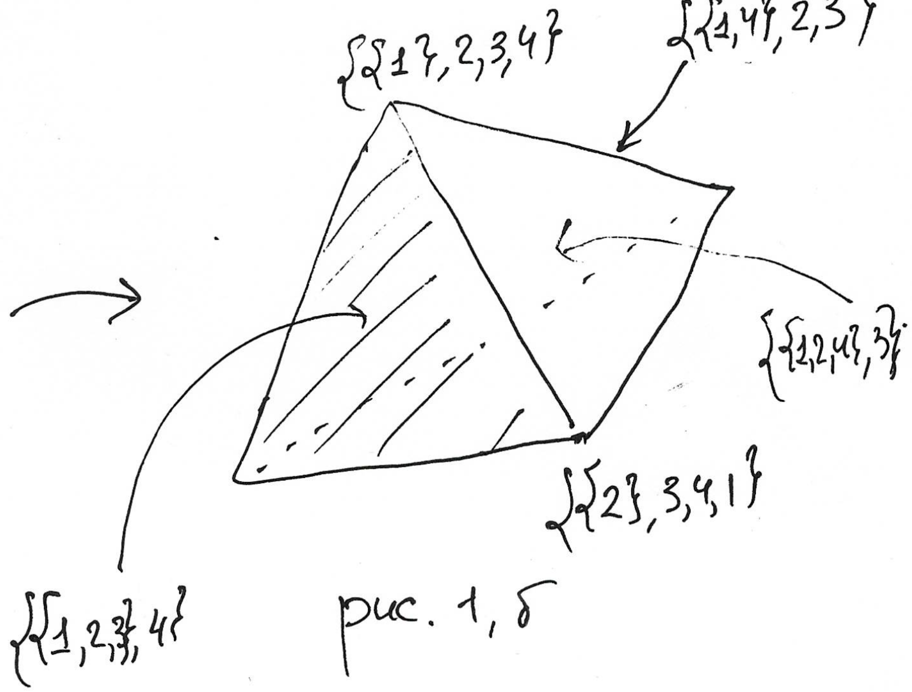


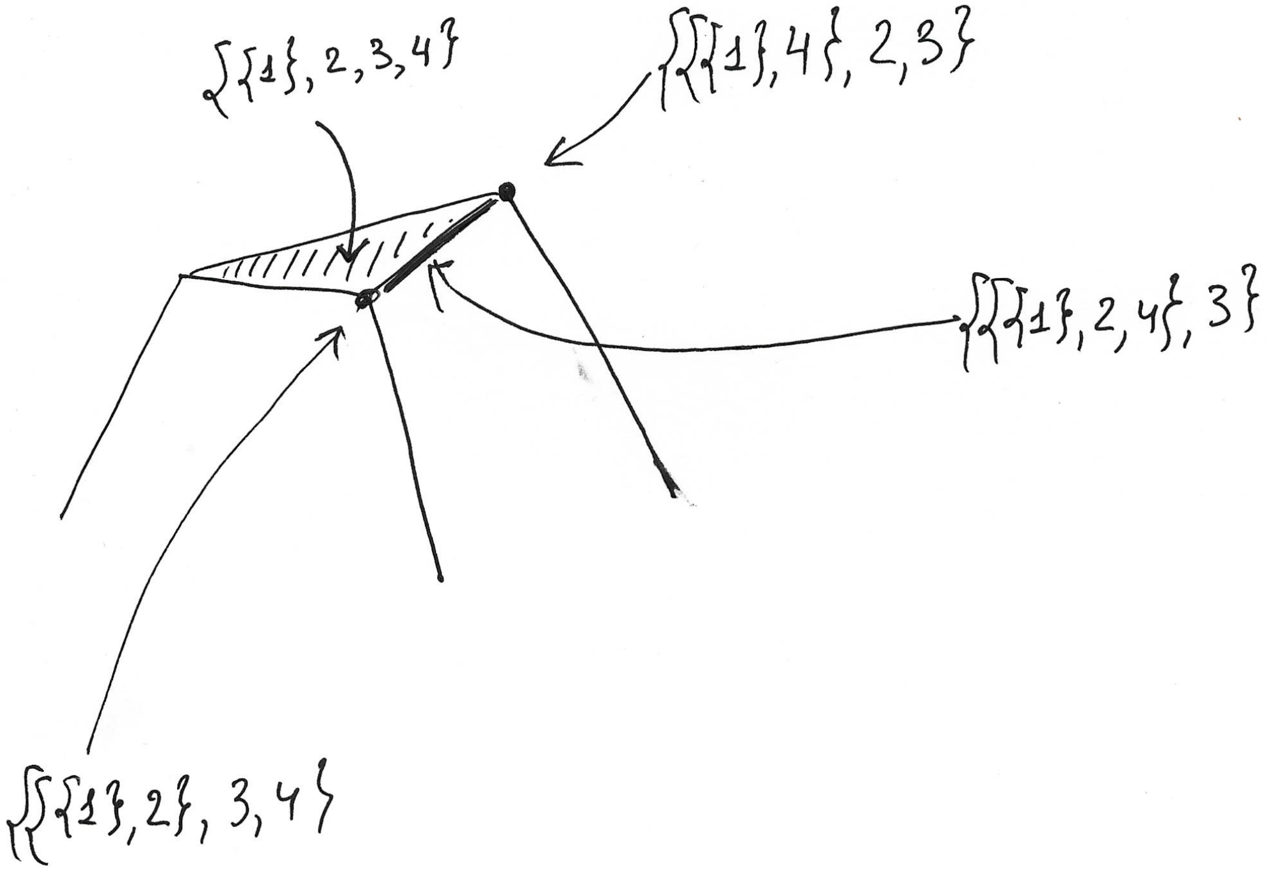
рис. 1, б

Теперь будем по очереди обрезать грани, начиная с меньших размерностей.

При каждом отрезании образуются новые грани. Поставим на новые грани метки, по следующему правилу:

Пусть отрезается грань F с помощью гиперплоскости h_F.
Каждая новая грань есть пересечение
$h_F \cap G$.
Поставим на ней суперпозицию меток граней F и G.

<u>Пример</u>: отрезаем вершину 1 (её метка $\{\{1\},2,3,4\}$)



<u>Задача</u> Убедитесь (в размерности 3), что после отрезания всех вершин и рёбер у Δ^3 в качестве меток граней будут получены все возможные комбинаторные

объект типа

$$U_1 \subsetneqq U_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq U_k = \{1, \ldots n\}$$

Заметим, что по каждому объекту такого типа можно построить линейно упорядоченное разбиение

$$\{1, \ldots n\} = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots V_k$$

где $V_1 = U_1$, $V_2 = U_2 \setminus U_1$, и т.п.

Иными словами, метки граней пермутоэдра и метки граней обрезанного симплекса совпадают.

(здесь Г.Ю. обязуется честно написать про инцидентности)

—

Какая польза нам от пермутоэдра? Раз Π_n получается обрезанием симплекса Δ^{n-1}, то на Δ^n можно смотреть как на Π_n "со стянутыми гранями".

Формализуем это так:

Существует естественное непрерывное отображение

$$\pi : \Pi_n \to \Delta^{n-1},$$

- переводящее грани Π_n в грани Δ^{n-1}
- такое, что $\forall x \in \partial \Pi_n$ $\pi(x)$ и $\pi(-x)$ лежат в дизъюнктных гранях.

Понять, как устроено π, можно, отрезая по одной грани за раз, и глядя на рисунок:

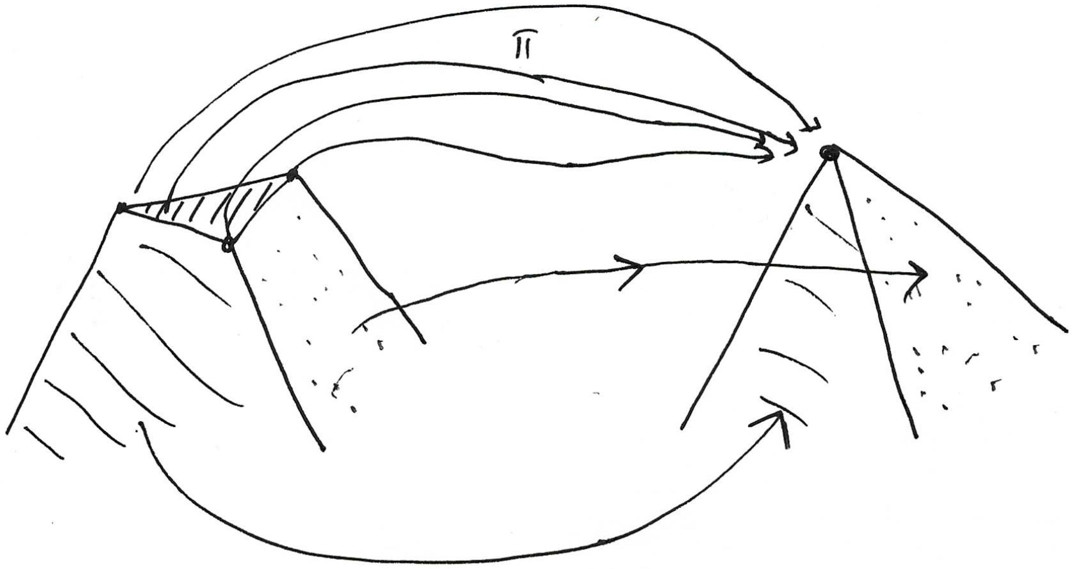


рис. 2

Теперь мы можем <u>доказать топологическую теорему Радона:</u>

Пусть $f: \Delta^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ – непрерывное отображение.

рассмотрим

$$\begin{tikzcd} \partial \Pi_{d+2} \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & \partial \Delta^{d+1} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^d \end{tikzcd}$$

Рассмотрим $\varphi = f \circ \pi$ – непрерывное отображение, к которому уже можно применить теорему Борсука-Улама.

Существует $x \in \partial \Pi_{n+1}$ такое, что

$$\varphi(x) = \varphi(-x).$$

Возьмем $\pi(x)$ и $\pi(-x) \in \partial \Delta^{n+1}$.

Эти две точки лежат в непересекающихся гранях,

и $f(\pi(x)) = f(\pi(-x))$. ■

Сформулируем и
Докажем теперь топологическую теорему Хелли.

<u>Т</u> Пусть $A_1, \dots, A_{d+2} \subset \mathbb{R}^d$ – стягиваемые множества, причём

$\forall\, I \subsetneq \{1, \dots, d+2\}$ $\quad \bigcap_{i \in I} A_i$ – непусто и стягиваемо.

Тогда $\bigcap_{i=1}^{d+2} A_i \neq \varnothing$.

<u>Доказательство.</u> Как и в выпуклом случае, выберем по точке

$$x_i \in \bigcap_{j \neq i} A_j.$$

Построим непрерывное отображение $f: \Delta^{d+1} \to \mathbb{R}^d$, для которого потом применим ТТ Радона.

Отображение f будем строить постепенно, начиная с вершин, продолжая затем на рёбра, потом на двумерные грани, и т.д.

<u>Шаг 0</u> Зададим f на вершинах:

$$f(\text{вершины } i) := x_i.$$

<u>Шаг 1</u> Зададим f на рёбрах так, чтобы

$$\forall k \notin \{i,j\} \quad f(ij) \subset A_k.$$

Это возможно сделать, так как $\bigcap\limits_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} A_k$

стягиваемо, ergo связно.

<u>Шаг 2</u> Зададим f на двумерных гранях Δ^{d_H}

так, чтобы

$$\forall m \notin \{i,j,k\} \quad f(ijk) \subset \bigcap_{m \notin \{i,j,k\}} A_m$$

Это возможно сделать, так как это множество односвязно.

<u>Примечание</u>. Мы пользуемся следующим фактом: пусть X стягиваемо. Тогда всякое непрерывное отображение

$$\varphi : S^k = \partial B^{k+1} \to X$$

продолжается до отображения $B^{k+1} \to X$.

(Такое свойство X называется <u>k-связностью</u>. Эквивалентно, у k-связного пространства обнуляется k-я гомотопическая группа: $\pi_k(X) = 0$.)

В конце концов мы получим отображение $f : \partial \Delta^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ такое, что $\forall\, I \subsetneq \{1, \dots, d+2\}$

$$f(I) \subset \bigcap_{i \notin I} A_i \qquad (*)$$

Пусть F и G — две дизъюнктные грани, образы которых пересекаются.

<u>Задача</u> проверьте, что $(*)$ влечёт:

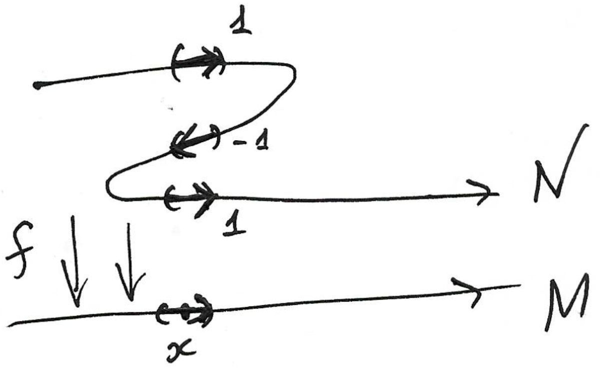
$$x \in f(F) \cap f(G) \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{d+1} A_i$$

Степень отображения

Пусть N^n и M^n - замкнуте связные ориентированные n-мерные многообразия (примечание. если читатель не знаком с понятием "многообразие", думайте, что это сферы: $N^n = S^n$, $M^n = S^n$)

Пусть $f : N^n \to M^n$ - ~~гладкое~~ непрерывное "хорошее" (гладкое или кусочно-лин отображение).

Тогда для почти всех $x \in M^n$ у x есть окрестность $U \subset M^n$ такая, что $f^{-1}(U)$ есть конечное объединение гомеоморфных копий U:



Число этих копий с учетом ориентации называется степенью отображения f и обозначается $\deg f$.

Утверждение: определение корректно, то есть,

- $\deg f$ не зависит от выбора точки x
- $\deg f$ не меняется при непрерывной деформации f.

Пример 1 $f: S^1 \to S^1$

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ \Psi & & \Psi \\ \alpha & \longrightarrow & k\alpha \end{array}$$

$$\deg f = k$$

(у каждой точки прообраз состоит из k элементов)

Пример 2 $f: \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$,

~~f - полином степени n~~ $f := z^n$

$(\mathbb{C}P^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ - сфера Римана$)$

тогда $\deg f = n$.

Действительно, возьмём в качестве x ~~очень большое по модулю комплексное ч~~ произвольное ненулевое (и не равное ∞) комплексное число.

Степень отображения многообразий с краем.

Пусть $f: M^n \to N^n$, где M^n, N^3 — ориентированные связные многообразия с краем (для понимания достаточно представлять $N^n = M^n = B^n$ — шар; его край — сфера S^{n-1}.)

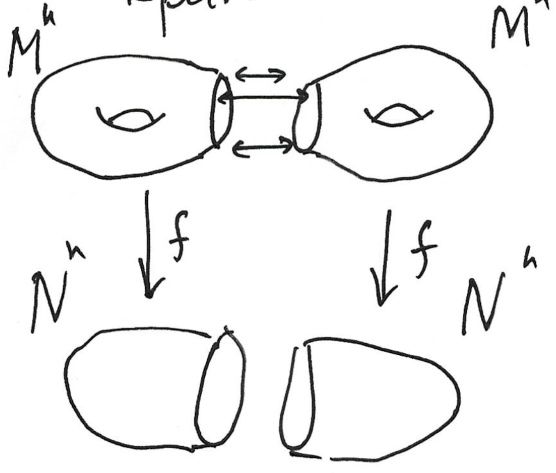
Если попробовать дословно повторить определение, утратится корректность. (задача: проверьте!)

Поэтому попросим дополнительно:

$$f(\partial M^n) \subset \partial N^n.$$

Тогда определение $\deg f$ становится корректным.

Действительно, многообразие с краем можно удвоить, склеив две копии по краю:



При этом верен уже менее очевидный факт:

Лемма $\deg f =$

$$= \deg f\big|_{\partial M^n}.$$

Докажем теорему Борсука-Улама, используя степень отображения.

Упражнение Покажите равносильность следующих утверждений:

(1) (теорема Б-У)

$\forall$ непрерывного отображения $f: S^n \to \mathbb{R}^n$

$\exists\, x \in S^n : f(x) = f(-x)$

(2) $\forall$ нечётного (антиподального) $g: S^n \to \mathbb{R}^n$

$\exists\, x \in S^n : g(x) = 0.$

Примечание: отображение g называется нечетным, или антиподальным, если

$\forall x \quad g(-x) = -g(x)$

(3) Не существует антиподального отображения

$h: S^n \to S^{n-1}$

Упражнение: Найдите какое-нибудь антиподальное $h: S^n \to S^n$ степени 1.

степени 3.

Лемма о степени антиподального отображения

Пусть $h: S^n \to S^n$ антиподально.

Тогда $\deg h \equiv 1 \pmod 2$.

Покажем, что лемма влечёт утверждение (3), равносильное Б-У.

Действительно, пусть лемма справедлива, но тем не менее, найдется антиподальное

$$h: S^n \to S^{n-1}.$$

Вложим $S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ в виде "экватора.

Получим антиподальное отображение

$$S^n \xrightarrow{h} S^{n-1} \hookrightarrow S^n,$$

степень которого равна нулю. Противоречие.

Теперь докажем лемму о степени.

Пусть $h: S^n \to S^n$ — антиподальное отображение.

Вложим $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, и рассмотрим $\bar{h}: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "\bar{h}"'] & S^n \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^{n+1} \end{tikzcd}$$

Заметим, что $id: S^n \to S^n$ — тоже антиподальное отображение, причём $\deg id = 1$.

Имеем $\bar{h}, \bar{id} : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Соединим $\bar{h}$ и $\bar{id}$ линейной гомотопией:

для $\lambda \in [0, 1]$ рассмотрим

$$\varphi_\lambda := \lambda \bar{h} + (1-\lambda)\bar{id} : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$$

Если $\operatorname{Im} \varphi_\lambda$ не содержит 0, то можно говорить о

$$\tilde{\varphi}_\lambda : S^n \longrightarrow S^n,$$

$$\tilde{\varphi}_\lambda(x) := \frac{\varphi_\lambda(x)}{|\varphi_\lambda(x)|}.$$

При этом $\tilde{\varphi}_0 \equiv id$, $\tilde{\varphi}_1 \equiv h$.

Это отображение меняет свою степень только когда φ_λ задевает 0.

В силу антиподальности, нули φ_λ разбиваются на пары антиподов.

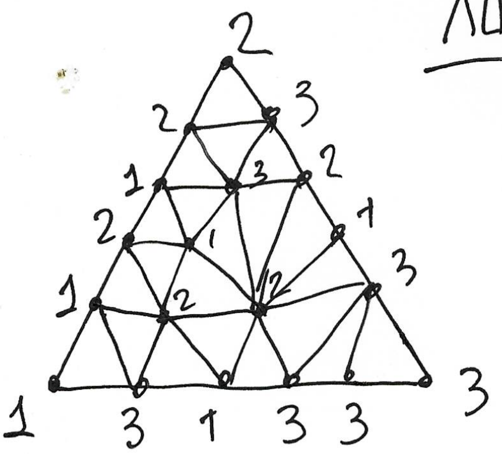
Следовательно, степень $\deg \tilde{\varphi}_\lambda$ меняется каждый раз на чётное число.

Поскольку $\deg \tilde{\varphi}_0 = \deg id = 1$,

то $\deg \tilde{\varphi}_1 = \deg h$ нечётно.

§2 Деление без зависти

Прежде чем перейти к делению без зависти, докажем с помощью степени отображения лемму Шпернера, которая служит "игрушечной версией" деления без зависти.



ЛШ Пусть вершины триангуляции симплекса Δ^n раскрашены в $n+1$ цвет так, что на грани $I \subset \{1, \dots, n+1\}$ присутствуют только цвета из I, см. рис.

Тогда найдётся симплекс триангуляции со всеми вершинами разного цвета ("радужный симплекс").

Док-во: Устроим отображение $f : \Delta^n \to \Delta^n$, устроенное так:

- вершина цвета i переходит в вершину i симплекса Δ^n
- на каждом симплексе триангуляции отображение f линейно.

f обладает следующими свойствами:

- $f(\partial\Delta^n) \subset \partial\Delta^n$
- Пусть $n=2$. $\deg f|_{\partial\Delta^2} = 1$.
- Следовательно (см. Лемма) $\deg f|_{\Delta^2} = 1$.
- По индукции можно доказать, что $\deg f = 1$ для произвольного n.

Следовательно, у точки внутри Δ^n прообраз непуст. Но на весь симплекс Δ^n отображаются лишь радужные симплексы. $\boxtimes$

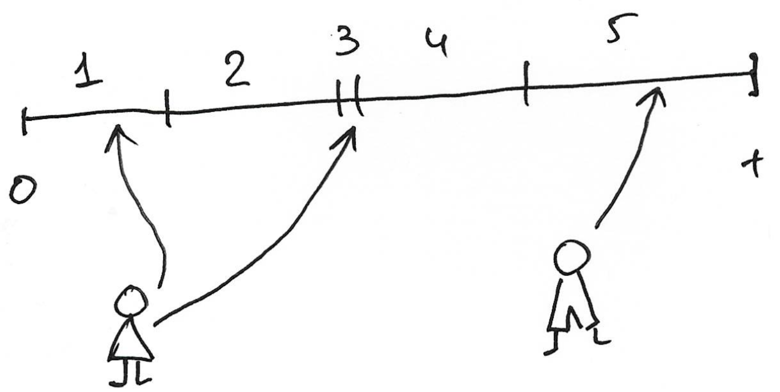
<u>Замечание:</u> Мы доказали, что число радужных симплексов нечётно.

n гостей делят праздничный пирог.

Пирог := отрезок $I = [0, 1]$,

делят его $(n-1)$ разрезом. При этом образуются n "кусков", которые естественно нумеруются слева направо. Куски могут быть вырожденными, то есть, представленными отрезками длины 0.

Как только разрез произведён, каждый гость указывает на "свой предпочитаемый кусок", или несколько предпочитаемых кусков.



Предпочтения (как в жизни) зависят от разреза.

Мы добились деления без зависти, если смогли разрезать так, что после разрезания возможно раздать куски гостям так, что каждый гость получил предпочитаемый кусок.

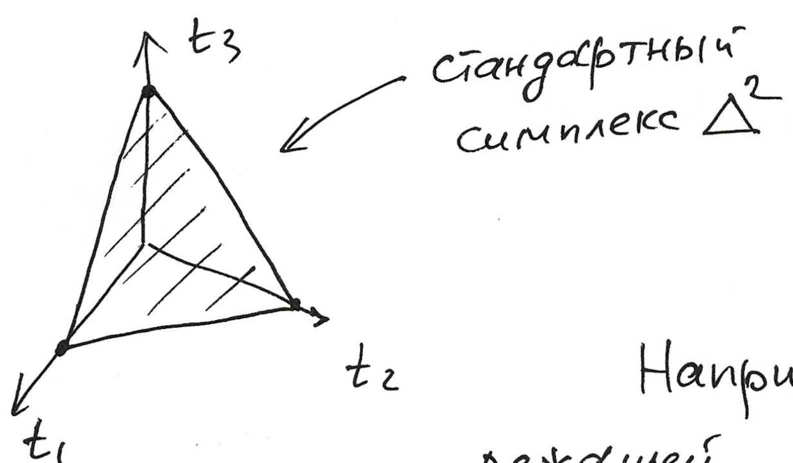
Теорема Гейла о делении без зависти

Если • предпочтения замкнуты,
• и никто из гостей не предпочитает вырожденный кусок,
то существует деление без зависти.

Прежде всего придадим точный смысл этим словам.

Каждому разрезу поставим в соответствие числа $(t_1, \ldots, t_n)$, где t_i - длина куска № i.
Очевидно, $t_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. ← Эти условия задают стандартный симплекс Δ^{n-1}

Иными словами, разрезам соответствуют точки стандартного симплекса.



Заметим, что грани Δ^{n-1} соответствуют вырождению кусков.

Например, на грани, лежащей напротив стороны i, лежат точки, соответствующие разрезам, в которых вырождается кусок i.

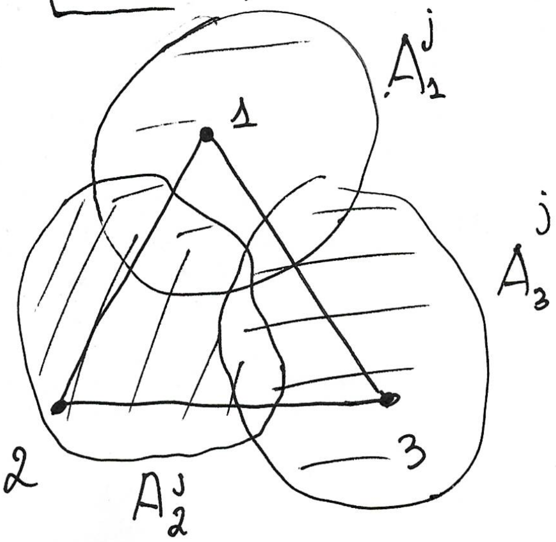
<u>опр</u> предпочтение игрока № j:

$$A_i^j \subset \Delta^{n-1}$$

Смысл: $x \in A_i^j \overset{def}{\iff}$ при разрезе x игрок j предпочитает кусок № i

замкнутость предпочтений $\overset{def}{=}$ замкнутость A_i^j

Никто не предпочитает вырожденный кусок $\iff$ A_i^j не пересекает грань Δ^{n-1}, лежащую напротив вершины i.



<u>Теорема Гейла</u>
<u>нам говорит:</u>

$\exists\, x \in \Delta^{n-1}$,

$\exists\, \sigma \in S_n$ такие, что

$$x \in A^j_{\sigma(j)}$$

Посмотрим, как выглядит т. Гейла в случае, когда у всех гостей одинаковые предпочтения, т.е. $A_i^j = A_i$, не зависит от j.

Имеем:

<u>Т</u> Кнастера-Куратовского-Мазуркевича

Δ^{n-1} покрыт замкнутыми $A_1, \ldots, A_n$.

при этом A_i не пересекает грань, лежащую напротив вершины i.

Тогда $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$.

<u>Задача</u> Покажите, что ККМ влечёт лемму Шпернера.

Многогранник Биркгофа

Матрица $n \times n$ (a_{ij}) называется <u>дважды стохастической</u>,

если
- $\forall i \quad \sum_j a_{ij} = 1$
- $\forall j \quad \sum_i a_{ij} = 1$
- $a_{ij} \geqslant 0$

Эти условия задают некоторый выпуклый многогранник – <u>мн-к Биркгофа</u>, или <u>дважды стохастических матриц</u> B_n.

<u>Пример</u> каждой перестановке $\sigma \in S_n$ можно сопоставить 0-1 дважды стох. матрицу:

$$a_{i\sigma(i)} = 1, \text{ иначе } a_{ij} = 0.$$

<u>Ex</u>:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_\sigma$$

Задача

Вершинами B_n являются 0-1 матрицы M_6.

Задача Найдите размерность мн-ка B_n (т.е. размерность минимального аффинного пространства, содержащего B_n).

Задача Постройте линейное отображение из B_n, образом которого является пермутоэдр Π_n.